KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

- VAN 29 MEI 1920 -
TOT 26 MAART 1921

DEEL XXIX

UITGAVE DER
KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM
SEPTEMBER 1921

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

- VAN 29 MEI 1920 -
TOT 27 NOVEMBER 1920

DEEL XXIX
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
: : JANUARI 1921 : :

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG

VAN DE

GEWONE VERGADERING

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 29 Mei 1920.

DEEL XXIX.

N°. 1.

8 September 1920.

Wanneer na de aanbieding van eene mededeeling mocht blijken dat deze met inbegrip van tekstfiguren en tabellen, meer dan 16 blz. druks bedraagt, heeft de Secretaris het recht dit stuk niet op te nemen en zal het aan den Schrijver teruggezonden worden ter bekorting.

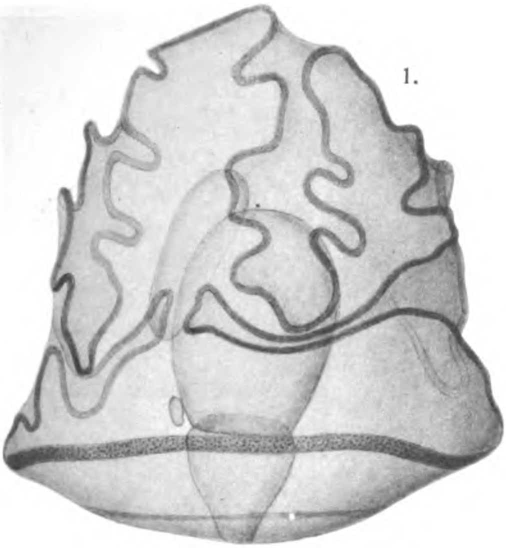
Deze terugzending zal niet geschieden wanneer de Schrijver zich bereid verklaart, de meerdere kosten dan die van één vel druks, voor zijne rekening te nemen.

In dit geval kunnen ook platen aan de mededeeling worden toegevoegd.

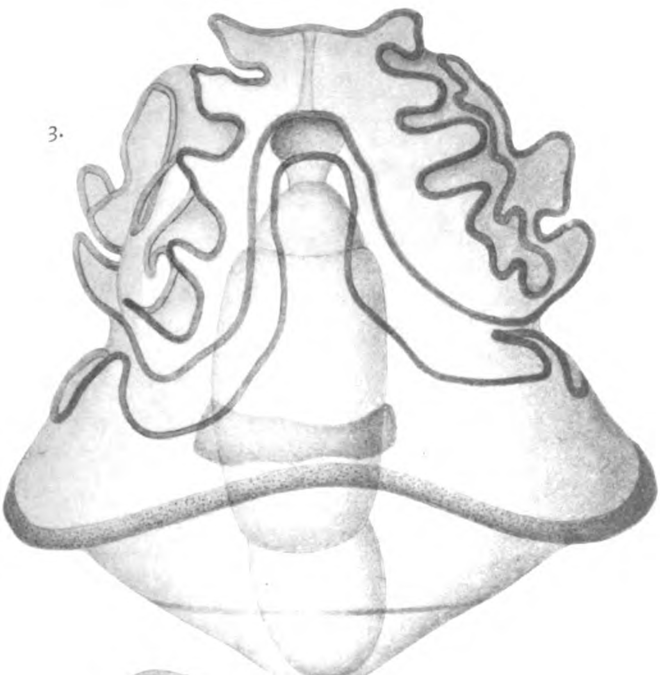
INHOUD.

REGISTER.

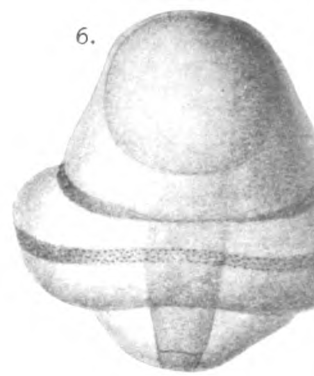
TORNARIA WELDONI.



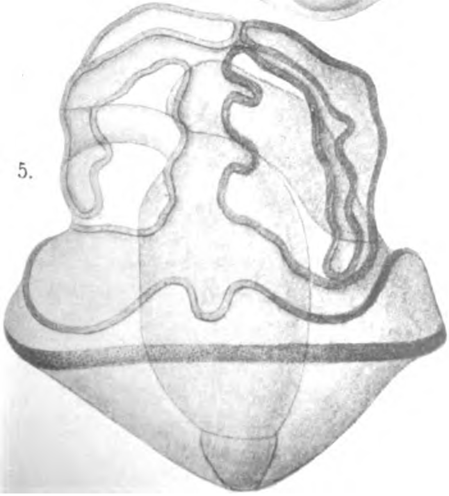
1.



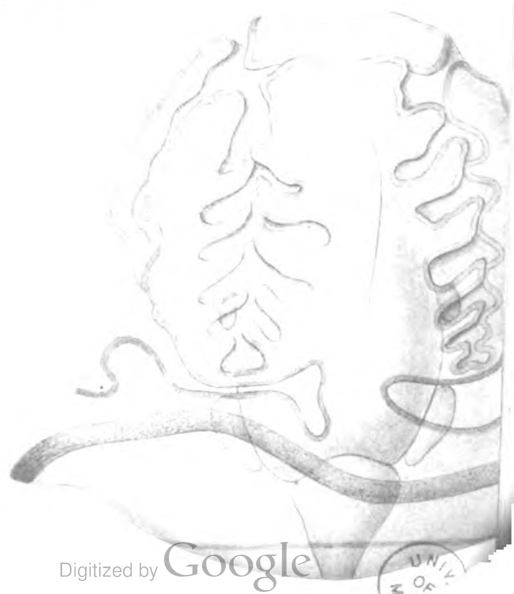
3.



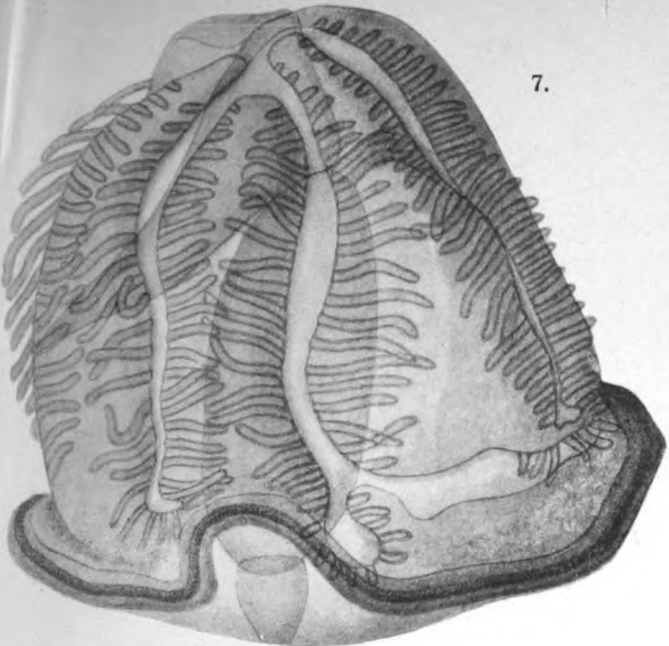
6.



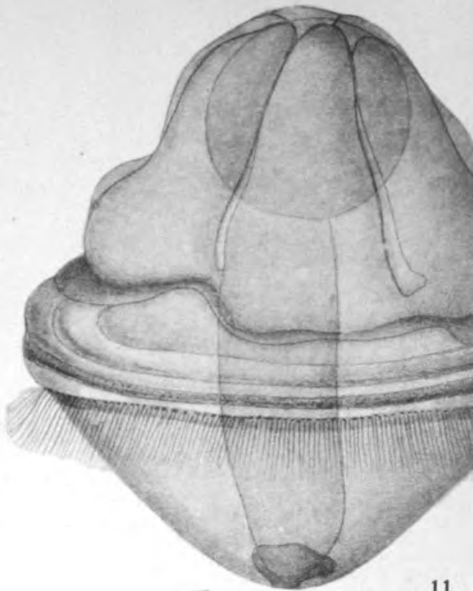
5.



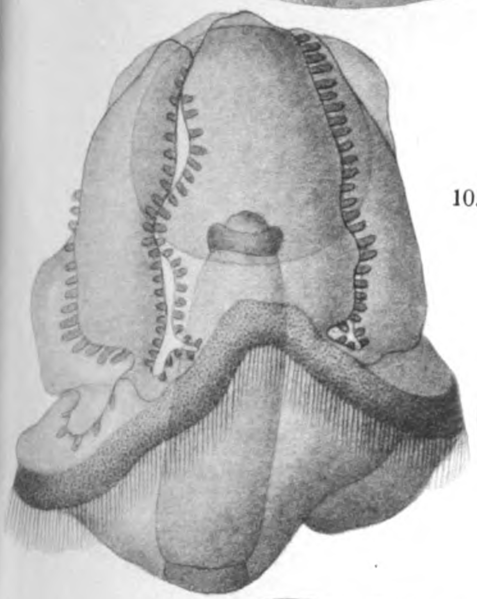
TORNARIA MORGANI.



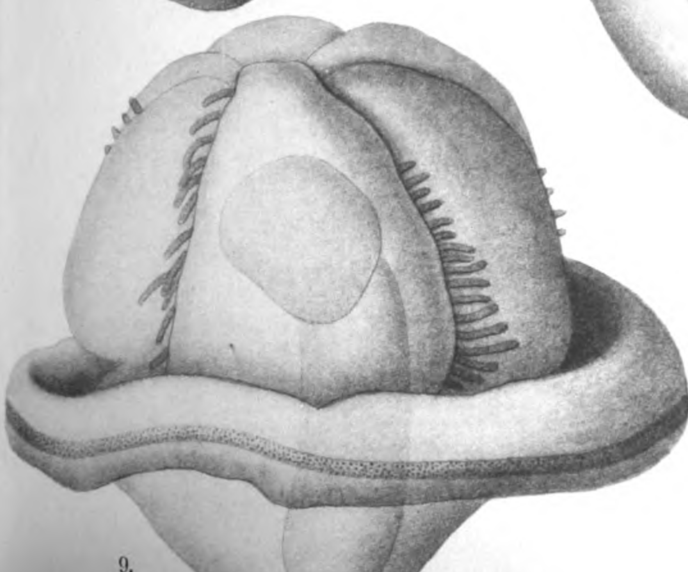
7.



11.



10.



9.

12.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
VAN ZATERDAG 29 MEI 1920.

DEEL XXIX.

N°. 1.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren C. LELY en R. MAGNUS dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 19 Mei j.l. met bericht dat H. M. de Koningin heeft bekrachtigd de benoeming van de twee *gewone* leden, de Heeren A. H. BLAAUW en ARNAUD DENJOY, van de negen *buitenlandsche leden*, de Heeren A. EINSTEIN, Sir E. RUTHERFORD, K. VON MONAKOW, S. RAMAN Y CAJAL, J. HADAMARD, R. TIGERSTEDT, L. DOLLO, A. ENGLER en G. BREDIG en van de vier *correspondenten*, de Heeren P. C. FLU, A. PIJPER, PH. VAN HARREVELD en J. KUIJPER, die de Afdeeling in hare buitengewone vergadering van 23 April j.l. had gekozen.

Aangenomen voor kennisgeving.

3°. Een bij renvooi van denzelfden Minister dd. 10 Mei j.l. N°. 1996, Afd. K. W. aan de Afdeeling, met verzoek om bericht en raad, doorgezonden request van het Bestuur der vereeniging „Het Nederlandsch natuur- en geneeskundig congres", waarin een jaarlijksche subsidie van *f* 1500.— uit 's Rijks middelen voor het bibliotheekwerk dier vereeniging wordt gevraagd op gronden, ontwikkeld in een bijgevoegde memorie van toelichting.

Het request met bijlage is door den Voorzitter bereids gesteld in handen van de Heeren F. M. JAEGER J. P. KUENEN en JAN DE VRIES

met verzoek om prae-advies, dat in deze vergadering zal worden uitgebracht.

4°. Eene missive van denzelfden Minister dd. 11 Mei j.l. N°. 1969², Afd. K. W. met bericht dat bij Zijner Exc's beschikking van dien datum N°. 1969¹, Afd. K. W. aan den Heer H. BOSCHMA, assistent aan het Zoölogisch Laboratorium der gemeentelijke Universiteit te Amsterdam, die ditmaal is aangewezen voor uitzending naar het botanisch Station te Buitenzorg, ook over 1920 eene Rijkstoelage is toegekend, welk bedrag hem binnenkort zal worden uitbetaald.

Aangenomen voor kennisgeving.

5°. Bericht van het nieuwbenoemde gewone lid, den Heer ARNAUD DENJOY en van de nieuwbenoemde buitenlandsche leden, de Heeren A. EINSTEIN, L. DOLLO en K. VON MONAKOW dat zij hunne benoeming, onder dankzegging voor de op hen gevallen keuze, gaarne aannemen.

Aangenomen voor kennisgeving.

6°. Bericht van H.H. Administrateuren van het P. W. Korthals-fonds, dd. 5 Mei j.l., dat in het begin van de maand Juli a.s. uit de renten van dit fonds weder een bedrag van *f* 600.— beschikbaar zal zijn voor „een prijs ter bevordering der kruidkunde", ingevolge de testamentaire bepaling van wijlen den Heer KORTHALS.

Aangenomen voor kennisgeving.

7°. Bericht namens het bestuur van het „Phytopathologisch Laboratorium W. C. Scholten", dat Mej. Prof. Dr. JOH. WESTERDIJK te Amsterdam door dit Bestuur is aangewezen om zitting te nemen in de Commissie van beheer van de Schimmelcollectie der „Association internationale des botanistes".

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter verwelkomt thans de nieuw benoemde leden, de Heeren A. H. BLAAUW en A. DENJOY, alsmede den Heer A. EINSTEIN, die in deze eerste vergadering na zijne benoeming tot buitenlandsch lid tegenwoordig is.

Daarna brengt de Heer F. M. JAEGER, mede namens de Heeren J. P. KUENEN en JAN DE VRIES, het volgende prae-advies uit:

Praeadvies aan de Wis- en Natuurkundige Afdeeling van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, inzake eene subsidie-verleening van 's Rijkswege aan de Bibliotheek-Commissie van de Vereeniging „het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres".

AMSTERDAM, 17 Mei 1920.

Ondergeteekenden, belast met het uitbrengen van een praeadvies inzake een tot de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie gericht schrijven van den Minister van Onderwijs, N°. 1996, Afd. K. W., gedateerd van 10 Mei 1920, hetwelk een verzoek om bericht en raad bevat over eene subsidie-aanvrage door het Bestuur der vereeniging „Het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres", en wel ten bate van de Bibliotheek-Commissie dier vereeniging, — hebben de eer het volgende onder de aandacht van de genoemde Afdeeling der Akademie te brengen.

Het komt aan ondergeteekenden voor, dat, — in aanmerking nemende de nuttige taak, die de genoemde Bibliotheekcommissie op zich genomen heeft, in zooverre als zij tot aanvulling en aanschaffing van hier te lande slechts gedeeltelijk aanwezige of nog niet voorhanden periodieken op elk gebied van alle natuurwetenschappen en van de geneeskunde reeds gedurende een twintigtal jaren met succes werkzaam is, en erkennende het zeer algemeene belang, dat zij door dien arbeid hier te lande dient, — er alle reden is, om er bij de Regeering met klem op aan te dringen, aan de genoemde Commissie eene subsidie van f 1500 's jaars toe te kennen, opdat zij de voortzetting van hare nuttige werkzaamheden ook in de toekomst, ondanks de ongunstige tijdsomstandigheden, verzekerd moge zien.

Het behoeft wel geen betoog, dat niet slechts de financieele middelen van de vereeniging „Het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres" ter bestrijding van de onkosten der Commissie onvoldoende moeten zijn, waar alle verdere uitgaven zoo sterk gestegen zijn, doch dat ook de verhoogde prijzen van tal van aan te schaffen werken, de taak der Bibliotheekcommissie in de toekomst meer en meer zullen bemoeilijken.

Ondergeteekenden stellen dus aan de Wis- en Natuurkundige

Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen voor, den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen te adviseeren, om aan de Vereeniging „Het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres te verleenen eene jaarlijksche subsidie van f 1500 ten bate van den arbeid harer Bibliotheek-Commissie.

De Commissie van rapporteurs:

(get.) F. M. JAEGER.
„ J. P. KUENEN.
„ JAN DE VRIES.

De vergadering neemt het prae-advies ongewijzigd over en besluit een afschrift daarvan, met een begeleidend schrijven, namens de Afdeeling aan den Minister te zenden als het door haar te geven advies aangaande het request.

Dierkunde. — De Heer J. Boeke biedt eene mededeeling aan van den Heer Gustav Striasny: *„Ueber westindische Tornarien nebst einer Uebersicht über die bisher bekannten tentaculaten Tornarien"*.

Natuurkunde. — De Heer P. Zeeman biedt, mede namens den Heer G. C. Dibbetz, eene mededeeling aan: *„Beschouwing over den aard der interferentiestrepen bij de opstelling van* Fizeau Michelson *en eene experimenteele bevestiging met behulp van een prisma van natriumdamp"*.

Scheikunde. — De Heer Zeeman biedt, namens den Heer A. Smits, een mededeeling aan: *„Over de geldigheid van de verdeelingswet voor het evenwicht tusschen een mengkristalphase en een koëxisteerende vloeistof."* I.

Scheikunde. — De Heer Zeeman biedt, namens de Heeren A. Smits en J. Spuyman, een mededeeling aan: *„De thermo-electrische bepaling van overgangspunten"*.

Wiskunde. — De Heer Arnaud Denjoy biedt eene mededeeling aan: *„Sur une classe de fonctions admettant une dérivée seconde généralisée"*.

(Deze mededeelingen worden in een volgend Zittingsverslag opgenomen).

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt voor de boekerij der Akademie aan de dissertatie van den Heer H. W. STENVERS, die den titel draagt van: „*Klinische studie over de functie van het cerebellum en de diagnostiek der cerebellum- en bruggehoektumoren*".

Hij voegt daarbij een korte toelichting, om vast te leggen, welk belang het door den Heer STENVERS verrichte onderzoek voor de kliniek heeft.

In den laatsten tijd wint de meening veld, dat het cerebellum, in samenwerking met de groote hersenen, opeenvolgende coördinaties van spierbewegingen binnen een bepaald tijdsbestek mogelijk maakt.

BABINSKI heeft die eigenschap diadokokinesis genoemd, daaronder verstaat hij de mogelijkheid om snel van de eene handeling tot de andere over te gaan.

Bij eenzijdige aandoeningen van het cerebellum kan de lijder bv. niet meer verrichten: snel opeenvolgende pro- en supinatie-bewegingen met de gelijkzijdige hand, ofschoon elke pro- en supinatie-beweging op zich zelf zeer goed uitgevoerd wordt.

Iets dergelijks geldt ook voor spreekbewegingen. De cerebellaire spraakstoornis is gekenmerkt, door langzame lijmerigheid, de afzonderlijke beweging bij de vorming der letters en lettergreepen zijn niet scherp van elkander gescheiden, vloeien langzaam in elkander. Daardoor verschilt zij van de bulbaire spreekstoornis.

Spreekstoornissen worden bij éénzijdige cerebellaire aandoeningen nu eens wel, dan eens niet waargenomen. Bij dubbelzijdige kleine-hersenaandoeningen worden zij nooit gemist (JELGERSMA).

STENVERS verdedigt nu op goede gronden, dat de cerebellaire spreekstoornis in samenhang moet worden gebracht met de beteekenis die de groote hersenen voor de menschelijke spraak bezitten.'

Men weet, dat de overgroote meerderheid der menschen, de *rechts*handers, met de *linker* voorhoofdskwab der groote hersenen spreken. Zal echter die spraak goed en duidelijk zijn, dan is het noodig, dat de gekruiste dus rechter kleine hersenhelft intact is.

*Rechts*handers hebben cerebellaire spreekstoornissen als de *rechter*, *links*handers als de *linker* cerebellum-helft is aangedaan. De overwegende beteekenis, die het linker hersenhalfrond bij de meesten onzer voor de spraak bezit, vindt men in de daaraan gekruiste kleine hersenhelft terug.

Scheikunde. — De Heer JAEGER biedt eene mededeeling aan, getiteld: *"Over eenige Condensatie-producten van aromatische Aldehyden en Aminen"*.

§ **1.** Alhoewel volgens de theoretische voorstellingen van HANTZSCH en WERNER de mogelijkheid moet bestaan voor het optreden van stereoisomere vormen bij condensatie-producten van aldehyden en aromatische aminen van het type: $R_1—CH = N—R_2$, zoo was het toch gedurende geruimen tijd niet mogelijk gebleken[1]), om bij deze zoogenaamde „SCHIFF'sche" basen, gevallen van zoodanige isomerie met zekerheid vast te stellen. Eerst in 1906 werden door ANSELMINO[2]) enkele gevallen vermeld, waarin stoffen dezer soort in twee verschillende kristalvormen konden optreden, terwijl beide modificaties zich tevens door hunne kleur: geel en rood, sterk onderscheidden. Op grond zijner onderzoekingen kwam de genoemde schrijver tot het besluit, dat men hier niet slechts te doen had met eene *dimorfie* in den gewonen zin van het woord, maar met eene ware chemische *isomerie*. De argumentatie door hem gevolgd, om te bepleiten, dat er bij de gele en roode modificatie's van het *o-oxy-m-methylbenzylideen-aniline* geen sprake zou zijn van gewone enantiotropische, of van monotropische relatie's tusschen twee verschillende kristallografische vormen der verbinding, kan geenszins overtuigend heeten. Nochtans schijnt het wel, dat het verschil in chemisch karakter van den gelen en den rooden vorm, van welke toch de laatste veel gemakkelijker met stoffen reageert, die de *HO*-groep van het molecuul aantasten, inderdaad op eene chemische isomerie wijst, waarbij dan, in den zin der WERNER'sche theorie, aan de roode modificatie waarschijnlijk de *trans*-configuratie toegeschreven zou moeten worden.

Overigens heeft in het licht der interpretatie van de nieuwere onderzoekingen van kristallen met RÖNTGENstralen, de vraag naar de beslissing tusschen gevallen van „fysische" tegenover „chemische" isomerie bij vaste stoffen, eigenlijk geen zin meer; immers ongetwijfeld komt aan elk der modificatie's van polymorfe verbindingen, in den vasten toestand ook zeker eene bepaalde en specifieke ruimtelijke structuur toe, welke naar alle waarschijnlijkheid

---

1) A. HANTZSCH en O. SCHWAB, Ber. d. d. Chem. Gec., **34**, 822, (1901).

2) O. ANSELMINO, Ber. d. d Chem. Ges. **38**, 3989, (1906); **40**, 3465, (1907).

ten deele ook nog wel in den opgelosten toestand, en haast zeker in de door smelting ontstane vloeibare fase, teruggevonden wordt.

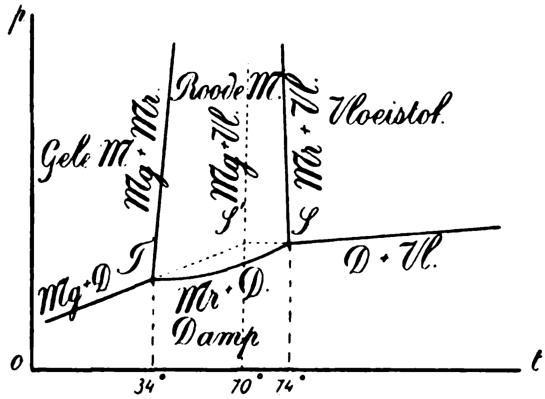


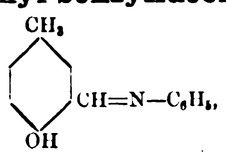
Fig. 1.

Wanneer echter deze verschillen in den vloeibaren toestand ook werkelijk in meetbare mate geconstateerd zijn, kan men met evenveel recht van twee verschillende chemische molekuul*soorten* spreken.

Met dat al staan, met terzijdelating van hunne chemische isomerie, naar onze meening, de roode en gele modificatie's van de genoemde base, *kristallografisch* toch desniettemin tevens tot elkaar als ware enantiotrope vormen, zooals dat bijv. ook het geval is bij de monokliene en rhombische *zwavel*. De door Anselmino waargenomene *ir*reversibiliteit is o.i. slechts *schijnbaar*, en wordt door sterke vertragingsverschijnselen voorgespiegeld: de omzettingstemperatuur: geel ⇄ rood ligt bij 34° C., het smeltpunt der roode modificatie bij 74°, het (metastabiele) smeltpunt der gele modificatie bij 70° C. Door deze interpretatie kunnen alle door Anselmino waargenomen betrekkingen tusschen de roode en gele vormen op ongekunstelde wijze beschreven worden (fig. 1).

§ 2. Wat de kristallografische eigenschappen dezer verbindingen betreft, zoo mogen in het volgende dan vooreerst de gegevens vermeld worden, welke betrekking hebben op de door Anselmino het eerst verkregen derivaten, welke reeds in 1906 door mij in deze richting werden bestudeerd; door omstandigheden was echter de publicatie der resultaten tot dusverre achterwege gebleven.

Het condensatie-product van *p-homosalicylaldehyde* uit *p-kresol* met *aniline*, het **o-oxy-m-methyl-benzylideen-aniline**:



komt in twee vormen, eene *gele* en eene *roode* modificatie voor, die destijds door H. TRAUBE en F. SCHMELING[1]) in bijzonderheden onderzocht zijn. De *gele*, metastabiel bij 70° C. smeltende modificatie is rhombisch-bipyramidaal, met de assenverhouding: $a:b:c = 0,3732:1:$ $:0,4228$, en de vormen: {010}; {011}; {101}; {102}. Zij is positief dubbelbrekend, en het optische assenvlak is parallel aan {100}. De kristallen splijten volgens {100} en {010}; hun specifiek gewicht bij 17° C. is : $d_{4°} = 1,243$, waaruit voor het moleculairvolume de waarde: 169,75 volgt, en de topische assen op: $\chi : \psi : \omega = 3,8269:$ $:10,2471:4,3322$ berekend worden.

De *roode*, bij 74° C. smeltende modificatie, waarin de gele bij 34° C. overgaat, is monoklien-prismatisch. Aangezien de door den auteur opgegeven assenverhouding *niet* met de meegedeelde hoekwaarden vereenigbaar is, zoo is in het volgende de juiste, uit de metingen berekende assenverhouding dezer monokliene kristallen gebezigd, nl.:

$$a:b:c = 0,2362:1:0,6579,$$
$$\beta = 74°9\tfrac{1}{2}',$$

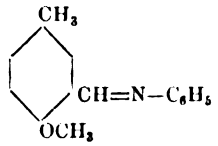
terwijl de optredende vormen de symbolen: {010}, {001}, {110}, en {011} behouden. Bij de sterk pleochroïtische, negatief dubbelbrekende kristallen, staat het optische assenvlak loodrecht op {010}; hunne splijtbaarheid is parallel aan {001} en {010}. Het specifiek gewicht is 1,263 bij 17° C., het moleculair-volume dus: 167,06, en de topische assen worden: $\chi : \psi : \omega = 2,4511 : 10,3770 : 6,8271$. Bij de transformatie van de gele in de roode kristallen, zijn beide modificatie's streng wetmatig ten opzichte van elkaar geöriënteerd op twee bepaalde wijzen, waarbij echter steeds de vlakken van {010} bij beide vormen aan elkaar parallel blijven, — een feit, dat wijst op eene nauwe verwantschap hunner structuren. Merkwaardig echter is, dat de afmetingen in de richting der *b*-assen (als topische verhouding), bij de twee modificatie's, ongeveer gelijk zijn, nl. 10,3, terwijl de vergroeïing van *α*- en *β*-kristallen op {010} òf zóó geschiedt, dat de *c*-as der ééne modificatie samenvalt met de *c*-as der andere, òf de *c*-as van de eerste met de *a*-as der tweede, ofschoon in deze richtingen de grootte der resp. topische assen niet direct vergelijkbaar is.

§ 3. II. o-Methoxy-m-methyl-benzylideen-aniline.

Deze verbinding, aan welke de formule:

---

[1]) F. SCHMELING, Diss. Greiswald, (1905), p. 56, 58.



toekomt, werd uit de voorgaande verkregen met behulp van methylsulfaat bij 40° C. Zij smelt bij 70° C., en kristalliseert uit ligroïne in fraaie, wijngele, zeer doorzichtige platte kristallen.

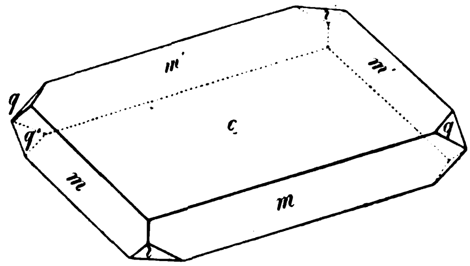


Fig. 2. *o-Methoxy-m-methyl-benzylideen-aniline.*

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 1{,}2792 : 1 : 1{,}0509;$

$\beta = 76° \, 59\tfrac{1}{3}'.$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, groot en glanzend; $m = \{110\}$, goede reflexen gevend, evenals ook $q = \{011\}$; $r = \{\bar{1}01\}$, klein, doch goed meetbaar. De habitus is plaatvormig volgens $\{001\}$.

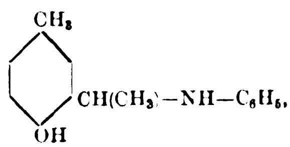
Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend*:
$c : q = (001) : (011) =$ *	45° 39′	—
$c : m = (001) : (110) =$ *	81 54	—
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$ *	102 31	—
$c : r = (001) : (\bar{1}01) =$	44 22	44° 27′

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het specifiek gewicht der kristallen bij 16° C. was: 1,166; het moleculairvolume is dus: 192,96, en de topische parameters zijn: $\chi : \psi : \omega = 6{,}7561 : 5{,}2813 : 5.5502$. De vorm-analogie met de roode modificatie der voorgaande verbinding is onmiskenbaar:

§ 4. III. o-Oxy-m-methyl-α-anilido-aethylbenzol.

Deze verbinding, welke bij 98° C. smelt, werd uit de eerste verkregen met behulp van 2 mol. methylmagnesium-jodide in kokend aetherische oplossing, en ontleding van het gevormde product door water. Zij heeft de formule:



en kristalliseert uit ligroïne in zeer kleine, kleurlooze, bijna recht-hoekig-begrensde plaatjes.

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 0{,}2682 : 1 : 0{,}7254 :$

$\beta = 85^\circ 47'$.

Waargenomen vormen: $b = \{010\}$, sterk overwegend; $m = \{110\}$ en $a = \{100\}$, goed spiegelend. In de zône van $q = \{011\}$, $s = \{012\}$ en $c = \{001\}$, zijn de hoekwaarden meestal niet zoo nauwkeurig meetbaar; $q = \{011\}$ is nog het best ontwikkeld. De habitus is dun-plaatvormig volgens $\{010\}$.

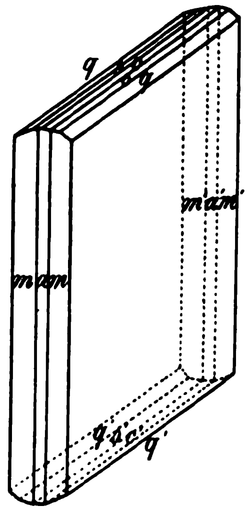


Fig. 3. *o-Oxy-m-methyl-α-anilido-aethylbenzol.*

Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend*:
$b : m = (010) : (110) =$*	75° 1½′	—
$b : q = (010) : (011) =$*	54 7	—
$a : q = (100) : (011) =$*	86 35	—
$a : c = (100) : (001) =$	86 1½	85° 47′
$s : q = (012) : (011) =$	15 56	16 0
$s : s = (012) : (0\bar{1}2) =$	40 3½	39 46½
$m : q = (110) : (011) =$	78 0	77 56
$m : a = (110) : (100) =$	14 58½	14 58½

Splijtbaar volgens $\{001\}$.

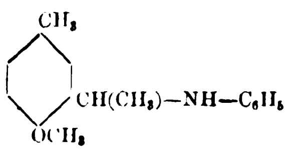
Het specifiek gewicht der kristallen bij 17° C. is: 1,107; het aequivalentvolume dus: 205,06. De topische parameters zijn: $\chi : \psi : \omega = 2{,}7319 : 10{,}1861 : 7{,}3890$.

Op $\{010\}$ is de uitdoovingshoek 43° ten opzichte van de richting der c-as in het achterste quadrant. Waarschijnlijk is het optische assenvlak parallel aan $\{010\}$.

§ 5. IV. o-Methoxy-m-methyl-α-anilido-aethylbenzol.

Uit het correspondeerende benzylideen-aniline met behulp van methylmagnesium-jodide en ontleding met water verkregen.

Deze verbinding, welke de formule



toekomt, en die bij 78° C. smelt, kristalliseert uit ligroïne in groote, kleurlooze, sterk lichtbrekende kristallen van plaatvormigen of

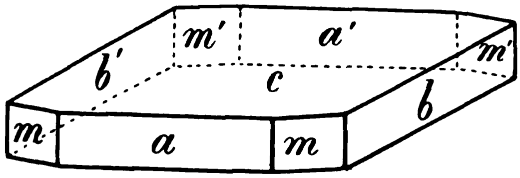


Fig. 4. *o-Methoxy-m-methyl-α-anilido-aethylbenzol.*

prismatischen habitus. Meestal hebben zij echter gekromde vlakken, waardoor de metingen bemoeilijkt worden.

Rhombisch-bipyramidaal.
$a : b = 0{,}3301 : 1.$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$ vóorheerschend; $a = \{100\}$ en $b = \{010\}$, goed spiegelend; $m = \{110\}$, klein, maar goede reflexen leverend.

Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend*:
$a : m = (100) : (110) =$*	18° 16	—
$b : m = (010) : (110) =$	71 44	71° 44′

Alle overige hoeken zijn 90°.

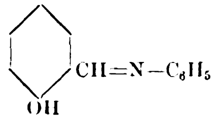
De kristallen splijten goed parallel {100} en {010}.

Het optische assenvlak is {100}, met de *b*-as als eerste bissectrix. De assenhoek is zeer klein, met buitengewoon sterke dispersie: $\rho > v$; de schijnbare assenhoek in olie ($n = 1{,}54$) was voor de roode stralen ongeveer 48°, en voor de violette circa 25°. Op {001} werden oplossingsfiguurtjes verkregen van rechthoekigen vorm, welke in overeenstemming waren met de aangegeven symmetrie der kristallen.

Bij 16° C. was het specifiek gewicht: 1,098; het aequivalent-volume is dus: 219,49.

§ 6. V. o-Oxy-benzylideen-aniline. [1])

Deze verbinding, welke de formule



heeft, en die bij 50°,5 C. smelt, werd verkregen uit salicylaldehyde en aniline.

[1]) Zie ook: L. DUPARC, Ann. der Chemie, **266**, 140 (1891); aldaar is onze vorm *b* als {001} genomen, zoodat de assenverhouding: $c' : b' : a' = 4{,}586 : 1 : 2{,}1922$ wordt. (Bij DUPARC is $a : b$ bij vergissing tienmaal te klein genomen, en zijn *a*- en c-as zijn omgewisseld). Overigens blijken de kristallen identiek te zijn met de onze.

De stof is *dimorf*: zij bezit eene rhombische, minder stabiele α-modificatie, en eene monokliene, in de meeste gevallen optredende β-modificatie, welke beide vormen eene gele kleur hebben.

1. *α-Modificatie.*

Uit ligroïne zet zich deze vorm vaak af als groote, gele, bijna

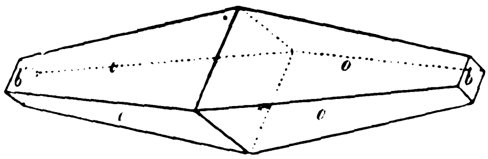


Fig. 5. *o-Oxy-benzylideen-aniline.*
(*α-Modificatie.*)

steeds ondoorzichtige, en afgeplatte bipyramiden.

Rhombisch-bipyramidaal.

$$a : b : c = 0{,}4729 : 1 : 0{,}2188.$$

Waargenomen vormen: $o = \{111\}$, groot, doch slecht spiegelend; $b = \{010\}$, klein, maar goede reflexen leverend. Aan uit methylalkohol verkregen kristallen werd nog een prisma: $m = \{130\}$, waargenomen, hetwelk goed spiegelende vlakken vertoonde.

Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend*:
$o : o = (111) : (1\bar{1}1) =$	* 22°28½′	—
$o : o = (111) : (111) =$	* 48 39	—
$o : o = (111) : (11\bar{1}) =$	125 55	125°47′
$o : b = (111) : (010) =$	78 46	78 46
$m : b = (130) : (010) =$	34 59½	35 11

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het specifiek gewicht dezer kristallen bedroeg: 1,087 bij 16° C.; het aequivalent-volume is dus: 181,23, en de topische assenverhoudingen worden: $\chi : \psi : \omega = 5{,}7005 : 12{,}0539 : 2{,}6375$.

2. *β-Modificatie.*

De boven beschreven kristallen gaan door omkristalliseeren gemakkelijk over in de lange naalden der β-modificatie. Als deze echter weer uit methylalkohol omgekristalliseerd worden, leveren zij wederom de pyramidale kristallen der α-modificatie.

Sterk lichtbrekende, gele naalden.

Monoklien-prismatisch.

$a : b = 2,4641 : 1$;

$\beta = 26° 2\frac{1}{2}'$

Waargenomen vormen: $m = \{110\}$, groot en goed glanzend; $a = \{100\}$, smaller; $c = \{001\}$, goed ontwikkeld. Bovendien worden nog eene negatieve pyramide en een doma opgemerkt, die echter niet meetbaar bleken; vandaar dat c als basis genomen moest worden, ofschoon deze vorm blijkbaar veeleer als een makrodiagonaal doma te beschouwen is.

Hoekwaarden:	*Gemeten*:	*Berekend*:
$m : a = (110) : (100) =^*$	47° 15′	—
$a : c = (100) : (001) =^*$	26 2½	—
$m : c = (110) : (001) =$	52 40	52° 25′

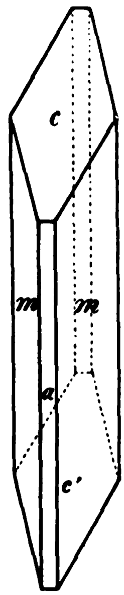


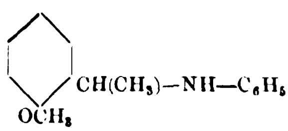
Fig. 6. *o-Oxy-benzylideen-aniline.* (*β-Modificatie*).

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het specifiek gewicht der kristallen bij 17° C. was: 1,184; het aequivalentvolume is dus: 166,38.

§ 7. VI. *α*-Anilido-aethyl-anisol.

Deze verbinding werd uit de vorige verkregen met behulp van methylmagnesiumjodide, enz. Zij heeft de formule:



en smelt bij 46° C.

Uit ligroïne ontstaan zeer slecht gevormde, sterke lichtbrekende naaldjes, die slechts benaderende meting veroorloven.

Rhombisch-bipyramidaal.

$a : b : c = 0,884 : 1 : 0,465.$

Waargenomen vormen: $t = \{110\}$, $m = \{320\}$, $p = \{210\}$, en $n = \{520\}$, alle ongeveer even smal en meervoudige reflexen leverend; $q = \{011\}$, kleiner, en slecht spiegelend. De habitus is langgestrekt parallel de c-as.

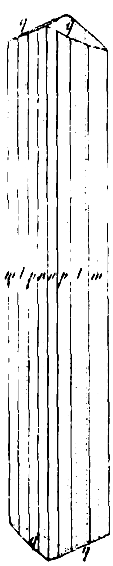


Fig. 7. *Anilido-aethyl-anisol.*

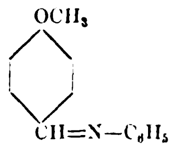
Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$t:t = (110):(\bar{1}10) =$*	97° 4′	—
$q:q = (011):(0\bar{1}1) =$*	49 51	—
$t:m = (110):(320) =$	11 12	11° 0′
$m:p = (320):(210) =$	6 22	6 37
$p:n = (210):(520) =$	8 40	8 31

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet geconstateerd.

Het specifiek gewicht dezer kristallen bedroeg: **1,141** bij 18° C.; het aequivalent-volume is derhalve: 176,16, en de tropische parameters worden: $\chi : \psi : \omega = 6,6649 : 7,5395 : 3,5059$.

§ 8. VII. p-Methoxy-benzal-aniline (*Anisal-aniline*).

De verbinding, aan welke de formule:



toekomt, en welke bij 63° C. smelt, werd verkregen uit anisaldehyde en aniline.

Zij kristalliseert uit ligroïne in kleurlooze, goed ontwikkelde, naar anisol riekende, zeer doorzichtige kristallen.

Monoklien-prismatisch.

$$a:b:c = 1,5745 : 1 : 0,8063;$$
$$\beta = 65°21'$$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, goed ontwikkeld en prachtige reflexen gevende; $q = \{011\}$, $r = \{201\}$, en $o = \{211\}$, alle scherpe spiegelbeelden leverend; $m = \{110\}$ en $a = \{100\}$, ietwat matter, doch goed meetbaar. De vorm a ontbreekt vaak, of is slechts met één vlak ontwikkeld, terwijl o en r veelal zeer smal zijn. De habitus der kristallen is dik-prismatisch, met strekking parallel aan de c-as; zij zijn in het algemeen goed gebouwd.

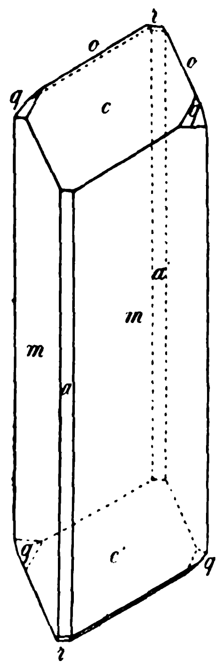


Fig. 8. *Methoxy-benzal-aniline.*

Hoekwaarden;		*Gemeten*:	*Berekend*:
$c : a$	$= (001) : (100) =^*$	65° 21′	—
$c : q$	$= (001) : (011) =^*$	36 14	—
$m : m$	$= (110) : (1\bar{1}0) =^*$	110 6½	—
$c : r$	$= (001) : (\bar{2}01) =$	58 30½	58° 23½
$o : r$	$= (\bar{2}11) : (\bar{2}01) =$	33 57½	33 51
$m : q$	$= (110) : (011) =$	47 18	47 22½
$o : m$	$= (\bar{2}\bar{1}1) : (\bar{1}\bar{1}0) =$	44 7	43 54
$c : m$	$= (001) : (110) =$	76 7½	76 10½
$m : q$	$= (\bar{1}\bar{1}0) : (0\bar{1}1) =$	73 3	73 2¼

Volkomen splijtbaar volgens {001}.

Een, eerst als tweede modificatie dezer stof beschouwde kristallisatie-vorm bleek met de bovenbeschrevene identiek te zijn. Echter is er nog eene werkelijke polymorfe modificatie [1]), die in papierdunne, onmeetbare plaatjes kristalliseert, welke rechte uitdooving hebben, en zich het eerst uit de oplossing afzetten, doch dan snel in de bovenbeschreven kristallen overgaan.

De hier beschreven naalden dooven scheef uit, en wel op m onder een hoek van 22½° met de richting der c-as.

Het soortelijk gewicht der kristallen bij 17° C. was: 1,165; het aequivalentvolume is dus: 181,11.

Topische assenverhouding: $\chi : \psi : \omega = 8{,}4931 : 5{,}3942 : 4.3494$.

Met pogingen, om door condensatie van andere aldehyden en aminen der aromatische reeks nog analoge gevallen van polymorfe SCHIFF'sche basen te verwezenlijken, zijn wij op het oogenblik bezig. Binnen kort hopen wij op deze aangelegenheid nader terug te komen.

Laboratorium voor Anorganische en Fysische
Groningen, Mei 1920. *Chemie der Rijks-Universiteit.*

[1]) H. OTT, Monatshefte f. Chemie, **26**, 340 (1905).

Scheikunde. — De Heer JAEGER biedt, mede namens den Heer BERGER, eene mededeeling aan over: „*De Fotochemische Ontleding van het Kaliumkobaltioxalaat en hare Katalyse door Zouten.*"

§ **1.** Met het voornemen, om de fotochemische werking van rechts- en links-circulair gepolariseerd licht op de optische antipoden[1]) van het *kaliumkobaltioxalaat*: $\{Co(C_2O_4)_3\} K_3 + 3 H_2O$, na te gaan, en te trachten aldus een verschil in reactie-snelheid voor elk der componenten vast te stellen, indien tijdens de proef circulair-gepolariseerd licht van tegengestelden draaïingszin gebezigd werd, — werd door ons eene reeks van proeven begonnen, welke als eene algemeene orienteering ten opzichte van de specifieke eigenaardigheden van dit fotochemische proces bedoeld waren.

Tevens werd daarbij beproefd, of het mogelijk zou zijn, om door toevoeging van bepaalde stoffen aan de oplossing, eene zóódanige reguleering der reactie-snelheid te bewerkstelligen, dat zij zoo gunstig mogelijk werd voor het doel, waarmede deze proefnemingen waren aangevangen. De hierbij verkregen resultaten, die als uitgangspunt voor het verdere onderzoek dienen zullen, zijn in het volgende kortelijks meegedeeld, aangezien zij voor ons aanleiding geworden zijn tot onderzoekingen van meer algemeene strekking.

De fotochemische ontleding van het complexe *kaliumkobalti-oxalaat* geschiedt, als men van bijzonderheden afziet, op overeenkomstige wijze als die van het analoog-geconstitueerde *ferri*-zout: hier ontstaat er, onder afsplitsing van *koolzuur*-gas, een neerslag van het rose gekleurde *kobalto-oxalaat*: CoC_2O_4, terwijl de oplossing daarbij *kaliumoxalaat* gaat bevatten, dat voor een klein gedeelte met het *kobalto*-zout een in verregaanden staat van dissociatie zich bevindend complexzout van de formule: $K_2\{Co(C_2O_4)_2\}$ vormt. De reactie kan globaal door de vergelijking:

$$2\{CoC_2O_4\}_3 K_3 = 2\ CoC_2O_4 + 3\ K_2C_2O_4 + 2\ CO_2,$$

worden uitgedrukt, of, — als men de electrolytische dissociatie van het genoemde complex-zout in aanmerking neemt, — beter nog door de betrekkingen:

---

[1]) F. M. JAEGER, Receuil des Trav. des Chim. d. Pays-Bas, **38**, 247—256, (1919); *idem, Lectures on the Principle of Symmetry and its Applications in All Natural Sciences*, 2nd Edit., Amsterdam, (1920), p. 216, 249, 250, 317.

$$2\{Co(C_2O_4)_3\}''' = 2\{Co(C_2O_4)_2\}'' + C_2O_4'' + 2\,CO_2,$$

en
$$\{Co(C_2O_4)_2\}'' \rightleftarrows Co'' + 2\,C_2O_4''.$$

§ 2. Onder omstandigheden der proefneming, die van de onze zéér sterk verschilden, is de fotochemische ontleding van het *kaliumkobalti-oxalaat* in 1917 door VRÁNEK [1]) voor het eerst systematisch onderzocht. Hij arbeidde met uiterst verdunde oplossingen, wier concentratie tusschen 0,01 en 0,0001 mol. per Liter varieerde, en met zeer kleine volumes der oplossing, — voorwaarden, welke noodzakelijk gemaakt werden door de optische methode, welke door hem bij dit onderzoek gevolgd werd. Maar ofschoon zijne metingen met veel zorg en zoo groot mogelijke nauwkeurigheid uitgevoerd werden, wordt door zijne resultaten toch tenvolle de indruk gewekt, dat men hier met een véél gecompliceerder proces te doen heeft, dan de schrijver schijnt te meenen. Want weliswaar acht hij het op grond der verkregen gegevens waarschijnlijk, dat de reactie, overeenkomstig de bovengenoemde ionen-vergelijking, *bimoleculair* verloopt; maar zijne absorptie-metingen leveren geene getallen, die als werkelijke „reactie-constanten" kunnen gelden, en zij stemmen eigenlijk evenmin met een *mono-*, als met een *bi*moleculair reactie-verloop. Eer zou men hier van eene versnelde bimoleculaire, of wel van eene vertraagde monomoleculaire reactie moeten spreken. Door spectrofotometrische waarnemingen kon hij voorts aantoonen, dat er voor deze smaragd-groene oplossingen twee uitgesproken absorptie-maxima bestaan, nl. bij $\lambda = 4260$ A.E. en bij $\lambda = 6050$ A.E.; verder constateerde hij, dat de reactie ook in het duister plaats grijpt, en dat de belichting dus hoofdzakelijk sterk versnellend werkt; dat voorts de temperatuur-coëfficient der reactie in het duister zéér groot (4.56) is, in tegenstelling met dien der fotokatalyse; eindelijk, dat er bij het meten der bij het belichten van de gemengde oplossingen van *kobalto-* en *kobalti-oxalaat* optredende electromotorische kracht ten opzichte eener normaal-calomel-electrode, in de *geheele* vloeistof een duidelijk BECQUEREL-effect [2]) optreedt. Als storende invloeden constateerde hij: 1°. de, overigens geringe, oplosbaarheid van het gevormde *kobalto-oxalaat* in eene oplossing van *kalium-oxalaat*; 2°. de remming der fotokatalyse door het bij de reactie gevormde *kalium-oxalaat*, welke werking echter bij toenemende concentratie van den katalysator allengs geringer wordt; en 3°. de neiging van het *kobalto-oxalaat*, om oververzadigde oplossingen [3]) te vormen, in plaats van te praeci-

[1]) J. VRÁNEK, Zeits. f. Elektrochem., **23**, 336, (1917).

[2]) Zie ook: T. SWENSSON, *Lichtelektrische Untersuchungen an Salzlösungen*, Inaug. Diss., Upsala, (1919); E. STAECHELIN, Zeits. f. phys. Chemie, **94**, 589, (1920).

[3]) ST. DEAKIN, M. SCOTT en B. D. STEELE, Zeits. f. phys. Chemie, **69**, 126, (1909).

piteeren; tenslotte nog de verdere fotochemische ontleding van het *oxalaat*-ion tot *formiaat*-ion, — eene reactie die, zooals reeds BERTHELOT en GAUDECHON[1]) aantoonden, vooral onder den invloed van stralen van *kleine* golflengten plaats grijpt. Alle deze effecten doen in meerdere of mindere mate hun invloed gelden, en bewijzen wel, hoè gecompliceerd het geheele mechanisme dezer fotochemische ontleding eigenlijk is.

Een katalyseerende invloed van toegevoegde zuren als zoutzuur of zwavelzuur, werd door VRÁNEK onder de door hem gekozen omstandigheden *niet* waargenomen[2]).

§ **3**. Onze proefnemingen werden, in tegenstelling met die van genoemden auteur, met veel geconcentreerder oplossingen van het complexe zout uitgevoerd, terwijl als analyse-methode na vele andere pogingen, tenslotte toch weer tot de directe gravimetrische bepaling van het afgescheiden *kobalto-oxalaat* teruggekeerd werd, dat wij na reductie in een *waterstof*stroom, als metallisch *kobalt* bepaalden. Zelfs bij zeer geconcentreerde oplossingen is de fout, die tengevolge van de geringe oplosbaarheid van het *kobalto-oxalaat* in de *kalium-oxalaat*-houdende vloeistof ontstaat, zóó klein, dat zij tegenover de andere onzekerheden der proef niet in aanmerking behoeft te worden genomen: in het allerongunstigste geval zou eene fout van hoogstens 1.5 °/₀ daaruit kunnen ontstaan.

De groene vloeistof bevond zich in een vat van doorzichtig kwarts, hetwelk door een wijderen kwartsmantel omgeven was; in de ruimte tusschen beide circuleerde een stroom water, hetwelk met behulp eener in een thermostaat geplaatste metalen spiraalbuis op vrijwel constante temperatuur gehouden werd, welke bij onze verschillende proeven tusschen 21° en 23° C. gelegen was. De belichting geschiedde met behulp eener steeds op precies denzelfden afstand (nl. op 140 mM.) zich bevindende kwartslamp (HERAEUS), en werd pas aangevangen, nadat de stroomsterkte en de intensiteit der lamp eene constante waarde hadden aangenomen, terwijl ook overigens steeds onder zooveel mogelijk dezelfde omstandigheden en met hetzelfde vloeistofvolume (50 ccm.) gearbeid werd. Aangezien ook het vaste zout bij het bewaren in het donker zeer langzaam ontleed wordt, bevatte het in de eerste proeven gebezigde preparaat steeds een klein weinigje *kobalto-oxalaat*; na nauwkeurige bepaling daarvan werd de noodige correctie, die trouwens zéér klein was, bij de eerste

[1]) D. BERTHELOT en H. GAUDECHON, Compt. rend. de l'Acad. d. Sc., Paris, **152**, 162, (1911).

[2]) J. VRÁNEK, loco cit., p. 350.

reeks der hier meegedeelde getallen in aanmerking genomen. Door afzonderlijke bepalingen met bekende hoeveelheden *kobalto*-zout werd de nauwkeurigheidsgraad der analyse-methode van te voren bepaald en voldoende groot bevonden. Het dooreenroeren der vloeistof kon door een reguleerbaren stroom *stikstof*gas (circa 4 gasbellen per secunde) bewerkstelligd worden; later geschiedde dit door *koolzuur*gas, nadat bewezen was, dat dit op de reactie-snelheid geen merkbaren invloed had.

Bij de analyse, die in het duister moet geschieden, is het noodzakelijk om *snel* te filtreeren, onmiddellijk uit te wasschen, en alle manipulatie's dadelijk na elkaar uit te voeren. Zoolang er nog moederloog aan het neerslag kleeft, is alle toetreding van het licht, en alle temperatuurverhooging zorgvuldig te vermijden.

Aldus leverde eene eerste reeks proeven de volgende gegevens:

Temperatuur in °C.:	Belichtingsduur in Minuten:	Cecorr. Gewicht v. h. Kobaltizout in 50 ccM.:	Gecorr. Gewicht van het gev. metallische Co:	Percentage van het zout dat omgezet is:
22°3	60′	0.7247 Gr.	0.0634 Gr.	73.34 %
22.2	60	0.9709	0.0665	51.41
22.2	60	1.2124	0.0695	48.05
22.5	60	1.4655	0.9694	39.70
21.7	60	1.7021	0.0686	33.78
21.9	60	1.9434	0.0699	30.16

Neemt men de onvermijdelijke onzekerheden in aanmerking, welke bij de studie van zulk een gecompliceerd proces steeds blijven bestaan, en hecht men niet al te veel beteekenis aan de geringe stijging, welke de eerste vier getallen ten opzichte van elkaar vertoonen, dan is het uit deze getallen wel spoedig duidelijk, dat de in denzelfden tijd omgezette hoeveelheid van het zout blijkbaar *on*afhankelijk is van de beginconcentratie, en uitsluitend bepaald wordt door de hoeveelheid der in dien tijd opgenomon licht-energie. De reactie is dus blijkbaar van de 0e orde, wat sterk voor een zuiver fotokatalytisch karakter van het proces pleit. Wellicht zou men in dit geval tevens verwachten, bij gelijke beginconcentratie eene strenge evenredigheid tusschen belichtingsduur en omzet te zullen vinden. Die gevolgtrekking wordt echter door de ervaring slechts gebrekkig bevestigd; althans in eene tweede reeks proeven, werden de volgende waarden verkregen:

Tempera-tuur:	Belichtings-duur in minuten:	Gecorr. Gewicht van het Kobaltizout:	Gecorr. Gewicht van het gevonden metallische Co:	Percentage van den omzet:
23°2	30′	0. 0803 Gr.	0. 0310 Gr.	26. 4 %
23. 9	45	0. 9017	0. 0357	33. 2
23. 5	60	0. 9902	0. 0511	44. 7

Begrijpelijk wordt dit wel eenigszins, als men bedenkt, dat door de plaatsgrijpende reactie zich het medium fysisch en chemisch voortdurend wijzigt; wegens het verschil, èn in absorptie èn in concentratie aan *kobalti*-zout, resp. *kalium-oxalaat*, kan de werking in b.v. 60 minuten niet aequivalent zijn aan tweemaal die in 30 minuten; enz. Eer moet men zich er over verwonderen, dat in de eerste reeks proeven de uitkomsten nog zoo regelmatig zijn, waar toch de begin-concentratie's onderling sterk verschilden, en daarmede dus ook het absorptie-vermogen der vloeistoffen. Wellicht, dat in deze omstandigheid dan ook de geringe aangroeïing der eerste vier getallen hare oorzaak vindt.

§ 4. Later werden de boven besproken proefnemingen nog weer herhaald, ditmaal met eene extra gereinigde, omgekristalliseerde, en daarna terstond in bewerking genomen hoeveelheid van het *kalium-kobaltioxalaat*. Daarbij werden, met eene minder lichtsterke kwartslamp de volgende gegevens verkregen:

Temperatuur in °C.:	Belichtings-duur in minuten:	Gewicht van het Kobaltizout in 50 ccM.:	Gewicht v. d. hoeveelheid gevonden metallische Co.:	Percentage van het zout, dat omgezet is:
22° ± 1°	60′	0. 750	0. 0567	62. 2 %
id.	60	1. 000	0. 0546	45. 8
id.	60	1. 250	0. 0411	27. 5
id.	60	1. 500	0. 0475	26. 5
id.	60	1. 750	0. 0429	20. 5
id.	60	2. 000	0. 0465	19. 5

Het blijkt uit deze metingen, dat de omzet bij kleinere concentratie's relatief sneller geschiedt dan bij hoogere; dat bij de reactie

toch nog steeds storende invloeden schijnen voor te komen, die aanleiding geven tot onzekerheden in de uitkomsten der analyse; en dat, althans voor de vier laatste getallen, een omzet mag ondersteld worden, die van de totale concentratie weer *on*afhankelijk schijnt. De gemiddelde omzet (ca. 0,0445 Gr. *Co* in 60 min.) is hier maar ongeveer $^2/_3$ van de vroeger gevondene, wat wel in hoofdzaak het gevolg te achten is van de kleinere intensiteit der straling van de gebezigde kwartslamp, en bovendien ook samenhangt met een ietwat gewijzigden vorm van de vaten. Alle deze metingen hebben dus blijkbaar alleen maar *relatieve*, en geen absolute beteekenis.

§ 5. Onderling veel beter vergelijkbare resultaten echter werden verkregen bij de studie van de beïnvloeding der bovengenoemde fotokatalyse door de toevoeging van bepaalde electrolyten. Door voorloopige proeven was het namelijk al spoedig duidelijk geworden, dat, in tegenstelling met VRÁNEK's negatief resultaat bij toevoeging van zuren, bij de door ons gebezigde, geconcentreerde *kobalti*-zout-oplossingen, een opmerkelijk sterke invloed van toegevoegde zouten op de reactie-snelheid kon worden vastgesteld. Daarentegen had eene toevoeging van *alcohol* slechts onbelangrijke uitwerking. Maar met zoutoplossingen treedt zij terstond in uitgesproken mate op, zoodra men als zoodanig zouten van sterke basen of sterke zuren bezigt.

Een katalytische invloed van zulke zouten op fotochemische reactie's, is trouwens ook reeds vroeger aleens geconstateerd, o.a. door JORISSEN en REICHER [1]) bij de fotochemische oxydatie van *oxaalzuur*-oplossingen door vrije zuurstof, en door ROLOFF [2]) bij de EDER'sche oplossing; de laatste vond zelfs één geval, dat van hetzelfde type schijnt te zijn als die, welke hier verderop worden besproken.

Achtereenvolgens werd de invloed nagegaan, die de toevoeging van wisselende hoeveelheden *kalium-*, *natrium-*, en *lithiumchloride* tengevolge had; eene tweede reeks van bepalingen werd daaraan verbonden, waarin op analoge wijze de invloed van *magnesium-*, *beryllium-*, en *ferrichloride* werd bestudeerd. In de keuze der zouten is men beperkt door de voorwaarde, dat alleen de zouten van diè kationen hierbij kunnen gebruikt worden, die met *oxaalzuur* goed oplosbare zouten geven; immers bij geringe oplosbaarheid der betreffende oxalaten zou steeds een deel van het kation door het tegelijkertijd zich vormende *kalium-oxalaat* aan de reactie worden onttrokken. Daarentegen kunnen deze onderzoekingen eventueel nog over de zouten van het *ammonium*, *rubidium*, en *caesium* worden

[1]) W. P. JORISSEN en L. TH. REICHER, Zeits. f. phys. Chemie, **31**, 142, (1899).
[2]) M. ROLOFF, Zeits. f. phys. Chemie, **13**, 327, (1894).

uitgestrekt, terwijl anderzijds allerlei variatie der anionen mogelijk blijft.

Bij alle deze proefnemingen werd steeds geëxperimenteerd met 50 ccm. eener oplossing, die 0.0607 grammolecuul van het (anhydrische) complexzout per Liter bevatte; de geheele inrichting der proef was in alle gevallen nauwkeurig dezelfde, en de belichtingstijd steeds 60 minuten. De temperatuur bedroeg 21° ± 1° C.; de concentratie der toegevoegde electrolyt-oplossingen werd achtereenvolgens van 0.1 normaal tot volle verzadiging gewijzigd. Het gebezigde *kobalti*-zout was met groote zorg gezuiverd, en bevatte zoo goed als *geen kobalto-oxalaat*; geroerd werd met behulp van een stroom *koolzuurgas*, nadat gebleken was, dat de aanwezigheid daarvan geen invloed had op de omzetting.

In het volgende overzicht zijn de aldus verkregen resultaten saamgevat: terwijl in Fig. 1 eene grafische voorstelling daarvan

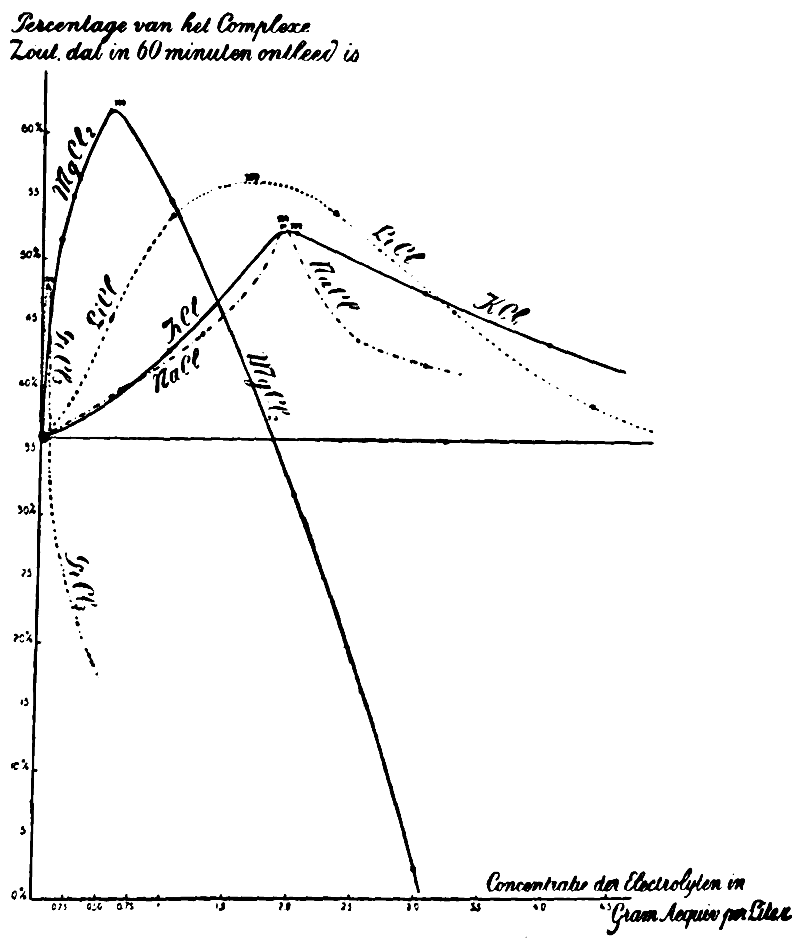


Fig. 1.

I. 50 ccm. eener 0,0607 mol. oplossing van $K_3\{Co(C_2O_4)_3$; KCl als katalysator; belichtingsduur = 60 minuten; temperatuur = 21° ± 1° C.

Gewichtshoeveelheid KCl in Gr. per 50 ccm.:	Concentratie v. KCl in aequiv. per Liter:	Gewicht v. h. gevonden Co:	Gewicht v. het ontlede zout in Gr.:	Percentage van het zout, dat omgezet is:
0	0	0.0648 Gr.	0.4833 Gr.	36.17 %
1.864	0.50	0.0696	0.5196	38.89
3.728	1.00	0.0771	0.5756	43.08
7.456	2.00	0.0935	0.6981	52.24
11.184	3.00	0.0856	0.6391	47.83
14.912	4.00	0.0781	0.5832	43.64
II. Omstandigheden als boven; NaCl als katalysator:				
0	0	0.0648	0.4833	36.17 %
1.829	0.626	0.0715	0.5338	39.95
3.658	1.252	0.0792	0.5913	44.25
5.487	1.878	0.0946	0.7063	52.85
7.316	2.504	0.0783	0.5846	43.75
9.145	3.128	0.0752	0.5614	42.02
III. Omstandigheden als boven; LiCl als katalysator.				
0	0	0.0648	0.4833	36.17 %
1.153	0.543	0.0816	0.6092	45.59
2.306	1.086	0.0962	0.7182	53.75
6.918	3.258	0.0827	0.6174	46.21
9.224	4.344	0.0685	0.5114	38.27
11.530	432	0.0609	0.4547	34.03
IV. Omstandigheden als boven; $MgCl_2$ als katalysator.				
0	0	0.0648	0.4833	36.17 %
0.299	0.125	0.0930	0.6943	51.96
0.599	0.251	0.0988	0.7376	55.20
1.198	0.503	0.1113	0.8310	62.19
2.396	1.006	0.0983	0.7339	54.92
4.792	2.012	0.0567	0.4233	31.68
7.188	3.018	0.0041	0.0306	2.29

gegeven is, waarin de aequivalent-concentratie's der toegevoegde electrolyten als abscissen, de percentage's van het oorspronkelijk aanwezige zout, die omgezet zijn, als ordinaten genomen zijn.

Aansluitend bij deze reeks zijn de bepalingen met $BeCl_2$ en Fe_2Cl_6, welke hier volgen, doch die door nevenomstandigheden, zooals bijv. de sterke hydrolyse van het *beryllium*-zout, wellicht ook komplexvorming in de oplossing van het *ferri*-zout, enz.,. een minder ongestoord beeld van het gedrag geven:

Gewichtshoeveelheid $BeCl_2$ in Gr. per 50 ccm.:	Concentratie van $BeCl_2$ in aequiv. p. Liter:	Gewicht v. h. gevormde Co.:	Gewicht v. het ontlede zout in Gr.:	Percentage van het zout, dat omgezet is:
V. Omstandigheden der proef als boven; $BeCl_2$ als katalysator.				
0	0	0. 0648	0. 4833	36. 17 %
0. 009	0, 004	0. 0383	0. 2859	21. 40
0. 023	0. 011	0. 0536	0. 4002	29. 95
0. 045	0. 023	0. 0511	0. 3815	28. 55
0. 090	0. 045	0. 0404	0. 3016	22. 57
0. 180	0. 090	0. 0332	0. 2479	18. 55
VI. Omstandigheden als boven; Fe_2Cl_6 als katalysator.				
0	0	0. 0648	0. 4833	36. 17 %
0. 035	0. 013	0. 0614	0. 4584	34. 31
0. 087	0. 032	0. 0798	0, 5958	44. 59
0. 119	0. 045	0. 0859	0. 6413	48. 10
0. 174	0. 065	0. 0585	0. 4368	32. 69
1. 044	0. 390	0, 0348	0. 2576	19. 28

§ **6**. Van eene *reactie-constante* is bij geen dezer waarnemingsreeksen sprake: de gegevens stemmen noch met een monomoleculairen, noch met een bimoleculairen reactie-vorm. Daarentegen vertoonen alle kromme lijnen der Fig. 1 een uitgesproken en onmiddellijk in het oog vallend, *analoog* verloop: zij stijgen nl. alle tot een vlakker of steiler *maximum*, om vervolgens weer te dalen. De toevoeging van alle deze electrolyten heeft dus bij kleinere concentraties eene *versnelling* der fotochemische reactie tengevolge, *die voor eene voor elk zout karakteristieke concentratie een maximum bereikt en daarna weer afneemt*; ja, bij enkele zouten gaat zij, bij zelfs niet

eens zoo hooge concentraties, in eene *vertragende* werking over[1]), die bijv. bij het $MgCl_2$, ten slotte practisch tot een *stilstand* der reactie voeren kan.

Eene tweede opmerkelijke omstandigheid is dèze, dat *de maxima bij des te kleiner concentratie liggen, naarmate de valentie van het kation, d. w. z. zijne electrische lading, grooter is*: voor het *twee*-waardige *Mg*-ion ligt het maximum véél meer naar de ordinaat-as heen, dan voor de ionen der *uni*valente *alkali*-metalen, terwijl het maximum der kromme van het *drie*waardige *Fe*-ion vlak nabij de as ligt. Hoe *dichter* de maxima naar de ordinaat-as heen gelegen zijn, des te *steiler* dalen bovendien daarna de betreffende krommen. Dat niet alleen de ionen-ladingen, doch ook *specifieke* eigenschappen der elementen daarbij eene rol spelen, blijkt duidelijk uit de ligging der maxima bij de drie *alkali*-metalen, welke maxima, ondanks de gelijke ionen-ladingen, *niet* samenvallen, maar des te meer naar de ordinaat-as heen liggen, naarmate het atoomgewicht der elementen kleiner is. De concentraties der oplossingen dezer drie electrolyten, voor welke het maximum bereikt wordt, zijn, — grafisch geïnterpoleerd, — voor *LiCl*, *NaCl*, en *KCl* resp.: 1,65 N. aeq., 1,88 N. aeq. en 1,96 N. aequivalenten per Liter, welke concentraties zich dus verhouden als 1: 1,14: 1,18, — getallen, die bijv. weinig verschillen van de verhouding der logarithmen van de bewegelijkheden dezer drie ionen: deze verhouding is in dit geval nl.: $\ln v_{Li} : \ln v_{Na} : \ln v_K = 1 : 1{,}06 : 1{,}17$. Natuurlijk willen wij aan dergelijke relaties geen al te groote beteekenis hechten, aangezien het aantal der waarnemingen nog te klein en de nauwkeurigheid bovendien nog te gering is. Maar wèl willen wij er hier de aandacht op vestigen, dat deze eigenaardigheden der fokokatalyse door zouten blijkbaar in nauw verband moeten staan met de electrische ladingen der ionen, en met de electrostatische wisselwerkingen daarvan op elkander. Mocht de algemeen-geldigheid dezer relaties door een over een veel grooter aantal gevallen van fotokatalyse uitgestrekt onderzoek bevestigd worden, dan schijnt het zelfs niet uitgesloten, dat het mogelijk zal blijken, om op grond van de voorstellingen, welke ter verklaring van het abnormaal gedrag der sterke

[1]) Opgemerkt zij, dat zoowel JORISSEN en REICHER (loco cit.), alsook ROLOFF, gevallen van *positieve* èn *negatieve* fotokatalyse door zouten vermelden, doch *zonder* tot den mogelijken, kenmerkenden vorm der thans hier in *alle* gevallen gevonden krommen te besluiten. In het onderzoek van ROLOFF komt echter één geval voor, dat in overeenstemming is met de hier gevonden gegevens, nl. dat, waar hij KNO_3 als katalysator bezigde, en daarbij inderdaad eene *maximale* werking bij zekere concentratie vaststelde.

electrolyten in de laatste jaren door BJERRUM [1]), GHOSH [2]), NOYES [3]), e. a. ontwikkeld zijn, en die in elk geval een breken met de thans nog haast algemeen geadopteerde voorstelling van ARRHENIUS zouden beteekenen wegens de daarbij gemaakte onderstelling eener *volledige* dissociatie bij zulke electrolyten, — eene theoretische verklaring van de hier gevonden eigenaardigheden dezer fotokatalyse, en meer in het bijzonder van het optreden van eene maximale katalyse, te geven. Wellicht zal op deze aangelegenheid, na een meer gedetailleerd experimenteel onderzoek, door één onzer later nog nader worden teruggekomen.

Laboratorium voor Anorg. en Fysische Chemie der Rijks-Universiteit.

Groningen, Mei 1920.

---

1) N. BJERRUM, Zeits. f. Elektrochemie, **24**, 321, (1918); Zeits. f. anorg. Chem. **109**, 275, (1919).

2) I. C. GHOSH, Journ. Chem. Soc. London, **113**. 449, 627, 707, (1918).

3) A. A. NOYES en MC. INNES, Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 239, (1920).

Scheikunde. — De Heer JAEGER biedt, mede namens den Heer J. H. DE BOER, eene mededeeling aan over: *„Colloïdale Zwavelverbindingen van het Ruthenium."*

§ 1. Bij het verwerken van resten van *ruthenium*zouten werden het eerst verschijnselen waargenomen, welke op de vorming van colloïdale zwavelverbindingen van dit element wezen. De eigenschappen der aldus verkregen colloïdale oplossingen waren merkwaardig genoeg, om de optredende verschijnselen meer in het bijzonder na te gaan. Omtrent de hierbij verkregen resultaten wordt door ons in het volgende bericht.

Wanneer men aan eene *heete* oplossing van een zout van het vierwaardige *ruthenium* [1]), hetzij bijv. aan die van het *sulfaat*: $Ru(SO_4)_2$, of wel aan eene van eene complex-verbinding [2]) als het $\left\{Ru\begin{matrix}(OH)\\(NO)\end{matrix}(NH_3)_4\right\}Br_2$, eene oplossing van versch bereid *zwavelammonium* toevoegt, dan ontstaat er een bruinzwart praecipitaat van RuS_2, dat verder geene bijzondere eigenschappen vertoont. Geheel anders echter is het gedrag dezer stoffen ten opzichte van elkaar, als men de genoemde proef bij *lage* temperaturen, bijv. bij 0° C. uitvoert: onder die omstandigheden toch slaat er een donker, groenzwart praecipitaat neer, terwijl daarboven eene donkergroene, colloïdale oplossing verschijnt. Deze sol is zéér onstabiel; zij wordt snel troebel, en zet dan groenzwarte vlokken af van dezelfde geaardheid als het oorspronkelijke neerslag. De groene oplossing is nl. niet anders dan eene colloïdale oplossing van het oorspronkelijke, door het zwavelammonium teweeggebrachte neerslag; zij vertoont het TYNDALL-effect, en bij de electrische kataphorese blijken de gedispergeerde deeltjes *negatief* geladen te zijn. Als deze sol eenige uren aan de lucht gestaan heeft, is zij geheel en al uitgevlokt, en de bovenstaande vloeistof vertoont dan de gele kleur van de polysulfiden van het ammonium. De groene sol is veel bestendiger, wanneer ze van te voren sterk verdund is; maar ook dàn blijkt zij na een etmaal volkomen te zijn uitgevlokt. Noch de toevoeging van arabische gom, noch die van gelatine, blijken de stabiliteit der colloïdale oplossing te kunnen verhoogen.

---

[1]) U. ANTONY en A. LUCHESSI, Gazz. Chim. It. **28**, (II), 139, (1898).

[2]) A. WERNER, Ber. d.d. chem. Ges., **40**, 2621, (1907).

§ **2**. Wanneer men nu echter zulk eene eenmaal uitgevlokte oplossing gedurende eenige dagen aan zich zelve overlaat, dan wordt de kleur der vloeistof allengs lichtrood; en na nog langer tijd verkrijgt men tenslotte eene min of meer intensief gekleurde, fraai roodviolette oplossing, terwijl er op den bodem een neerslag van fijnverdeelde zwavel overblijft. Een dergelijk verschijnsel treedt op, wanneer men de oorspronkelijke, donkergroene sol tracht te dialyseeren: ook dan krijgt men, na voorafgaande uitvlokking, niet de groene, maar tenslotte een rosa gekleurde oplossing. Deze nieuwe, roode oplossing, waarin dus de oorspronkelijke groene oplossing tenslotte is overgegaan, is eveneens eene sol: zoowel de groene als de roodviolette oplossing toch vertoonen beide het TYNDALL-effect, en onder het ultra-microscoop de structuur en de BROWN'sche bewegingsverschijnselen, welke voor colloïdale oplossingen kenmerkend zijn. Echter blijkt de stabiliteit der roode colloïdale oplossing véél grooter te zijn, dan die van de boven omschreven donkergroene sol. Al spoedig bleek, dat voor de verandering van de onstabiele groene oplossing in de veel stabielere rood-violette, de zuurstof der lucht noodig was; m.a.w. dat men hier met een *oxydatie*-proces te doen heeft, waarbij het uitgevlokte groenzwarte lichaam onder voortdurende zuurstof-opname allengs in oplossing gaat, en daarbij aanleiding geeft tot de vorming van de roodviolette sol. Dat dit werkelijk het geval is, kon door eene reeks van proefnemingen ondubbelzinnig worden aangetoond:

a. Versch, bij 0° C. neergeslagen groenzwart *ruthenium-sulfide* werd eerst met ijskoud water gewasschen, en vervolgens met alcohol en aether gedroogd. Onmiddellijk daarop werd het met gedistilleerd water geschud, waarbij het eene suspensie gaf die oorspronkelijk blauwachtig was, doch waarvan de bovenste laag reeds na 1,5 uur staan aan de lucht eene rosa tint bleek te hebben aangenomen. Na een dag wordt de kleur der oplossing roodviolet, en de hoeveelheid van het neerslag gradueel minder, naarmate de aanraking der stoffen langer duurt. Tevens zet zich wat zwavel af op den bodem van het vat.

b. Versch, bij 0° C. bereid en als boven behandeld groenzwart sulfide werd met water geschud, en voortdurend lucht door de vloeistof heengezogen. Al spoedig werd de oplossing roodviolet, en na eenige dagen is het vaste sulfide geheel verdwenen en slechts wat vaste zwavel overgebleven, die door filtratie gemakkelijk te verwijderen is. Dit is een der beste bereidingswijzen voor de roodviolette sol.

c. Droog groenzwart sulfide verandert bij het liggen aan de lucht

van kleur, en levert eene meer roodachtig gekleurde, donkere massa, die met water geschud, terstond de roodviolette sol oplevert.

d. Een met de groene sol doortrokken stukje filtreerpapier, wordt aan de lucht spoedig violet gekleurd.

Bij afwezigheid van de zuurstof der lucht blijft de verkleuring uit; daarentegen geeft het bij uitvlokken der groene sol ontstane praecipitaat bij het staan aan de lucht tenslotte vanzelf de roodviolette oplossing.

e. Terwijl het in de hitte gepraecipiteerde RuS_2 met salpeterzuur van 1,4 sp. gew. eenvoudig geoxydeerd wordt tot eene bruine vloeistof, wordt het groenzwarte sulfide door salpeterzuur van 1,4 sp. gew. uiterst heftig, haast explosief, aangetast; er ontstaat eene roodviolette oplossing, terwijl bovendien zwavel wordt neergeslagen. De roodviolette oplossing oxydeert, — óók na neutralisatie van het zuur, — zich aan de lucht langzaam verder, waarbij tenslotte onder ontkleuring, eene zure, *sulfaat*-bevattende vloeistof ontstaat. Eene voorafgaande verdunning der roodviolette vloeistof met water, verhindert deze oxydatie onder sulfaat-vorming niet. De aanwezigheid van ook slechts sporen van het groenzwarte sulfide is met behulp der roodkleuring van de bovenstaande vloeistof door oxydatie met salpeterzuur, met zekerheid aan te toonen [1]); op deze wijze kan men zich er bijv. van vergewissen, dat de sulfiden die tusschen 0° en kookhitte uit *ruthenium*-oplossingen door zwavelammonium worden neergeslagen, mengsels zijn van het stabiele RuS_2 en het hier beschrevene groenzwarte sulfide. Men kan daartoe het praecipitaat met water schudden, en aan de suspensie sterk salpeterzuur toevoegen, waardoor de roode kleur terstond te voorschijn treedt.

§ 3. Aangezien het bleek, dat het nieuwe sulfide zijne karakteristieke eigenschappen verliest, wanneer het verhit wordt, — zelfs reeds bij verwarming op 110° C. — zoo moest het, onder zooveel mogelijk uitsluiten van de zuurstof der lucht, steeds bij *lage* temperatuur bereid, en voor de analyse gezuiverd worden. Bovendien ontstaat er bij het praecipiteeren steeds vrije zwavel, — eene omstandigheid, die zich ook bij andere ruthenium-sulfiden doet gelden [2]), en die dus herhaalde extractie van het product met zwavelkoolstof bij lage temperatuur noodzakelijk maakt. Voor de analyse werd

[1]) Vroegere onderzoekers hebben bij hunne studie der *ruthenium-sulfiden* somtijds ook zulk eene rosa-kleuring beschreven; zoo vermelden b.v. U. ANTONY en A. LUCHESSI dit verschijnsel, zonder daarvan echter eenige verklaring te geven. Zie: Gazz. Chimica Ital., **80**, (II), 540, (1900).

[2]) C. CLAUS, Ann. der Chem. u. Pharm., **59**, 245, (1846); U. ANTONY en A. LUCHESSI, Gazz. Chim. Ital. **30**, (II), 539, (1900).

dus het versch bereide groenzwarte sulfide snel in een ERLENMEYER-kolfje gebracht, met zwavelkoolstof overgoten, de lucht door koolzuurgas vervangen, en bij kamertemperatuur een tijdlang geschud. Deze bewerking werd eenige malen herhaald, tot geen zwavel meer afgegeven werd; dan werd de zwavelkoolstof met behulp van een alcohol-aether mengsel verdrongen, en ten slotte met drogen aether nagespoeld, waarna het praeparaat in eene koolzuur-atmosfeer voorzichtig gedroogd werd.

Eene afgewogen hoeveelheid hiervan werd vervolgens in een Rose-kroesje, dat zelf weer in eene nikkelen kroes gehangen werd, voorzichtig aan de lucht geroost, en daarna in een stroom waterstofgas gegloeid. Alle bepalingen geschiedden met de micro-balans.

Analyse: 12,33 m.Gr. groenzwart sulfide leverden 4,26 m.Gr. *Ru*; berekend voor RuS_6: 34,69 °/₀ *Ru*; gevonden: 34,55 °/₀ *Ru*.

Aangezien bij oxydatie van het sulfide, zooals blijken zal, een lichaam met 4 atomen zwavel ontstaat onder afsplitsing van vrije zwavel, is dit gevonden hooge *S*-gehalte alleszins in overeenstemming met het verdere chemische gedrag van het groenzwarte sulfide [1]), dat als een *ruthenium-persulfide* kan beschouwd worden.

§ **4.** Thans dienen wij de eigenschappen na te gaan van de roodviolette sol, welke bij oxydatie van de uitgevlokte groene oplossing ontstaat. Haar brekings-index bleek identiek te zijn met die van het zuivere water; bovendien vertoonde zij, behalve het TYNDALL-effect en de BROWN'sche beweging, buitengewoon fraai het verschijnsel der electrische kataphorese; de gedispergeerde deeltjes blijken, in tegenstelling van die in het groene sulfide-sol, *positief* geladen te zijn. Ofschoon de sol zéér stabiel is en zich zelfs zonder coaguleeren op het waterbad laat concentreeren, zoo kan zij toch door toevoeging van electrolyten, — zij het ook eerst langzaam, — uitgevlokt worden. Het zuivere sol werd met eene kleine hoeveelheid van oplossingen van NH_4Cl, $CaCl_2$, Fe_2Cl_6, K_2SO_4 en Na_2HPO_4 weggezet. Na een dag reeds was er uit elk der verdunde colloïdale oplossingen iets uitgevlokt, terwijl de intensiteit der kleuring was afgenomen. Voegt men meer van de electrolyten toe, dan verdwijnt het reeds uitgevlokte deel eerst weder, maar na een etmaal is er opnieuw eene zekere hoeveelheid neergeslagen. Na een paar dagen is echter de kleur van het sol geheel verdwenen, en alles gepraecipiteerd; het snelst geschiedt dit bij toevoeging van het *fosfaat*, zoodat de lading der anionen hierbij maatgevend bleek, wat in

---

1) Opgemerkt zij nog, dat bij verhitting aan de lucht boven 120° C., ook wat SO_2 ontstaat; een deel van de zwavel is blijkbaar losser gebonden dan de rest.

overeenstemming is met de positieve lading der gedispergeerde deeltjes. Ook werden nog dergelijke proeven gedaan met eene geconcentreerde sol, waaraan $CaCl_2$ toegevoegd werd. Na één dag was er iets uitgevlokt en de kleur violet; na twee dagen meer praecipitaat, en blauwviolette kleur der oplossing; na vijf dagen was de kleur donkerblauw-violet; na veertien dagen evenzoo, en was er nog slechts betrekkelijk weinig praecipitaat gevormd. Eene volkomen uitvlokking gelukte nooit, zoodat deze sol wel als bijzonder bestendig moet beschouwd worden. Dit blijkt trouwens ook duidelijk bij het indampen der colloïdale oplossing; tot op de laatste druppels blijft de blauwviolette kleur behouden, en het roodviolette poeder, dat zich boven den vloeistofrand voortdurend afzet, kan weer terstond in oplossing gebracht worden tot eene colloïdale oplossing van dezelfde geaardheid, als de oorspronkelijke vloeistof. Deze reversibiliteit van het colloïed gaat dus ook hier samen met eene geringere gevoeligheid van zijn sol voor electrolyten. Bij totale indamping verkrijgt men een violet, nevens een grauw gekleurd poeder; alleen het violette is reversibel oplosbaar. Wordt het violette poeder langeren tijd verwarmd, dan wordt het grijs, ten slotte zwart en het laat zich dan niet meer in oplossing brengen. Na drogen bij 110° tot constant gewicht, is het poeder zwart en heeft het metaalglans.

Van dit product werd het *ruthenium*-gehalte op de vroeger beschrevene wijze bepaald; alle deze bepalingen werden eveneens met een micro-balansje verricht.

Analyse: 17,23 mGr. van het poeder bevatten 4,55 mGr. *Ru*. Het zwavelgehalte werd bepaald door eene sol met nauwkeurig bepaald *ruthenium*-gehalte, te titreeren met eene permanganaat-oplossing van bekende sterkte, en vervolgens het ontstane sulfaat als $BaSO_4$ te bepalen. Eene bekende hoeveelheid van het groenzwarte sulfide werd daartoe in water gebracht, en gedurende eenige etmalen met behulp van een luchtstroom geoxydeerd.

Eene hoeveelheid der sol, die 2,40 mGr. *Ru* bevatte, leverde 21,4 mGr. $BaSO_4$, hetgeen beantwoordt aan 2,93 mGr. *S*. Het *zwavel*gehalte was dus 32,18 °/₀, zoodat een *zuurstof*gehalte van 41,42 °/₀ overblijft, — wat voert tot de formule: RuS_4O_{10}, welke later ook op andere wijze bevestigd werd gevonden:

	Berekend voor RuS_4O_{10}:	Gevonden:
Ru:	26,16 °/₀	26,40 °/₀
S:	32,82 °/₀	32,18 °/₀
O:	41,02 °/₀	41,42 °/₀

De oxydatie van het sol tot *rutheniumsulfaat* en *zwavelzuur* kan

op grond van deze en de volgende gegevens worden voorgesteld door de vergelijking:

$$RuS_4O_{10} + 4O = Ru(SO_4)_2 + 2SO_2,$$

welke zoowel door de bepaling van de uit het permanganaat afkomstige en door de verbinding opgenomene zuurstof, alsook door de bepaling van het gevormde zwavelzuur, volledig gecontroleerd en bevestigd werd. Deze laatste hoeveelheid toch is gelijk aan de totaal gevondene hoeveelheid zuur — het voor de titratie van te voren toegevoegde zuur + hoeveelheid zuur, die tijdens het titreeren met $KMnO_4$ verbruikt werd.

Analyse: Eene hoeveelheid sol, die 2,30 mGr. *ruthenium* (= 0,0225 milli-mol *Ru*) bevatte, werd getitreerd met 10 ccm. eener $\frac{1}{25}$ *N.* zwavelzuur en 4,9 ccm. $KMnO_4$ van $\frac{0,09}{5}$ *N.*, als eene normaaloplossing aan 2/5 mol per Liter, of wel aan 0,09 mGr. atoom O per ccm. beantwoorden. Er waren dus in 't geheel verbruikt 0,0882 mGr. O, wat correspondeert met $4O$ op 1 *Ru.* Hierbij zijn tevens 2,65 ccm. zwavelzuur van de bovengenoemde sterkte verbruikt, zoodat 7,35 ccm. zwavelzuur waren overgebleven. Titratie met $^1/_{100}$ *N.* natronloog leerde, dat hiervan 38 ccm. werden verbruikt; daar 7,35 ccm. zwavelzuur van $\frac{N}{25}$ slechts 29,4 ccm. loog verbruiken, is er 0,043 milli-mol H_2SO_4 in de reactie gevormd. Deze proeven leeren dus, dat er op elk atoom *Ru*, twee H_2SO_4 gevormd worden, wat, in verband met de opgenomen quantiteit O aantoont, dat de zoo straks gegeven reactie-vergelijking inderdaad geheel aan deze numerieke gegevens beantwoordt.

§ **5**. Terwijl dus het oorspronkelijke groenzwarte sulfide RuS_6 was, gaat dit, onder gretige zuurstof-opname uit de lucht, en gelijktijdige afsplitsing van vrije *zwavel*, over in het roodviolette Ru_4SO_{10}, volgens de vergelijking:

$$RuS_6 + 5O_2 = RuS_4O_{10} + 2S$$

terwijl de gevormde verbinding dan door het permanganaat verder geoxydeerd wordt volgens:

$$RuS_4O_{10} + 4O = Ru(SO_4)_2 + 2H_2O_4.$$

Het roode colloïed is dus *niet* het eindproduct van de oxydatie van het groenzwarte sulfide, maar het stelt een *tusschenproduct* voor op den weg, welke tot het *rutheniumsulfaat* moet voeren. Ook dit feit kon nog door afzonderlijke reactie's bevestigd worden:

a. Sterk salpeterzuur oxydeert de roodgekleurde sol in de koude langzaam, doch door verhitten sneller, tot eene oplossing, welke vrij-zwavelzuur blijkt te bevatten.

b. Eene kaliumpermanganaat-oplossing doet de kleur van de sol en van het permanganaat snel verdwijnen, terwijl in de oplossing SO_4-ion aantoonbaar wordt.

c. Toevoeging van H_2O_2 en wat verdund zuur doet de oplossing snel ontkleuren, onder vorming van sulfaat.

d. Het roodviolette poeder, dat uit de oplossing van de door lucht geoxydeerde groene sol door verdamping verkregen wordt, levert, na drie weken aan de lucht te hebben gelegen, *geene* roodviolette sol meer, doch eene ietwat groene oplossing, die èn zuur reageert, èn de reactie's op het SO_4-ion geeft.

Deze reactie's bewijzen wel voldoende, dat de roodviolette stof Ru_4SO_{10}, een tusschenproduct is, dat door verdere zuurstofopname overgaat in het sulfaat: $Ru(SO_4)_2$. De verbinding heeft de samenstelling van een normaal *ruthenium*-zout van het *pyrozwaveligzuur*: $H_2S_2O_5$, en wel van een zout, afgeleid van het *vier*waardige *ruthenium*. Aldus verschijnt het *pyrosulfiet* als het tusschenproduct bij de oxydatie van het *ruthenium-persulfide* tot *rutheniumsulfaat*; merkwaardig echter is de colloïdale geaardheid van dit intermediaire *ruthenium-pyrosulfiet,* welks gedispergeerde deeltjes tevens eene electrische lading dragen, tegengesteld aan die van de sol van het oorspronkelijke *persulfide.*

Wellicht is het van belang, hier nog enkele andere reactie's van het colloïdale-*pyrosulfiet* te vermelden:

a. De colloïdale oplossing van het zout wordt door sterk *zwavelzuur* snel ontkleurd.

b. *Zoutzuur*, vooral in grootere concentratie, en bij hoogere temperaturen, doet de oplossing eveneens snel ontkleuren onder vorming van sulfaat.

c. *Bijtende natron* (1 : 3) ontkleurt de sol langzaam, doch verdundere loog doet dit bij kookhitte snel.

d. *Mercuronitraat* doet de kleur terstond verdwijnen; er treedt eene bruine troebeling op, en na eenige uren een bruinzwart neerslag, dat waarschijnlijk *kwiksulfide* is.

e. *Ammoniumsulfide* geeft geen neerslag, doch doet de kleur verdwijnen; *zwaveldioxyde* oefent geene merkbare werking uit.

f. *Zilvernitraat*-oplossing doet de kleur langzaam bruin worden, en er ontstaat een in ammoniak oplosbaar, bruinzwart praecipitaat.

g. Koken der colloïdale oplossing met *soda* veroorzaakt eene snelle verkleuring der sol tot lichtgroen.

h. De geconcentreerde roodviolette sol wordt door toevoeging van een verdund zuur blauw; bij neutralisatie met eene loog keert echter de roode kleur weer terug; enz.

SAMENVATTING.

In het voorgaande werd aangetoond, dat het product van de praecipitatie van een vierwaardig *ruthenium*-zout door *zwavelammonium* verschillend is, al naar gelang der temperatuur: bij kookhitte ontstaat, nevens vrije zwavel, bruinzwart RuS_2, bij 0° C. echter het groenzwarte RuS_4, hetwelk geheel het karakter heeft van een irreversibel colloïed, en bij aanwezigheid van zwavelammonium, eene fraai groene, onbestendige sol geeft. Bij tusschengelegen temperaturen worden, naast vrije zwavel, mengsels van beide sulfiden neergeslagen.

Het groene sulfide en de groene colloïdale oplossing van het RuS_4, welks deeltjes negatief electrisch geladen zijn, nemen gretig zuurstof op, en de oplossing gaat daarbij over in de roodviolette sol van het reversibel colloïdale, positief geladene *ruthenium-pyrosulfiet*: RuS_4O_{10}. Dit wordt op zijne beurt door zuurstof (lucht, salpeterzuur, permanganaat) verder geoxydeerd tot *rutheniumsulfaat* en vrij *zwavelzuur*. De eigenschappen en reactie's van deze verschillende producten werden in hoofdzaak vastgesteld.

Groningen, Mei 1920.

Laboratorium voor Fysische en Anorganische Chemie der Rijks-Universiteit.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER: *„Photochemische reactie en straling"*.

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

EINSTEIN heeft in zijn „Thermodynamische Begruendung des Photochemischen Aequivalentz Gesetzes" [1]) een verband gelegd tusschen photochemische reacties en zwarte straling. Op grond van eenige onderstellingen omtrent het mechanisme der photochemische werking, leidt hij langs thermodynamischen weg met behulp van chemische processen de wet van WIEN af, en daarnaast de photochemische aequivalent stelling — n.l. de energie der straling van frequentie ν in staat een molekuul te splitsen bedraagt: $h\nu$.

Tegen deze afleiding bestaan eenige bezwaren. EINSTEIN laat de temperatuur T_s der straling verschillen van die der materie T, hij mag dus de tweede hoofdwet niet toepassen ter berekening van het evenwicht, het systeem gevormd door materie en straling bevindt zich wel in een stationairen doch niet in een evenwichtstoestand [2]).

Verder is de onderstelling, dat slechts van buiten af invallende straling van frequentie ν aanwezig is met een temperatuur T_s ontoelaatbaar. In de met materie gevulde ruimte toch, waarin een bepaalde temperatuur T heerscht, zal zwarte straling van deze temperatuur aanwezig moeten zijn. Wel is waar zal deze straling slechts een relatief geringe intensiteit bezitten indien T_s aanmerkelijk grooter is dan T, doch in principe mag men haar niet verwaarloozen, daar zij aan materie van de gegeven temperatuur onafscheidelijk verbonden is.

Een laatste bezwaar van minder principieele aard is, dat EINSTEIN niet de voor alle frequenties geldige wet van PLANCK, doch de wet van WIEN als stralingswet verkrijgt. Door een kleine uitbreiding van de onderstellingen, waarvan EINSTEIN is uitgegaan, kan men deze moeielijkheid te boven komen.

Wij zullen in deze mededeeling aantoonen dat men een model van het photochemisch evenwicht kan aangeven, dat thermodynamisch

1) Ann. der Phys. 37, 1912, p. 832.

2) De Heer EINSTEIN die zoo vriendelijk was dit stuk met ons te bespreken deelt deze opvatting.

of statistisch beschouwd, doet zien dat de straling die naast de materie aanwezig is, in den evenwichtstoestand aan de wet van PLANCK moet voldoen.

§ 1. Wij zullen, voor wij er toe overgaan de thermodynamische afleiding van EINSTEIN te wijzigen, een meer kinetische afleiding geven, die zich bij EINSTEIN's afleiding van de stralingswet uit het model van BOHR aansluit. [1])

Wij denken ons een verbinding (1.2) welke zich in de bestanddeelen (1) en (2) splitsen kan ((1.2 $\rightleftarrows$ (1) + (2)). Laat bij de temperatuur T van de stoffen (1.2), (1) en (2) resp. N_{12}, N_1 en N_2 molekulen per volume eenheid aanwezig zijn.

Wij zullen ter vereenvoudiging onderstellen dat stof en straling zich te samen in een volume één bevinden. Laat de energie van een molekule (1 . 2) ε, die van een paar molekulen (1) en (2) ε' zijn.

In den evenwichtstoestand die in een alzijdig gesloten ruimte tusschen molekulen en straling bestaat, geldt voor de aantallen molekulen de wet van MAXWELL-BOLTZMANN, die de betrekking:

$$\frac{N_{12}}{N_1 N_2} = p \frac{e^{-\varepsilon/\theta}}{e^{-\varepsilon'/\theta}} = p\, e^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\theta}}, \quad \theta = \frac{RT}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

oplevert. De grootheid p is van de temperatuur onafhankelijk en gelijk aan de verhouding van de waarschijnlijkheden der toestanden a priori. Voorloopig zullen wij onderstellen, dat slechts de zwarte straling van bepaalde frequentie ν op de stoffen werkt. Over straling van andere frequentie kan onze beschouwing ons dan uitteraard niets leeren.

Wij onderstellen dat de straling van de beschouwde frequentie waarvan de dichtheid ϱ zij, een ontleding der molekulen bewerken kan, en wel zóó dat het per tijdseenheid ontleede aantal molekulen kan worden voorgesteld door:

$$B_1\, \varrho\, N_{12}.$$

Bij de ontleding der molekulen wordt uit de straling de hiertoe noodige energie $\varepsilon'-\varepsilon$ geabsorbeerd.

Een spontane ontleding der molekulen zullen wij niet aannemen. Deze toch kan niet plaats hebben tengevolge van de onderlinge botsingen, daar anders de reactie niet van het bovengenoemde type zou zijn. Een ontleding tijdens het doorloopen van de vrije weglengte past evenmin in ons beeld. Wij hebben namelijk ondersteld dat de molekulen slechts in één toestand voorkomen, er zijn dan slechts twee

[1]) Verh. der Phys. Ges. XVIII, 1916, p. 318.

mogelijkheden: of een molekule (1 . 2) is stabiel en splitst zich dan niet, of het is labiel en dan is de stof (1 . 2) bij de beschouwde temperatuur onbestaanbaar. Wij kunnen ook afzien van de verschillende volgens de quanten theorie mogelijke toestanden van (1 . 2), daar van het bestaan van dergelijke toestanden door nevenreacties rekenschap kan worden gegeven, door ze als aparte stoffen op te vatten. Daar het om het eenvoudigste beeld te doen is, zien wij van de complicaties die hieruit voortkomen af.

De vorming van molekulen (1.2) heeft plaats op twee wijzen:

a. door botsingen onder bepaalde gunstige omstandigheden van moleculen (1) met molekulen (2) worden moleculen (1.2) ook zonder werking van straling gevormd. Het aantal op deze wijze gevormde molekulen is evenredig met het product der aantallen N_1 en N_2 en kan worden voorgesteld door:

$$A_2 N_1 N_2.$$

In deze betrekking is A_2 een van de eigenschappen der moleculen en van de temperatuur afhankelijke factor, die, daar aan het absolute nulpunt het aantal botsingen nul moet zijn, voor de temperatuur nul gelijk aan nul wordt, terwijl deze factor A_2 voor zeer hooge temperaturen met de temperatuur ten hoogste als $\sqrt{T}$ aangroeit, daar het aantal botsingen op deze wijze stijgt en A_2 de temperatuur verder slechts bevat in de kans dat een paar molekulen dat botst, zich vereenigen zal; deze kans kan wel van de temperatuur afhangen doch is ten hoogste gelijk aan één.

b. Tengevolge van de straling kan bij ontmoeting van een paar molekulen binding plaats hebben die zonder invloed der straling niet zou plaats vinden; m. a. w. de straling vergroot de bindingskans der molekulen. Het aantal molekulen dat dientengevolge gevormd wordt bedrage:

$$\varrho B_2 N_1 N_2.$$

Hierin is B_1 een constante. Bij de vorming van molekulen (1.2) wordt in beide gevallen de energie $\varepsilon' - \varepsilon$ uitgestraald.

Gelijk men nu gemakkelijk inziet, is er evenwicht als voldaan wordt aan de betrekking:

$$B_1 N_{12} \varrho = A_2 N_1 N_2 + B_2 N_1 N_2 \varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hieruit vindt men met behulp van (1) voor de stralingsdichtheid ϱ:

$$\varrho = \frac{A_2}{B_1 p e^{\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\theta}} - B_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wij stellen nu den eisch dat deze stralingsdichteid van de frequentie en de temperatuur afhangt volgens de wet van PLANCK.

Stelt men in (3) $\theta = \infty$ dan moet ϱ oneindig worden als de eerste macht van T. A wordt nooit sterker oneindig dan $\sqrt{T}$; dus moet de noemer nul worden en geldt dus de relatie:

$$B_1 p = B_2 \ ^{1)}.$$

Substitueert men dit in (3) dan verkrijgt men:

$$\varrho = \frac{A_2/B_2}{e^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\theta}} - 1} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{\theta}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

of

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3 \frac{e^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\theta}} - 1}{e^{\frac{h\nu}{\theta}} - 1}$$

Daar nu A_2 voor T nul gelijk aan nul moet worden, is het noodzakelijk dat

$$h\nu > \varepsilon' - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De straling die chemisch werkzaam is, moet dus een frequentie hebben die ligt boven een bepaalde frequentie, welke door het energie verschil van den gebonden en den gedissocieerden toestand bepaald is. Deze grens frequentie voldoet aan de Einsteinsche aequivalentstelling, $\nu_0 = \frac{\varepsilon'-\varepsilon}{h}$.

Opgemerkt moet worden dat de straling uitgezonden wordt in de frequentie waarvoor het model gevoelig is, is dit het geval dan is de conditie voor het constant blijven van de stralingsdichtheid vervuld, als die voor de materie vervuld is.

§ 2. Wij kunnen thans nagaan waartoe onze onderstellingen voeren, indien wij de thermodynamische afleiding van EINSTEIN wijzigen in den geest van het hierboven uiteengezette.

Men denke zich in een afgesloten ruimte van de volume eenheid weder materie, als in § 1 in evenwicht met straling van bepaalde frequentie en van de temperatuur T. Een reservoir van groote warmtecapaciteit zal de energie leveren die noodig is, om bij virtueele reactie de temperatuur constant te houden. Wij denken ons de vol-

---

1) Is p_{12} de kans op een gebonden molecuul a priori en $p_1{}^2$ deze kans voor den ongebonden toestand, dan is, daar $p = \frac{p_{12}}{p_1{}^2}$, de gevonden betrekking te schrijven in den vorm $B_1 p_{12} = B_1 p_1{}^2$ die men in woorden aldus formuleeren kan: De kans op den gebonden toestand maal de kans dat deze door straling in den gesplitsten toestand overgaat is gelijk aan de kans op den gesplitsten toestand maal de kans dat deze in den gebonden toestand overgaat.

gende virtueele reactie: Een grammolekule (1.2) wordt omgezet in (1) en (2); de daartoe benoodigde energie wordt aan straling van bepaalde frequentie onttrokken.

Bij dit proces geldt:

$$\delta S_s + \delta S_g = \frac{\delta E_s + \delta E_g}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Vergelijk Einstein l. c. (4), waarbij δS de entropievermeerdering van de straling (s) en de materie (g), δE de resp. energievermeerdering voorstelt.

Verder geldt voor straling van de temperatuur T.

$$\delta S_s = \frac{\delta E_s}{T}$$

zoodat

$$\delta S_g = \frac{\delta E_g}{T} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

m. a. w. de evenwichtsconditie met straling heeft denzelfden vorm die zij zou hebben indien men met de aanwezigheid der straling geen rekening hield. Uit (7) volgt

$$\log \frac{N_1 N_2}{N_{12}} = \frac{1}{R} \Sigma \nu_i \left(c_{\nu i} \lg T + c_i - R - c_{\nu i} - \frac{b_i}{T} \right) \quad . \; . \quad (8)$$

Hierin stellen c_i en b_i de entropie resp. energie constanten voor terwijl c_v de soortelijke warmten en de ν_i de getallen $+1, +1, -1$ aanduiden.

Uit (2) en (8) vindt men —

$$\varrho = \frac{A_2 D T^B e^{-\frac{c}{RT}}}{B_1 - B_2 D T^B e^{-c/RT}}$$

waarin van de afkortingen:

$$\lg D = \frac{1}{R} \Sigma \nu_i (c_i - R + c_{\nu i})$$

$$B = \frac{1}{R} \Sigma \nu_i c_{\nu i}$$

$$C = \Sigma \nu_i b_i$$

is gebruik gemaakt.

Nu moet weder voor $T = \infty$, ϱ oneindig worden als de eerste macht van T. Is nu B grooter dan nul zoo kan men in den noemer B_1 weglaten en wordt ϱ negatief, hetgeen een onmogelijk resultaat is.

Is voor hooge temperatuur B kleiner dan nul dan wordt

$$\varrho = \frac{A_2 D}{B_1} T^B \sim T^{1/2 + B}$$

ϱ wordt dus oneindig ten hoogste van de orde $T^{1/2+B}$, daar D een constante is. Daar nu B negatief ondersteld is, wordt de energiedichtheid niet op de goede wijze oneindig. De eenige mogelijkheid is dus dat B gelijk aan nul is. Daar wij ondersteld hebben dat de inwendige toestand van de moleculen onafhankelijk van de temperatuur is, moet B voor alle temperaturen nul zijn d.w.z. de soortelijke warmten moeten additief zijn.

Wij merken op dat de statistisch mechanische onderstellingen die wij in § 1 gebruikt hebben, van dezelfde onderstelling uitgaan.

Voor hooge temperaturen neemt nu ϱ alleen evenredig met de temperatuur toe indien

$$B_1 = B_2 D.$$

Tenslotte vinden wij voor de stralingsdichtheid

$$\varrho = \frac{\frac{A_2}{B_2}}{e^{c/RT} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

een vergelijking die geheel met (4) overeenkomt en waaruit het resultaat

$$\lambda \nu_0 > (- b_{12} + b_1 + b_2)$$

volgt.

§ 3. In het vorige is ondersteld, dat slechts de straling van een frequentie ν photochemisch werkzaam is. Wij willen ons thans van deze onderstelling losmaken en onderstellen dat er een min of meer breede photochemische resonantie bestaat.

Wij moeten nu de onderstellingen die in § 1 het beeld van het photochemisch proces bepaalden in dezen zin wijzigen.

In de eerste plaats zullen wij onderstellen dat de straling van de frequentie ν per tijdseenheid

$$N_{12}\, \alpha(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu$$

moleculen ontleedt. In deze betrekking is ϱ de dichtheid der zwarte straling van de frequentie ν bij de temperatuur van het evenwicht; $\alpha(\nu)$ is een resonantie functie, die wel de frequentie doch niet de temperatuur bevat; voor scherpe resonantie gaat deze functie in een piek-vormige over.

Wij zullen ons voorstellen dat het aantal molekulen dat zich per tijdseenheid vereenigt zonder werking der straling, gegeven is door

$$A_2 N_1 N_2$$

waarin A_2 weder een temperatuur-functie is.

Tenslotte zullen wij onderstellen dat er door inwerking van de straling

$$N_1 N_2\, \beta(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu$$

verbindingen per tijdseenheid voorkomen. De functie $\beta(\nu)$ is onafhankelijk van de temperatuur.

De toestand der materie is stationair indien

$$N_1 N_2 \left\{ A_2 + \int_0^\infty \beta(\nu)\,\varrho(\nu)\,d\nu \right\} = N_{12} \int_0^\infty \alpha(\nu)\,\varrho(\nu)\,d\nu \quad . \quad . \quad (10)$$

Deze voorwaarden is wel noodzakelijk doch zij is niet voldoende. Wij moeten thans ook op het evenwicht der energie letten. Bij elk der genoemde processen wordt energie uit de straling opgenomen of aan de straling toegevoerd. Voor de processen die door de straling veroorzaakt worden, bezit deze de bepaalde frequentie ν. Omtrent de frequentie van de straling uitgezonden bij de recombinaties kunnen wij niets a priori zeggen. Wij moeten ons voorstellen dat er verschillende door quantenvoorwaarden bepaalde toestanden zijn, waarin bij botsing recombinatie optreden kan, en verder dat de toestand de frequentie der betreffende emissie bepaalt. Daarom zullen wij ons voorstellen dat bij de spontane recombinatie de energie voor

$$A_2\, N_1\, N_2\, \gamma(\nu)\, d\nu$$

gevallen een frequentie tusschen ν en $\nu + d\nu$ bezit.

De functie $\gamma(\nu)$ die men de emissiefunctie kan noemen, kan uit een lijnenspectrum, waarop een continu spectrum gesuperponeerd is, bestaan. Zij kan van de temperatuur afhangen.

Met de zoo ingevoerde onderstellingen zullen wij de evenwichtsconditie voor de energie van elke golflengte opschrijven; zij luidt

$$-N_{12}\,\alpha(\nu)\varrho(\nu)(\varepsilon'-\varepsilon) + N_{12}\,\beta(\nu)\varrho(\nu)(\varepsilon'-\varepsilon) + A N_1 N_2\,\gamma(\nu)(\varepsilon'-\varepsilon) = 0 \quad (11)$$

Integreert men deze vergelijking naar de frequentie over alle mogelijke waarden, dan krijgt men, daar $\int_0^\infty \gamma(\nu)\,d\nu = 1$ is, de materie-evenwichtsconditie terug.

Voor $\varrho(\nu)$ vindt men

$$\varrho(\nu) = \frac{A_2\,\gamma(\nu)}{\dfrac{N_{12}}{N_1 N_2}\,\alpha(\nu) - \beta(\nu)}.$$

Voor $\dfrac{N_{12}}{N_1 N_2}$ gebruiken wij de waarde van § 1, dan wordt de waarde van de stralingsdichtheid:

$$\varrho = \frac{A_2 \dfrac{\gamma(\nu)}{\beta(\nu)}}{p\,\dfrac{\alpha(\nu)}{\beta(\nu)}\,e^{\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{\theta}} - 1}$$

In deze formule zijn α, β en p onafhankelijk van de temperatuur.

Daar voor oneindige T, ϱ oneindig moet worden als de eerste macht van de temperatuur, moet voldaan zijn aan de betrekking:

$$p \frac{\alpha(\nu)}{\beta(\nu)} = 1$$

Dus vindt men:

$$\varrho = \frac{\frac{A_2 \gamma(\nu)}{\beta(\nu)}}{e^{\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\theta}} - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

De aldus gevonden stralings dichtheid moet nu identiek zijn met die voor het zwarte lichaam. Daar A_2 een functie is die tot op zekere hoogte willekeurig gekozen kan worden, kan deze overeenstemming zeker bereikt worden. Wij hebben dus een model dat voor een bepaald frequentie-bereik de zwarte straling doet ontstaan.

Hoezeer echter de formule reeds uiterlijk op de stralingswet gelijkt toch moet de factor $e^{\frac{h\nu}{\theta}}$ uit de grootheid A_2 komen. Wij moeten haar stellen

$$\frac{\frac{A_2 \gamma(\nu)}{\beta(\nu)}}{e^{\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\theta}} - 1} = \frac{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}}{e^{\frac{h\nu}{\theta}} - 1}\,.$$

of

$$A_2 = \frac{8\pi h\nu^3 \beta(\nu)}{c^3 \gamma(\nu)} \frac{e^{\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\theta}} - 1}{e^{\frac{h\nu}{\theta}} - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

Hieruit kan nu een zeer belangrijke conclusie worden getrokken. Voor T gelijk aan nul wordt A weder nul, verder blijft $\gamma(\nu)$ eindig daar $\int \gamma(\nu)\, d\nu = 1$ is, het geval dat er een of meer oneindigheidspunten voor $\gamma(\nu)$ zijn is reeds door de scherpe resonantie der vorige §§ besproken. Opdat nu echter A nul kan worden, is het noodzakelijk dat

$$h\nu > \varepsilon' - \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14a)$$

of stellen wij $h\nu_0 = \varepsilon' - \varepsilon$ dat

$$\nu > \nu_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14b)$$

Er blijkt dus voor een chemische stof die op straling van een aantal frequenties photochemisch reageert, een onderste grens der werkzame frequentie te bestaan die door den aard der stof bepaald is.

Deze uitkomst doet sterk denken aan de uit de ervaring reeds bekende frequentiegrens voor: absorbptie en fluorescentie van Röntgenstralen, bij het photo-electrisch effect en aan de wet van Stokes

voor de fluorescentie; terwijl ook de continue absorptie voorbij den kop van de uiterste ultraviolette reeks een overeenkomstig verschijnsel is. Dit behoeft niet te verbazen daar men op quantentheoretisch standpunt van al deze verschijnselen een analoog beeld kan geven dat tot de analoge conclusies voeren moet. Men kan namelijk de overeenkomstige modellen bij voldoende hooge temperatuur toepassend, uit de werking der dan aanwezige zwarte straling op de materie den grensregel afleiden. Brengt men dan in de materie straling van zekere frequentie en van een dichtheid die aan een temperatuur beantwoordt, welke hooger dan die van de materie is, dan zal het al of niet inwerken er van afhangen, of de frequentie boven of beneden de uit de statistische beschouwing afgeleide grensfrequentie ligt.

§ 4. Wij kunnen nu onze beschouwingen toepassen op het geval dat instraling van buitenaf plaats vindt. In de eerste plaats zullen wij de temperatuur van deze straling aanmerkelijk hooger nemen dan die van het lichaam. Dan mogen wij den invloed der zwarte straling van de temperatuur van het lichaam verwaarloozen.

De in de vorige paragraaf beschouwde evenwichtsvergelijkingen moeten dan door dynamische vervangen worden.

De vergelijking voor de stralingsdichtheid luidt voor dit geval:

$$\frac{d\varrho}{dt} = - N_{12}\, \alpha(\nu)\, \varrho(\nu)\, (\varepsilon' - \varepsilon) + N_1 N_2\, \beta(\nu)\, \varrho(\nu)\, (\varepsilon' - \varepsilon) \quad . \quad . \quad (15)$$

Deze vergelijking geeft de lichtabsorbtie tengevolge van het chemische proces. De materie-vergelijking levert:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\left(A_2 + \int_0^\infty \beta(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu\right) N_1 N_2 + N_{12} \int_0^\infty \alpha(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu \quad . \quad (16)$$

Laat nu de begintoestand $N_1 = N_2 = 0$ $N_{12} \neq 0$ zijn, en zij verder het invallende licht monochromatisch, dan heeft men:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_{12}\, \alpha(\nu) \int \varrho(\nu)\, d\nu = N_{12}\, \alpha(\nu)\, I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

waarin I de intensiteit van den invallenden bundel is. Deze vergelijking levert een middel ter experimenteele bepaling van de functie $\alpha(\nu)$.

Uit (16) volgt voor den stationairen toestand onder den invloed van het invallende licht ontstaande:

$$\frac{N_1 . N_2}{N_{12}} = \frac{\int_0^\infty \alpha(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu}{A_2 + \int_0^\infty \beta(\nu)\, \varrho(\nu)\, d\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Of voor monochromatisch licht

$$\frac{N_1 . N_2}{N_{12}} \frac{\alpha(\nu) I}{A_2 + \beta(\nu) I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (19)$$

Door geschikte metingen kan men met behulp van (19) ook A_2 en $\beta(\nu)$ bepalen. Ten slotte volgt dan $\gamma(\nu)$ uit de betrekking (13) en verder kan p berekend worden uit de betrekking

$$p \frac{\alpha(\nu)}{\beta(\nu)} = 1 .$$

Bij de experimenten moet in de eerste plaats de betrekking $\nu_0 < \nu$ getoetst worden.

Het is niet onwaarschijnlijk dat de emissiefunctie voor verschillende gevallen een analoog gedrag vertoont.

SAMENVATTING.

1. De wisselwerking tusschen photochemische ontleding van een binaire verbinding en straling blijkt te voeren tot een evenwicht waarin zwarte straling bestaat, wanneer aan de materie een aantal min of meer plausibele eigenschappen worden toegekend. Het evenwicht wordt zoowel statistisch mechanisch als thermodynamisch onderzocht, en scherpe resonantie wordt daarbij aangenomen. De frequentie van het werkzame licht moet boven een door de photochemische aequivalentwet bepaalde grensfrequentie liggen.

2. De theorie wordt uitgebreid tot het geval der niet volkomen resonantie. Ook nu kan de zwarte straling met materie in evenwicht zijn voor frequenties die boven een grensfrequentie liggen.

Analoge beschouwingen zijn toe te passen op de absorptie en fluorescentie van Röntgenstralen, het photo-electrisch effect en op de wet van Stokes bij de fluorescentie.

3. De toepassing der theorie op de verschuiving van het evenwicht door straling maakt het mogelijk, de hypothetische grondslagen van onze beschouwingen experimenteel te toetsen. Daarbij zullen resonantie- en emissie-functies der materie gevonden worden.

Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Mei 1920.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan een mededeeling van de Heeren G. HOLST en E. OOSTERHUIS: *„Over de zoogenaamde cyaanbanden.”*

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

Bij het fotografeeren van stikstofspectra treden bijna altijd een aantal banden op, die vroeger [1]) aan cyaan werden toegeschreven. Het meest op den voorgrond tredend zijn de banden gelegen tusschen 3855 en 3883 A.E., en tusschen 4158 en 4216 A.E. Door GROTRIAN en RUNGE [2]) werden in 1914 onderzoekingen verricht, waaruit zij afleidden dat de bedoelde banden stikstofbanden zijn en dus ten onrechte aan cyaan worden toegeschreven. Door latere onderzoekers [3]) wordt veelal hun opvatting als juist aangenomen.

Bij een onderzoek, waarbij het voor ons van belang was, na te gaan, of deze banden inderdaad stikstofbanden zijn, kwamen wij tot de conclusie dat dit niet het geval is, doch dat zij aan een andere stof zijn toe te schrijven, welke veel gemakkelijker condenseerbaar is dan stikstof. Bij onze proefneming bestond de ontladingsbuis uit een cylindrische glazen buis, waarin een electrode was ingesmolten, welke eenzijdig aan een Tesla-transformator was aangesloten. Het gas in de buis was een argon-stikstof mengsel, met ongeveer 15 °/₀ stikstof.

De druk bedroeg ongeveer 55 c.m. In het spectrogram is onder deze omstandigheden geen enkele argonlijn te zien; men vindt slechts het stikstof-bandenspectrum, en de bovengenoemde zoogenaamde cyaanbanden. In figuur 1 is dit spectrum weergegeven. De banden 3855—3883 bevinden zich bij *A*, de banden 4158—4216 bij *B*.

Om nu uit te maken of deze banden aan cyaan dan wel aan stikstof toe te schrijven zijn, hebben wij de onderhelft van de ontladingsbuis in vloeibaren zuurstof gedompeld en verkregen toen de opname van figuur 2. Van de zoogenaamde cyaanbanden is geen spoor meer te zien; blijkbaar zijn deze dus niet aan stikstof doch

---

[1]) Vgl. KAYSER, Handbuch der Spectroskopie. Bd. 5.

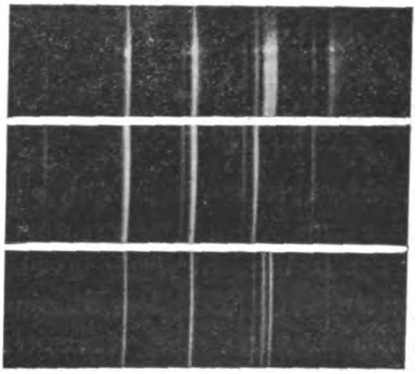
[2]) W. GROTRIAN en C. RUNGE. Phys. Z. S. 15, 545. 1914.

[3]) W. STEUBING. Phys. Z. S. 20, 512. 1919.
L. GREBE und A. BACHEM. Verh. D. Phys. Ges. 21, 454. 1919 en Zeitschr. f. Physik, 1, 51. 1920.

aan een gemakkelijker condenseerbare stof toe te schrijven, zoodat wij waarschijnlijk inderdaad met cyaanbanden te doen hebben [1]).

Dit is ook in overeenstemming met hetgeen in het boven geciteerde artikel van STEUBING vermeld wordt, die bij zijn proeven, waarbij de aanwezigheid van koolstof uitgesloten was, ook geen spoor der cyaanbanden vond. Het is dus waarschijnlijk dat de door GROTRIAN en RUNGE gebezigde stikstof toch niet geheel vrij van koolstof was. De reden hiervan kan misschien daarin gezocht worden, dat zij hun stikstof met behulp van pyrogallol van zuurstof bevrijd hebben, waarbij zich gewoonlijk kleine hoeveelheden kooloxyde ontwikkelen.

A. B.



1.
2.
3.

Eindhoven. *Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.*

---

[1]) Bij enkele onzer opnamen was de ontladingsbuis geheel onder de vloeibare zuurstof gedompeld, en werd door het Dewarglas heen gefotografeerd. De wanden van het Dewarglas lichten dan op onder den invloed van het Teslaveld, en vertoonen daarbij gewoonlijk het groene kathodenstralenlicht. Bij een onzer proeven kwam echter in de ruimte tusschen de twee wanden van het Dewarglas zooveel gas vrij, dat een violette glimontlading optrad, de daarvan afkomstige straling werd dus mede gefotografeerd. Het zoo verkregen spectrogram vindt men in figuur 3 weergegeven. Hierbij deed zich nu het merkwaardige verschijnsel voor, dat behalve de stikstofbanden van figuur 2 enkele der cyaanbanden weder optreden, namelijk 3855, 3883, 4168 A.E. terwijl andere geheel ontbreken. Men moet dus misschien de cyaanbanden nog aan twee verschillende dragers toeschrijven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over de kritische grootheden van kwik in verband met de vergrooting der moleculaire attractie bij dissociatie der dubbelmoleculen*". I.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

1. Reeds tweemaal zijn door mij beschouwingen gepubliceerd [1]) over de kritische grootheden van kwik. Uitgaande van de voor 1 gr. atoom Hg geldende grondwaarde $b_c = 150.10^{-5}$ (berekend uit de dichtheden der *vaste* halogeenverbindingen) en de daaruit voortvloeiende waarde $\sqrt{a_c} = 11.10^{-2}$ (in verband met de kritische temperaturen van genoemde verbindingen), berekende ik voor kwik, aannemende — hetgeen op verschillende wijzen bevestigd wordt — dat deze stof bij T_c geheel of bijna geheel *bimoleculair* is (zie o.a. l. c. p. 1642):

$$T_c = 1260^\circ \text{ abs. } (= 987^\circ \text{ C.}); \; p_c = 192 \text{ atm.}$$

Uit dampdrukwaarnemingen werd de druk, die met $T = 1260^\circ$ abs. correspondeert, < 204 atm. berekend (l. c. p. 1647). Neemt men T_c en p_c beide onbekend aan, dan leveren dezelfde dampdrukwaarnemingen, onder aanname van $\sqrt{a_c} = 2 \times 11.10^{-2}$, voor T_c de waarde 1242° abs., terwijl $p_c = 187$ atm. wordt (l. c. p. 1649).

In het tweede der geciteerde Artikelen maakte ik gebruik van de latere dampdrukwaarnemingen van COLARDEAU en RIVIÈRE (1900), welke tot 880° gaan. Met $b_c = 149.10^{-5}$, $\sqrt{a_c} = 10{,}74.10^{-2}$ (voor 1 Gr. atoom; eveneens uit deze waarnemingen bepaald) berekende ik thans (l. c. p. 1504):

$$T_c = 1172^\circ \text{ abs. } (= 899^\circ \text{ C.}); \; p_c = 180 \text{ atm.},$$

terwijl voor D_c ongeveer 3,3 werd gevonden. Tevens verkreeg ik door een eenvoudige berekening de *zekerheid* dat kwik bij T_c praktisch geheel dubbelmoleculair is (zie p. 1500 l. c.).

Dezelfde waarde $b_c = 149.10^{-5}$ volgt ook uit de grensdichtheid 14,46 bij het absolute nulpunt, wanneer men voor den (gereduceer-

[1]) Zie o.a. Deze Verslagen **24**, p. 1635 (1916); **25**, p. 1498 (1917). Ook Zeitschr. für anorg. Chemie **104**, p. 84 en 126 (1918).

den) richtingscoëfficient γ der „theoretische" rechte middellijn 1,2 aanneemt. [Vroeger (l. c. p. 1641) bepaalde ik voor kwik zelf, $b_c = 120.10^{-5}$ per Gr. atoom, uitgaande van $D_c = 3,77$, door GULDBERG berekend].

2. Het bleek echter hoe langer hoe meer dat de kritische temperatuur van kwik veel hooger ligt dan 900° à 1000° C.

TRAUBE en TEICHNER vonden bij 1000° C. nog geen kritische verschijnselen, terwijl HAPPEL [1]) uit verschillende waarnemingen $T_c = 1370°$ abs. (= 1097° C.), $p_c = 456$ atm. berekende. Dit zou dus slechts 100° hooger zijn dan mijne eerste schatting. W. C. MENZIES [2]) kwam tot 1275° C. (675 atm.), terwijl uit de proeven van KÖNIGSBERGER [3]) duidelijk werd dat de lang gezochte kritische temperatuur boven 1400° C. (1000 atm.) moet liggen. Bij ± 1200° C. werd de miniscus vlak; alleen de vloeistof is lichtend. Beneden 1400° C. vertoonen zich kleine gloeiende druppels, welke uit de vloeistof opstijgen en daarin terugvallen, of zich in den niet-lichtenden damp oplossen. Bij 1400° C. neemt de lichtemissie der vloeistof snel af, en schijnt men de kritische temperatuur nabij te zijn.

Toen kwamen de proeven van Mej. J. BENDER [4]), welke dichtheidsbepalingen van vloeistof en damp tot bij 1400° C. gaf. Bij 1400° C. was de damp nog *geheel doorzichtig*; „de afstand der kwikatomen dus nog groot genoeg opdat het electron zich nog niet van het atoom kan losmaken, en derhalve de electriciteitsgeleiding nog niet kan overnemen". Bij 1500° C. (ééne waarneming) [5]) was nog steeds vloeibaar kwik aanwezig.

Teekent men de waargenomen dichtheden in een T,v-diagram, dan komt men door grafische interpolatie tot $T_c = 1400°$ C. ongeveer of een weinig hooger; derhalve ongeveer 1700° abs. (1427° C.), terwijl dan p_c minstens 1100 atm. zal moeten bedragen. Voor de kritische dichtheid vindt men 4,15 ongeveer. (GULDBERG berekende 3,8).

3. De vraag is nu of deze hooge kritische temperatuur van

---

[1]) Ann. der Ph. (4) **13** (1904), p. 340 en 620.

[2]) Am. Chem. Soc. **35** (1913), p. 1065.

[3]) Chem. Zg. **36** (1912), p. 1321. Zie ook ROTINJANZ en SUCHODSKI, Ann. Inst. Pol. P. le Grand **23** (1915), p. 668.

[4]) Physik. Zeitschr. **16** (1915), p. 246; **19** (1918), p. 410.

[5]) Noch KÖNIGSBERGER, noch mej. BENDER geven duidelijk aan, op welke wijze hunne temperatuurwaarnemingen zijn geschied. Dit blijft m. i. vooralsnog het zwakke punt.

$\pm 1700°$ abs. theoretisch kan gerechtvaardigd worden. Daarvoor is, zooals wij zullen zien, noodig de waarden van b_c en $\sqrt{a_c}$ voor 1 Gr. atoom kwik eenigzins te wijzigen. In plaats van $10^6 b_c = 150$ moet men daarvoor de lagere waarde 120 ongeveer aannemen, terwijl in plaats van $10^2 \sqrt{a_c} = 11$ moet genomen worden 10 ($10^4 a_c$ dus $= 100$ in plaats van 121).

Dat bij een zoo hooge temperatuur als 1700° abs. de waarden van a en b *kleiner* zullen zijn dan die welke bij de kritische temperaturen der kwikhalogeniden zijn bepaald (welke temperaturen in de buurt van 1000° abs. liggen), is eigenlijk wel te verwachten. Want wij weten dat b en a afnemen bij toenemende temperatuur.

Maar er is nog iets anders noodig. Ter verkrijging van een zoo hooge kritische temperatuur en druk moeten de dubbelmoleculen bij T_c tot een gering bedrag gedissocieerd zijn. Aangezien bij deze dissociatie de waarde van a in sterke mate vergroot wordt ($10^2 \sqrt{a_c}$ wordt 40 per Gramatoom der geïsoleerde atomen tegen 10 in de dubbelmoleculen), zoo leert de berekening (welke wij in het tweede gedeelte van dit opstel zullen geven) dat zelfs bij een zeer gering bedrag dezer dissociatie, tengevolge der groote waarde van da/dx, in de formule voor T_c een vrij groote factor zal optreden, welke de waarde van T_c met ongeveer 30°/₀ doet verhoogen, en daardoor die van p_c tot het *meer dan viervoudige* bedrag der oorspronkelijke waarde vermag op te voeren. (Zie ook § 8).

Niet dus omdat door dien geringen dissociatiegraad x de waarde van a_c-zelf merkbaar wordt vergroot en dáárdoor T_c en p_c (welke beide met a_c evenredig zijn) eveneens in dezelfde mate worden vergroot (daartoe is die vergrooting van a_c bij zoo geringe dissociatie veel te gering) — maar omdat tengevolge dezer dissociatie, *in verband met de zeer hooge waarde van* da/dx, de formule welke T_c in a_c en b_c uitdrukt een *factor* verkrijgt, welke een functie is van da/dx, en waardoor T_c met het genoemde bedrag van 30°/₀ bv. wordt verhoogd, al is de dissociatie der dubbelmoleculen slechts gering. En *tengevolge* van dien factor in T_c zal de formule voor

$$p_c = \frac{RT_c}{v_c - b_c} - \frac{a_c}{b_c}$$

een zoodanige wijziging ondergaan, dat p_c daardoor niet met 30°/₀, maar met ruim 300°/₀ wordt verhoogd.

Zoo zijn de buitengewone omstandigheden, aan de kritische temperatuur en druk van kwik verbonden, voor mij de aanleiding geweest tot de uitbreiding mijner vroegere theorie aangaande de

kritische grootheden bij associatie[1]), en wel voor het speciale, zeer belangrijke geval dat a tengevolge der dissociatie der dubbelmoleculen aanmerkelijk wordt vergroot. Volgens mijne jongste onderzoekingen treedt dit geval overal op, waar de dissociatie (zooals bij Hg_2) tot *vrije atomen* voert, voor welke de verhoogde valentie-aantrekkingen zoo enorm veel grooter zijn dan bij de verbindingen[2]).

4. Dampdrukken en waarden der dampdichtheid D_2.

Wij beginnen met de behandeling van het tot dusver bekende experimenteele materiaal. Ter aanvulling daarvan is het echter noodzakelijk bij benadering de waarden van D_2 (de dichtheid van den verzadigden damp) te kennen. Maar daartoe moeten eerst bij benadering de waarden der dampdrukken bekend zijn.

Neemt men de kritische temperatuur $= 1427°$ C. $= 1700°$ abs. aan, en $p_c = 1100$ atm., dan volgt uit de bekende formule

$$log \frac{p_c}{p} = f\left(\frac{T_c}{T} - 1\right)$$

bij 100°, 200°, 300°, 500°, 700° en 880° C., waar p resp. $= 0{,}28$ mm., 17,2 mm., 246 mm., 8 atm., 50 atm. en 162 atm. bedraagt[3]):

$$f_{1,} = 1{,}82 \quad 1{,}81 \quad 1{,}80 \quad 1{,}78 \quad 1{,}80 \quad 1{,}75.$$

---

[1]) Arch. Teyler (2) **11**, 3e Partie (1908), p. 1—96; Deze Verslagen **23** (1914), p. 151. Wij herinneren er aan, dat *door het bloote feit alleen der dissociatie bij* T_c (Δb en Δa dus $= 0$) de waarden van T_c en p_c aanmerkelijk worden verhoogd. Zoo vonden wij dat voor $x = 1/3$ T_c reeds met 10,6%, voor $x = 1/2$ met 11,5%, en voor $x = 2/3$ met 9,9% wordt verhoogd (bij $x = 0$ en $x = 1$ is de factor natuurlijk $= 1$), d. w. z. voor „ideale" stoffen. Voor „gewone" stoffen en voor de gevallen dat bij de associatie bv. Δb niet $= 0$ is, worden deze bedragen aanmerkelijk verhoogd. En wat p_c betreft, zoo worden deze verhoogingen bij ideale stoffen bij dezelfde waarden van x resp. 47,7, 54,3 en 47,6%. Derhalve reeds gemiddeld **50**% tusschen $x = 1/3$ en $x = 2/3$, welk bedrag nog *aanzienlijk wordt verhoogd* bij gewone stoffen en Δb niet $= 0$.

Maar wanneer nu bovendien Δa zoo enorm groot is als bij kwik bv. (vroeger ondersteldеn wij altijd $\Delta a = 0$, wijl wij alleen te doen hadden met stoffen die niet als geisoleerde atomen optreden met de zoo sterk verhoogde valentie-aantrekkingen), dan worden T_c en vooral p_c nog in *veel sterkere mate verhoogd*, al is de waarde van x slechts gering.

[2]) Deze Verslagen **24—26**; vooral **27** (1918), p. 524. Ook Z. f. anorg. Ch. **104**, 56—156 (1918) en J. d. Ch. Ph. **16** (1918), p. 411.

[3]) $p_c = 1150$ atm. in plaats van 1100 atm. zou voor de eerste waarde van f 1,83 geven, voor de laatste 1,80, waardoor het nagenoeg konstante verloop dezer grootheid nog iets beter zou worden. Hoe meer p_c beneden 1100 atm. wordt aangenomen, hoe sterker de ongeoorloofde daling der f-waarden wordt bij stijging der temperatuur. De waarde 1100 atm. kan dus wel als een minimum worden beschouwd, en p_c zal eerder iets grooter dan dit bedrag, dan kleiner gevonden worden. Wij herinneren er aan dat het verloop der waarden van f een scherp

Met $f_{10} = 1,8$ ($f = 4,14$)[1]) en $p_c = 1100$ atm. berekent men dan verder voor de temperaturen boven 880° C.:

	900°	1000°	1100°	1200°	1300°	1400°	1427° C.
$p =$	171	274	410	581	787	1029	1100 atm.

Wij kunnen nu gemakkelijk de waarden van D_2' uit de onderstaande waarden der dampdrukken berekenen, in de onderstelling dat de damp éénatomig is en blijft, en daarenboven de wetten der ideale gassen blijft volgen.

t	p	D_2' (ber.) (ideaal)	D_2 (gev.)	$\frac{D_2 \text{ (gev.)}}{D_2' \text{ (ideaal)}}$
100° C.	0,28 mm.	0,0000	—	—
200°	17,2 „	0,0001	—	—
250°	74,1 „	0,0005	—	—
300°	246 „	0,0014	—	—
350°	670 „	0,0034	—	—
400°	2,06 atm.	0,0076	—	—
500°	8,0 „	0,0253	—	—
600°	22,3 „	0,0624	—	—
700°	50 „	0,126	—	—
800°	102 „	0,232	—	—
900°	171 „	0,356	—	—
1000°	274 „	0,526	0,55	1,05
1100°	410 „	0,730	0,80	1,10
1200°	581 „	0,964	1,15	1,19
1300°	787 „	1,222	1,65	1,35
1400°	1029 „	1,503	2,60	1,73
$T_c = 1427°$	$1100 = p_c$	1,581	$(4,15) = D_c$	2,62

criterium is ter bepaling van den kritischen druk. Deze waarden zijn nl. in de nabijheid der kritische temperatuur altijd stijgende bij temperatuursverhooging; bij gewone stoffen is er een minimum bij $T = \frac{3}{4}\, T_c$ ongeveer; bij stoffen als He, H_2, etc., waar a voortdurend daalt in plaats van toeneemt bij dalende temperatuur, zal ook f voortdurend blijven dalen vanaf T_c tot lagere temperaturen, zonder door een minimum te gaan. (Zie ook Recueil des Tr. Ch., N°. 3 en 5 van 1920).

[1]) Uit deze waarde van f blijkt, dat — tenminste bij temperaturen beneden 1000° C. — kwik zich nagenoeg als een ideale stof gedraagt. (bij dezulken is $f_c = 4$, en beneden T_c is $f < 4$).

De „gevonden" waarden van D_2 zijn grafisch geinterpoleerd uit de navolgende waarden van D_2, door Mej. BENDER bepaald.

	1050°	1210°	1230°	1295°	1330°	1380° C.
$D_2 =$	0,70	1,15	1,35	1,65	1,90	2,50

De „berekende" waarden van D_2 zijn bepaald uit $v_2 = RT:p$ voor 1 Gr. atoom, derhalve $v_2 = \frac{RT}{p \times M} \times 22415$ cM³ voor 1 Gr., wanneer p in atm. is gegeven en $R = 1 : 273.1$ is. Wij hebben dus

$$D'_2 = \frac{p}{T} \times \frac{200,64}{22415 : 273,1} = \frac{p}{T} \times \frac{200,64}{82,08} = \frac{p}{T} \times 2,444.$$

Uit de waarde bij 1000° blijkt dat bij deze temperatuur de damp nog altijd éénatomig is, en de afwijking van de wet van BOYLE nog zeer gering. De afwijking neemt meer en meer toe, en vlak bij de kritische temperatuur zal de damp nagenoeg bimoleculair zijn evenals de vloeistof. Daar D (ber.): D (gev.) bij T_c ongeveer 2,6 bedraagt, zoo zou de afwijking van de wet van MARIOTTE aldaar ongeveer $2,6 : 2 = 1,3$ bedragen. Bij een ideale stof is $s = 2,67$; bij een gewone stof $s = 3,8$ à 4. Wij zien dus dat de normale waarde van s zeer aanmerkelijk wordt verlaagd tengevolge der buitengewoon verhoogde waarde van p_c door de geringe dissociatie der dubbelmoleculen bij T_c. Ook de waarden van v_c en T_c worden daardoor gewijzigd, doch niet in die mate als p_c. Het resultaat is dan ook, dat waar p_c ruim 4-maal grooter is dan de normale waarde bij niet-dissociatie der dubbelmoleculen, s ongeveer 3-maal kleiner zal zijn dan de normale waarde 3,8 à 4, d.w.z. 1,3.

Wij komen hierop in § 8 nog uitvoerig terug.

5. De waarden van D_1 en $D_1 + D_2$.

Thans de waarden van D_1, d.w.z. der vloeistofdichtheden. Hiervoor zijn bij dezelfde temperaturen (waarbij nog drie temperaturen beneden 100° C. zijn gevoegd) de volgende waarden gevonden. Door optelling der boven gevonden waarden van D_2 bij die van D_1 zijn de „gevonden" waarden van $D_1 + D_2$ verkregen. (zie tabel volgende pag.).

De „gevonden" vloeistofdichtheden D_1 boven 350° C. zijn grafisch geïnterpoleerd uit de volgende door Mej. BENDER bepaalde waarden.

	500°	600°	800°	900°	1000°	1100°	1130°	1200°	1270°	1320° C.
$D_1 =$	12,5	12,15	11,6	11,15	10,55	10,0	9,40	8,85	8,25	7,8

Wat de „berekende" waarden van $D_1 + D_2$ betreft: deze werden van 0° tot 350° berekend uit

$$D_1 + D_2 = 13,5956 - 0,0024507\, t + 0,0_62089\, t^2, \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

t	D_1 (gev.)	D_2 (gev.)	$D_1 + D_2$ (gev.)	$D_1 + D_2$ (ber.)
(trip.) — 38°,85 C.	13,6902	—	13,6902	13,6911
0°	13,5956	—	13,5956	13,5956
50°	13,4733	—	13,4733	13,4736
100°	13,3524	—	13,3524	13,3526
150°	13,2327	—	13,2327	13,2327
200°	13,1139	(0,0001)	13,1140	13,1138
250°	12,9957	(0,0005)	12,9962	12,9960
300°	12,8778	(0,0014)	12,8792	12,8792
350°	12,7640	(0,0034)	12,7674	12,7635
400°	12,65	(0,008)	12,66	12,66
500°	12,425	(0,025)	12,45	12,45
600°	12,18	(0,06)	12,24	12,24
700°	11,90	(0,13)	12,03	12,03
800°	11,60	(0,23)	11,83	11,80
900°	11,15	(0,36)	11,51	11,48
1000°	10,55	0,55	11,10	11,12
1100°	9,90	0,80	10,70	10,69
1200°	9,00	1,15	10,15	10,15
1300°	7,80	1,65	9,45	9,46
1400°	6,00	2,60	8,60	8,58
1427°	(4,15) = D_c	(4,15) = D_c	(8,30)	8,30

waarbij de coëfficienten van t en t^2 werden berekend uit de waarnemingen bij 150° en 300° C. Berekende en gevonden waarden stemmen goed overeen; bij 350° begint er een kleine afwijking te ontstaan. Bij —38°,85 is de afwijking nog uiterst gering. De fictieve waarde D_0 bij het absolute nulpunt ($t = -273°,1$) wordt $= 14,2804 = 14,28$ gevonden (indien het kwik alsdan nog vloeibaar ware).

Voor temperaturen boven 350° C. moet aan bovenstaande formule nog een term worden toegevoegd. Daar genoemde formule van 400° tot ongeveer 835° iets te kleine waarden levert, boven 835° daarentegen in steeds sterkere mate te groote waarden, zoo hebben wij vanaf 400° aan (a) den term

$$16{,}4.10^{-6}\left(\frac{t}{100}\right)^4\left[8{,}35-\frac{t}{100}\right]^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

toegevoegd [1]). De berekening leert dat de afwijkingen met de gevonden waarden het geringste zijn, wanneer de exponent van den eersten factor (nl. $t:100$) 4 bedraagt, en die van den tweeden factor $^2/_3$. Elke wijziging in een dezer exponenten geeft onmiddellijk niet alleen grootere, maar *veel* grootere afwijkingen [2]). Ziehier een overzicht van de waarden der beide stukken (a) en (b) van af 400° C.

	(a)		(b)				
400° C.	12,6486	+	0,0112	= 12,6598	= 12,66
500°	12,4225	+	0,0230	= 12,4455	= 12,45
600°	12,2004	+	0,0376	= 12,2380	= 12,24
700°	11,9825	+	0,0490	= 12,0305	= 12,03
800°	11,7687	+	0,0334	= 11,8021	= 11,80
900°	11,5592	—	0,0807	= 11,4785	= 11,48
1000°	11,3538	—	0,2290	= 11,1248	= 11,12
1100°	11,1526	—	0,4598	= 10,6928	= 10,69
1200°	10,9557	—	0,8063	= 10,1494	= 10,15
1300°	10,7627	—	1,3050	= 9,4577	= 9,46
1400°	10,5740	—	1,9985	= 8,5755	= 8,58
1427°	10,5238	—	2,2254	= 8,2984	= 8,30

De eerste tabel laat duidelijk zien dat de aldus berekende waarden uitstekend met de gevonden waarden overeenstemmen. Daar wij den coëfficient $16{,}4.10^{-6}$ van den correctieterm (b) uitsluitend hebben berekend uit waarnemingen tot en met 1300° C., zoo is de overeenstemming bij 1400° des te meer te waardeeren. Wij kunnen dus gerust voor de kritische dichtheid de berekende waarde $8{,}30:2=4{,}15$ als juist aannemen.

6. De waarde van $D_1 - D_2$ dicht bij T_c, en die van γ bij verschillende temperaturen.

Wij hebben nog een middel ter contrôle van de benaderde juist-

[1]) Beneden 400° is de correctieterm (b) niet meer geldig. Voor 300° zou deze + 0,0041, voor 200° + 0,0009 en voor 100° + 0,00006 leveren, welke waarden te groot zijn.

[2]) Wij merken nog op, dat ondersteld wordt dat de exponent $^2/_3$ het teeken van $8{,}35 - {}^t/_{100}$ niet beïnvloedt, zoodat dit voor $t > 835°$ negatief blijft.

heid der waarden van D_1 en D_2 bv. boven 900°, en van die der aangenomen kritische temperatuur (1427° C.), nl. in de empirische wet dat beneden T_c (evenwel *niet onmiddellijk* beneden T_c, waar $D_1 - D_2 \because \sqrt{1-m}$ is)

$$D_1 - D_2 = C \sqrt[3]{1-m}$$

bij benadering geldt, zoodat $(D_1 - D_2)^3$ met $1-m$, d.w.z. met $T_c - T$ evenredig is ($m = T : T_c$). Nu is bij

	1000°	1100°	1200°	1300°	1400°
$D_1 - D_2 =$	10,0	9,1	7,85	6,15	(3,40)
$(D_1 - D_2)^3 =$	1000	754	484	233	(39)

zoodat de vier eerste waarden van $(D_1 - D_2)^3$ zich globaal verhouden als 4 : 3 : 2 : 1, wat voor T_c de waarde 1400° C. zou geven.

De overeenkomstige waarden van $(D_1 - D_2)^2$ verhouden zich als 100 : 83 : 62 : 38 (: 11,6), d.w.z. als 5 : 4 : 3 : 2 ongeveer, hetgeen op $T_c = 1500°$ C. zou wijzen. En daar nu (uitgezonderd vlak bij T_c) de $\sqrt[3]{}$-wet eerder is vervuld dan de $\sqrt[2]{}$-wet, zoo zal T_c dichter bij 1400° dan bij 1500° gelegen zijn — in overeenstemming derhalve met onze aanname (1427°). Een kritische temperatuur hooger dan 1500°, zooals uit een paar opgaven van mej. Bender zou volgen, is m.i. in strijd met hare eigen waarnemingen aangaande D_1 en D_2.

Neemt men ten opzichte der theoretisch dicht bij T_c geldige $\sqrt[2]{}$-wet de beide laatste waarden van $(D_1 - D_2)^2$, nl. 38 en 11,6, als maatstaf aan, dan zou daaruit voor T_c ongeveer de waarde 1440° C. volgen.

Gaan wij nu nog even den (gereduceerden) richtingscoëfficient der zg. rechte middellijn na. Voor het totale verloop tusschen het absolute nulpunt en de kritische temperatuur vindt men blijkbaar $2(1+\gamma) = 14,28 : 4,15 = 3,44$, derhalve $1 + \gamma = 1,72$, $\underline{\gamma = 0,72}$. Maar dit bedrag is alleen aan het laatste stuk tusschen 1000° C. en T_c toe te schrijven, waar — tengevolge der toenemende associatie in de dampfase — de rechte middellijn na haar nagenoeg lineair verloop tusschen —40° en + 1000° C. plotseling een merkbare kromming begint te vertoonen naar de zijde der groote volumina.

Wat het genoemde gedeelte beneden 1000° betreft (waar de dampfase nog absoluut zonder invloed is), zoo vindt men daar bv. tusschen 0° en 300° C.:

$$2\gamma = \frac{13,5956 - 12,8792}{300} \times \frac{1700}{4,15} = 0,9782,$$

dus $\gamma = 0,489 = \underline{0,49}$.

En tusschen 0° en 1000° C. is

$$2\gamma = \frac{13,5956 - 11,1248}{1000} \times \frac{1700}{4,15} = 1,012,$$

derhalve $\gamma = 0,506 = \underline{0,51}$, nagenoeg gelijk aan de waarde tusschen 0° en 300° C. De waarde $\underline{\gamma = 0,5}$ is die welke aan „ideale” stoffen toekomt, d.w.z. stoffen met a en b onveranderlijk (hoofdzakelijk b geen functie van v). Wij zagen reeds boven dat beneden 1000° C ook de waarde van f (nl. 4,1) op het quasi-ideale gedrag wijst van kwik bij die betrekkelijk lagere temperaturen.

7. Algemeene formules voor v_c, T_c, p_c en s.

Is v_c het kritisch volume (in normale eenheden uitgedrukt) van 1 Gr. atoom, dan is

$$D_c = \frac{200,64}{22415\, v_c},$$

derhalve met $D_c = 4,15$:

$$v_c = rb_c = \frac{200,64}{22415 \times 4,15} = \underline{0,002157} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De waarde van b_c zal dus bij gegeven D_c alleen van r afhangen. Is bv. $r = 2$, dan zou $b_c = 108.10^{-5}$ zijn, maar mocht $r = 1,8$ zijn, dan werd $b_c = 120.10^{-5}$.

Voor T_c geldt de betrekking $RT_c = \frac{8}{27} \frac{a'_c}{b'_c} \times \theta$, derhalve

$$\underline{RT_c = \frac{8}{27}\, n\, \frac{a_c}{b_c} \times \theta}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin a_c en b_c op 1 Gr.-atoom (200,6 Gr. kwik) betrekking hebben, zoodat in werkelijkheid $a'_c = n^2 a_c$ en $b'_c = nb_c$ is, wanneer $n = 2 : : (1 + x)$ den associatiefactor [1]) voorstelt.

In normale gevallen ($n = 1$ of 2) is θ een factor iets kleiner dan de eenheid, die wij destijds door λ hebben voorgesteld. (Is bv. $r = 2$, dan vindt men voor λ de waarde $^{27}/_{28}$, terwijl bij „ideale” stoffen ($r = 3$) $\lambda = 1$ wordt).

---

1) Uit 1 enkelvoudig molecuul (of atoom) $= \frac{1}{2}$ dubbelmolecuul komen nl. bij dissociatie van dit laatste $\frac{1}{2}(1-x) + \frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(1+x)$ moleculen voort. Deze nemen dus (contractie niet mede gerekend; deze is in den factor θ in rekening gebracht) het moleculairvolume b_c in, zoodat ieder molecuul gemiddeld het volume $b'_c = b_c : \frac{1}{2}(1+x) = b_c \times 2 : (1+x)$ inneemt. Is de dissociatiegraad x der dubbelmoleculen $= 0$, dan is $n = 2 : (1+x) = 2$, dus $b'_c = 2b_c$ (alle moleculen zijn dan dubbelmoleculen). En is $x = 1$ (alle moleculen enkelvoudig), dan is $n = 1$ en $b'_c = b_c$. En hetzelfde geldt t. o. v. $\sqrt{a}$ en v.

Maar in alle gevallen van associatie ($n > 1 < 2$) zal θ een functie zijn van x, en daarenboven van de eventueele contracties Δb en $\Delta\sqrt{a}$. Zooals wij boven opmerkten, kan die factor vrij groot worden, b.v. 1,3.

Voor p_c vinden wij uit $p_c = \dfrac{RT_c}{v'_c - b'_c} - \dfrac{a'_c}{v'^2_c}$ na substitutie der bovenvermelde waarde van RT_c, en van $v'_c = nv_c$, $b'_c = nb_c$, $a'_c = n^2 a_c$:

$$p = \frac{1}{27}\frac{a_c}{b_c^2}\left[\frac{8\theta}{r-1} - \frac{27}{r^2}\right] = \frac{1}{27}\frac{a_c}{b_c^2} \times \pi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wanneer nog v_c door rb_c wordt vervangen. In $r = 2$, dan wordt de factor π dus $= \dfrac{8 \times {}^{27}/_{28}}{1} - \dfrac{27}{4} = 27 \times ({}^2/_7 - {}^1/_4) = {}^{27}/_{28}$ evenals θ, de factor van RT_c — d.w.z. in de normale gevallen ($n = 1$ en 2). En is alsdan $r = 3$, waarbij $\theta = 1$ is, dan wordt ook $\pi = \dfrac{8}{2} - \dfrac{27}{9} = 1$.

Maar bij $n > 1 < 2$ zal π wederom een functie zijn van x, Δb en $\Delta\sqrt{a}$, en in het algemeen veel grooter dan θ zijn. Is b.v. $\theta = 1{,}363$ (zie § 8), $r = 2$, dan wordt $\pi = 10{,}91 - 6{,}75 = 4{,}16$, zoodat π ruim drie maal grooter is dan θ. De kritische druk zal alsdan $4{,}16 \times \dfrac{28}{27} = $ 4,3-maal grooter zijn dan de normale waarde bij $r = 2$, wanneer er geen associatie aanwezig is, en $\pi = \theta = \lambda = {}^{27}/_{28}$ bedraagt [1]).

Uit (1), (2) en (3) volgt nu verder met $v'_c = nv_c = n \times rb_c$:

$$s' = \frac{RT_c}{p_c v_c'} = \frac{8}{r} \times \frac{\theta}{\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin $s' = s : n$ is (waarbij dus s betrekking heeft op v_c per Gr.-atoom). Wij vinden nu niet $rs' = 8$ als in normale gevallen — maar

$$rs' = 8 \times \frac{\theta}{\pi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

waarin $\theta : \pi$ in sommige gevallen (zie boven) ${}^1/_3$ kan bedragen. Daardoor zal s' dan ook van 4 (de normale waarde bij $r = 2$) tot $4 : 3 = 1{,}3$, d.w.z. tot *het derde* dezer normale waarde, kunnen worden

---

[1]) Wij vonden vroeger dat in normale gevallen $\theta = \pi$ was. Dan is dus $\theta = \dfrac{8\theta}{r-1} - \dfrac{27}{r^2}$, waaruit $\lambda = \theta = \dfrac{{}^{27}/_{r^2}}{8 : (r-1) - 1}$. Vervangt men hierin r door $(1+\gamma) : \gamma$, waarin γ de gereduceerde richtingscoëfficient der rechte lijn tusschen D_c en ${}^1/_2 D_0$ voorstelt in een D,T-diagram, dan vindt men de door mij afgeleide formule $\lambda = \dfrac{27}{8\gamma - 1}\left(\dfrac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2$ terug. Voor $r = 3$ ($\gamma = 0{,}5$) is $\lambda = 1$, en voor $r = 2$ ($\gamma = 1$) wordt $\lambda = {}^{27}/_{28}$.

teruggebracht. (Zie de tabel in § 4, waar wij voor D_c (gevonden): $:D_c$ (MARIOTTE) de waarde $2,62:2=1,31$ vonden, wanneer n praktisch $=2$ is bij T_c). De groote verlaging van s' is dus bijna uitsluitend te danken aan de buitengewoon groote verhooging van p_c bij betrekkelijk weinig veranderde waarde van T_c en van v_c (deze laatste tengevolge eener geringe wijziging in de waarde van r).

8. Berekening van θ en π, en van a_c en b_c uit de gegeven waarden van T_c, p_c en v_c.

Is nu $T_c=1700$ (abs.), p_c: 1100 (atm.) en $v_c=215,7.10^{-5}$ volgens (1), dan vindt men voor $s'=s:n$ de waarde (zie ook de tabel in § 4; ondersteld dus dat n bij T_c niet ver van 2 verwijderd is)

$$s'=\frac{1700:273,1}{1100\times 215,7.10^{-5}}:2=1,312\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Uit (4^a) volgt dan voor θ, den coëfficient van RT_c, uit

$$rs'=\frac{8\theta}{\frac{8\theta}{r-1}-\frac{27}{r^2}}$$

de waarde

$$\theta=\frac{27}{8r^2\left(\frac{1}{r-1}-\frac{1}{rs'}\right)}=\frac{27\,s'}{8r\left(\frac{rs'}{r-1}-1\right)}\ .\ .\ .\ .\ (b)$$

Met $s'=1,312$ vindt men daaruit de volgende waarden bij verschillende waarden van r.

$r=2$	1,9	1,8	1,7
$\theta=1,363$	1,317	1,260	1,191

De factor θ wordt dus kleiner naarmate r kleiner wordt aangenomen, hetgeen ook onmiddellijk uit de formule (b) volgt, wanneer slechts $r<3,05$ is, hetgeen natuurlijk steeds het geval is. Ook blijkt uit (b) dat θ kleiner wordt als $n<2$ mocht zijn, want dan wordt $s'=s:n$ grooter.

Voor den factor π bij p_c wordt alsnu gevonden:

$$\pi=\frac{8\theta}{rs'}=\frac{27}{r^2\left(\frac{rs'}{r-1}-1\right)},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (c)$$

gevende

$r=2$	1,9	1,8	1,7
$\pi=4,156$	4,226	4,268	4,274

De factor π wordt derhalve grooter met afnemende r, zoolang $r>1,74$ ($\pi=4,277$) blijft. Bij kleinere waarden van r neemt π weer toe.

Aangezien nu $\theta = 1,36$ wel wat groot is, zoo zal bij kwik $r = v_c : b_c$ bij de kritische temperatuur wel in de nabijheid van 1,8 à 1,7 liggen [deze verlaging is — zooals wij in het theoretische slotgedeelte zullen zien — mede een gevolg van den zij het ook geringen dissociatiegraad der dubbelmoleculen bij T_c, zoodra Δa groot is]. θ is dan 1,2 à 1,25 en π in de buurt van haar maximumwaarde 4,28.

Gaan wij nu de waarden van a_c en b_c na, welke met de aangenomen kritische gegevens ($T_c = 1700°$ abs., $p_c = 1100$ atm., $v_c = 215,7 . 10^{-5}$) bij verschillende waarden van r correspondeeren.

Uit $RT_c v_c = \frac{8}{27} n r a_c \times \theta$ volgt $a_c = \frac{27}{8} RT_c v_c : nr\theta = \frac{27}{8} \times 134,3 . 10^{-4}$: $: nr\theta$, zoodat $\underline{10^4 a_c = 226,6 : r\theta}$ wordt, wanneer $\underline{n = 2}$ is.

Wat b_c betreft, hier is eenvoudig $b_c = v_c : r$; dus $\underline{10^5 b_c = 215,7 : r}$.

Dit geeft de volgende waarden van a_c en b_c.

$r =$	2	1,9	1,8	1,7
$10^5 b_c =$	107,9	113,5	119,8	126,9
$10^4 a_c =$	83,13	90,57	99,91	111,9
$10^2 \sqrt{a_c} =$	9,12	9,52	10,00	10,58

Wij zien hieruit dat met $r = 1,8$ — beantwoordende aan den met den verhoogden kritischen druk en temperatuur correspondeerenden geringen dissociatiegraad — ongeveer overeenstemmen $10^5 b_c = 120$, $10^4 a_c = 100$ (per Gr.-atoom). $\sqrt{a}$ is dan iets kleiner dan de uit de kwikhalogeniden bij ongeveer 1000° C. bepaalde waarde, nl. $10 . 10^{-2}$ in plaats van $11 . 10^{-2}$.

Met deze waarden van a_c en b_c zullen wij nu ten slotte bij wijze van controle de waarden van T_c en p_c terugberekenen bij *twee* onderstellingen.

In de *eerste plaats*, dat kwik bij de kritische temperatuur *niet* gedissocieerd ware, d.w.z. uit louter dubbelmoleculen bestond ($x = 0$, $n = 2$). Onderstellen wij dat alsdan $r = 2$ zou zijn, dan ware dus in dit geval $v_c = rb_c = 2 \times 119,8 . 10^{-5} = \underline{239,6 . 10^{-5}}$ (per Gr.-atoom).

Verder $RT_c = \frac{8}{27} \times 2 \times \frac{99,91 . 10^{-4}}{119,8 . 10^{-5}} \times \frac{27}{28}$, daar met $r = 2$ overeenstemt $\theta = \lambda = \frac{27}{28}$ (zie boven), derhalve $RT_c = 4,766$, $\underline{T_c = 1302°}$ abs.

Voor p_c wordt dan gevonden

$$p_c = \frac{1}{27} \frac{99,91 \,.\, 10^{-4}}{143,5 \,.\, 10^{-8}} \times \frac{27}{28} = 248,6 = \underline{249 \text{ atm.}}$$

Dit zouden dus met de thans aangenomen waarden van a_c en b_c de kritische temperatuur en druk zijn van volkomen ongedissocieerd *Hg*, bij het kritische punt. Zij zouden voor de waarde van $s' = RT_c : p_c v'_c$ met $v'_c = 2v_c$ geven $s' = \frac{4,766}{248,6 \times 479,2 \,.\, 10^{-5}} = \underline{4,00,}$ welke waarde behoorlijk met $r = 2$ correspondeert.

Ook aan de toestandsvergelijking wordt natuurlijk identiek voldaan. Immers voor $\frac{a_c}{v_c^2}$ berekent men $\frac{99,91 \,.\, 10^{-4}}{574,1 \,.\, 10^{-8}} = 1740$ atm., zoodat $v'_c - b'_c = RT_c : (p_c + a_c/v_c^2)$ wordt:

$$2\,(239,6 - 119,8)\, 10^{-5} = \frac{4,766}{248,6 + 1740,3} = 0,002396,$$

d. w. z. $239,6 \,.\, 10^{-5} = 239,6 \,.\, 10^{-5}$.

Hierbij zij opgemerkt, dat ook behoorlijk $a_c/v_c^2 = (f_c - 1)\, p_c = 7p_c$ is, aangezien met $r = 2$ overeenstemt $f_c = 8$.

Maar al deze waarden worden totaal gewijzigd, zoodra slechts, in de *tweede plaats*, de geringste dissociatie der dubbelmoleculen bij T_c aanwezig is (hetgeen wij in het tweede gedeelte van dit opstel nader theoretisch zullen ontwikkelen).

Onderstellen wij voor het gemak dat alsdan $n = 2$ blijft (x zal wellicht 0,01 bedragen, zoodat $n = 2 : (1 + x)$ eigenlijk 1,98 zou worden, maar wij hebben boven bij de berekening van θ en π ook $n = 2$ gelaten), en verder dat in dit geval tengevolge der geringe dissociatie bij T_c de waarde van r in plaats van 2 nu 1,8 zou geworden zijn (ook dit zal in het tweede gedeelte nader worden toegelicht), dan wordt $v_c = 1,8 \times 119,8^3 \,.\, 10^{-5} = \underline{215,7 \,.\, 10^{-5}}$. Verder met $\theta = 1,260$ en $\pi = 4,268$ (zie boven) $RT_c = 6,228$, $\underline{T_c = 1700° \text{ abs.}}$, $\underline{p_c = 1100 \text{ atm.}}$, zijnde dus alle de waarden, waarvan wij zijn uitgegaan ter berekening der factoren θ en π, en welke voor $s' = \frac{6,228}{1100 \times 431,4 \,.\, 10^{-5}}$ de waarde 1,312 zullen teruggeven.

De waarde van T_c is derhalve $\frac{28}{27} \times 1,26 = \underline{1,31}$-maal grooter, die van p_c $\frac{28}{27} \times 4,268 = \underline{4,43}$-maal grooter, en die van s' $\underline{3,05}$-maal kleiner geworden.

De toestandsvergelijking wordt nu:

$$2(215,7 - 119,8)\, 10^{-5} = \frac{6,228}{1100 + 2147} = 0,00192, \text{ of } 192.10^{-5} = 192.10^{-5}.$$

Thans is a_c/v_c^2 niet meer $= 7\, p_c$, maar slechts iets minder dan $2\, p_c$.

Wij hebben in het bovenstaande steeds n in de nabijheid van 2 ondersteld. Men zou echter kunnen vragen hoe hoog bv. T_c wel zou worden indien n in de nabijheid van 1 zich bevond. Daar $\sqrt{a_c}$ alsdan $= 40.10^{-2}$ (vergrootte attractie der geisoleerde atomen) in plaats van 11 à 10.10^{-2} zou wezen, zoo werd ($b = 120 . 10^{-5}$ blijvende)

$$T_c = 273{,}1 \times \frac{8}{27} \lambda \frac{1600.10^{-4}}{120.10^{-6}} = 80{,}92\, \lambda \times 133{,}3 = \text{circa } 10000^\circ \text{ abs.},$$

terwijl in werkelijkheid T_c zeker niet ver van 1700° abs. zal verwijderd zijn. Totale dissociatie van Hg_2 in $Hg + Hg$ is dus bij het kritisch punt onmogelijk. Slechts een waarde van x in de nabijheid van 0 (n in die van 2) kan de experimenteel benaderde kritische grootheden weergeven.

Wij hebben in dit eerste opstel slechts de tot nu toe bekende experimenteele gegevens nader gepreciseerd, en daaruit alle gevolgtrekkingen getrokken, waartoe deze gegevens aanleiding geven. *Indien* werkelijk $v_c = 216 . 10^{-5}$, $T_c = 1700^\circ$ abs. en $p_c = 1100$ atm. zijn — en het kan niet meer betwijfeld worden of zulks zal benaderd het geval blijken te zijn — *dan* behooren bij de in § 8 genoemde waarden van r de daaronder staande waarden van θ en π, de factoren bij RT_c en p_c tengevolge van den geringen dissociatietoestand bij T_c in verband met de zeer groote waarde van $\Delta\sqrt{a}$. En dit op grond der in § 7 afgeleide algemeen geldende betrekkingen.

Maar dit is slechts de grondslag voor onze eigenlijke taak. Wij moeten thans, *in aanvulling onzer vroegere theorie der kritische grootheden bij associatie* (*l.c.*), *theoretisch* nagaan wat er in het geval van zoo groote waarden van $\Delta\sqrt{a}$ bij dissociatie uit $\frac{dp}{dv} = 0$ en $\frac{d^2p}{dv^2} = 0$ volgt, en de betrekkingen afleiden welke voor $r = v_c : b_c$ gelden, alsmede voor θ, den factor bij T_c — alles in functie van den dissociatiegraad x en van $\Delta\sqrt{a}$. De waarde van π, de factor van p_c, is dan van zelf bepaald.

En ook zullen wij dan in staat zijn op grond der gevonden formules voor r en θ de waarden daarvan nader te preciseeren, wat in dit opstel nog niet geheel mogelijk was, omdat de keuze tusschen verschillende waarden van r nog vrij gebleven was.

La Tour près Vevey, voorjaar 1920. (*Slot volgt*).

Gaarne vermeld ik dat de uitvoering ook van dezen arbeid mij zeer vergemakkelijkt is geworden door het VAN 'T HOFF-fonds, waarvoor ik den bestuurders mijn dank betuig.

Dierkunde. — De Heer SLUITER biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. E. W. IHLE en G. J. VAN OORDT: „*Over de larvale ontwikkeling van Oxyuris equi (Schrank)*".

(Mede aangeboden door den Heer WEBER).

De eenige ons bekende[1]) verhandeling over de larvale ontwikkeling van *Oxyuris equi* is die van RAILLIET en HENRY (1903). Hierin worden twee verschillende vormen van larven beschreven: 1° zulke, die ongeveer 5—10.5 m.m. lang zijn en 2° zulke, die 5—6 m.m. lang zijn. Het achterste uiteinde van het lichaam is bij deze twee vormen verschillend. Bij de eerste ligt de anus vrij ver van het achterste uiteinde van het lichaam verwijderd, bij de laatste is deze afstand geringer. In beide vormen zijn nog geen geslachtsorganen aangelegd.

Op grond van het bovenstaande en omdat de tweede vorm minder talrijk voorkomt, meenen RAILLIET en HENRY, dat de eerste vrouwelijke, de laatste mannelijke larvale vormen zouden voorstellen. In zekere kenmerken (het voorkomen van cuticulaire ringen, van rectaalklieren en van rectaalspieren) stemmen zij met volwassen *Oxyuris*-exemplaren overeen, in vele andere verschillen zij ervan. Beide, larvale vorm en volwassen *Oxyuris* leven vrij in het colon en coecum van het Paard De door de Fransche auteurs gevonden larve „paraît être simplement une forme larvaire de *l'Oxyuris equi* (Schrank) ou mieux une forme immature qu'une derniere mue doit amener à la forme adulte" (RAILLIET et HENRY 1903, p. 137). Wanneer het aantal vervellingen van *Oxyuris* overeenstemt met dat van vele andere Nematoden, dan is dit, volgens de onderzoekingen van SEURAT (1914) de vierde en laatste vervelling.

In het materiaal bijeengebracht door de commissie, belast met het Sclerostomiasis-onderzoek in Nederland, vonden wij de door RAILLIET en HENRY beschreven larvale vormen in vele exemplaren, afkomstig van verschillende paarden. Om te kunnen beoordeelen, of de meening van de Fransche auteurs, dat door een laatste vervelling uit dezen

---

[1]) Het artikel van PERRONCITO: „Sviluppo degli Oxyuridi". Giorn. Acc. Med. Torino. Vol. 66, 1903, was ons niet toegankelijk.

larvalen vorm de imaginale *Oxyuris* ontstaat, juist is, moest dus in de eerste plaats gezocht worden naar vervellende exemplaren. Het gelukte ons een aantal zulke exemplaren te vinden, en hierdoor hebben wij met zekerheid kunnen vastellen, dat de door RAILLIET en HENRY geopperde onderstelling juist is. Een meer gedetailleerde beschrijving der mannelijke en vrouwelijke larven, en van het voorste uiteinde van jeugdige imaginale en vervellende exemplaren van *Oxyuris equi* moge hier volgen.

De larvale vorm.

De lengte der kleinste door ons waargenomen exemplaren bedraagt ongeveer 2.8 m.m.; de dikte van deze exemplaren is ter hoogte van het voorste deel van het lichaam ± 250 μ, in het midden van het lichaam ± 150 μ. Vooraan zijn zij dus veel dikker dan meer naar achteren ter hoogte van het middelste deel van het lichaam. Later verdwijnt dit verschil; het recht afgeknotte voorste uiteinde (Fig. 3) van het ongeveer cylindervormige lichaam is dan zelfs iets dunner dan het midden van het lichaam, dat dan den indruk maakt van de afgebroken punt van een speld. Het achterste deel van het lichaam is toegespitst en vertoont zoowel bij het ♂ als bij het ♀ een scherpe cuticulaire punt. Deze bezit bij de mannelijke exemplaren van twee verschillende vangsten, waarin een groot aantal larvale, vervellende en volwassen *Oxyuris* voorkomen, een verschillende lengte. In de eene vangst (N°. 37) is de punt 230—300 μ lang, in de andere (N° 42) 320—340 μ. De lengte van de cuticulaire punt van vrouwelijke larven is bij deze vangsten echter nog meer verschillend. In vangst N°. 37 bedraagt zij 140—160 μ, in vangst N°. 42 200—250 μ.

Deze verschillen in afmeting hebben wij ook gevonden in de lengte van het vervellende mannelijke en vrouwelijke exemplaar. De mannelijke vervellende larven van vangst N°. 37 zijn 7.5—8 m.m. lang, die van N°. 42 slechts 5.6—6.4 m.m. lang. De lengte der vrouwelijke vervellende exemplaren zijn respectievelijk 10.25—11 m.m. en 7.5—9 m.m. De volwassen exemplaren van deze vangsten behooren in het eerste geval tot het *mastigodes*-, in het tweede geval tot het *curvula*-type. Misschien kunnen de opgegeven maten de meening ondersteunen, dat *Oxyuris equi* (*curvula*) en *Oxyuris mastigodes* zelfstandige soorten zijn.

Zooals RAILLIET en HENRY reeds opmerkten, onderscheiden de mannelijke en vrouwelijke larve zich door den vorm van het achterste uiteinde van het lichaam. De afstand van den anus tot het achterste uiteinde van het lichaam (incl. de cuticulaire punt) is bij het ♀ veel grooter dan bij het ♂. Fig. 1 en 2 verduidelijken dit. Het tusschen

5

den anus en de cuticulaire punt gelegen deel van het lichaam neemt bij het ♂ snel, bij het ♀ zeer geleidelijk in dikte af. De vorm van de cuticulaire punt is dezelfde, maar bij het ♂ is deze punt iets langer dan bij het ♀.

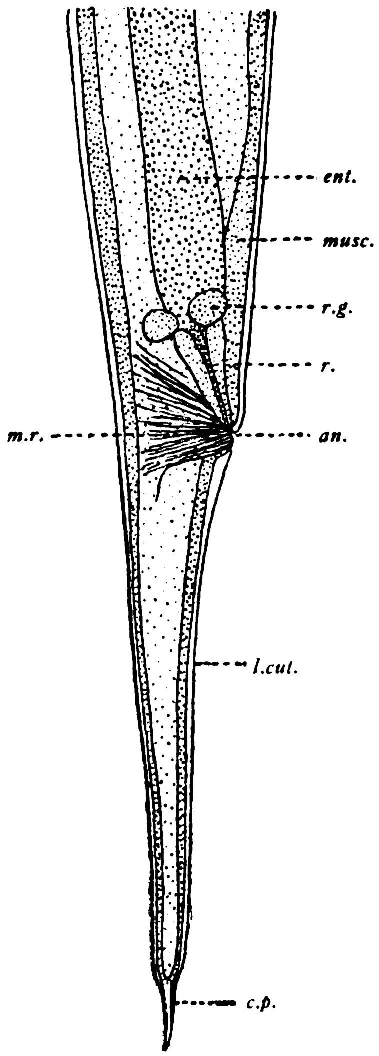


Fig. 1.

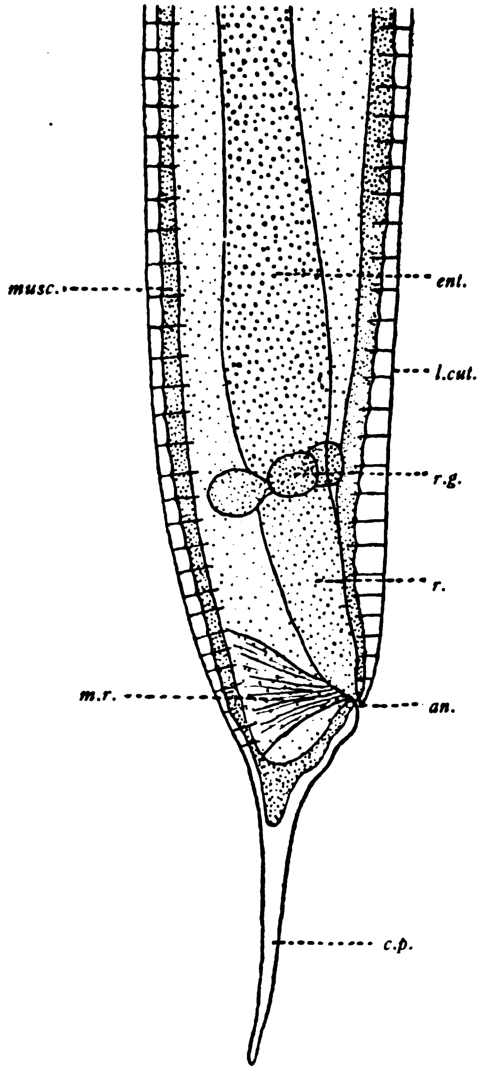


Fig. 2.

Fig. 1. Achterste uiteinde van een vrouwelijken larvalen vorm, gezien van de rechterzijde. Totale lengte 6.11 m.m., vangst N⁰. 37. × 75.

Fig. 2. Achterste uiteinde van een mannelijken larvalen vorm, gezien van de rechterzijde. Totale lengte 4.93 m.m., vangst N⁰. 37. × 120.

Men vergelijke voor de maten ook de volgende tabel:

Vangst N°.	Geslacht.	Totale lengte in m.m.	Lengte voorste deel tot anus (1) in m.m.	Lengte anus — cut. punt (2) in m.m.	Verhouding $\frac{(2)}{(1)}$
37	♂	4.54	4.16	0.38	0.09
37	»	5.03	4.62	0.41	0.09
42	»	3.13	2.77	0.36	0.13
42	»	3.67	3.31	0.36	0.11
42	»	3.8	3.4	0.4	0.12
42	»	4.24	3.81	0.43	0.11
37	♀	4.6	3.8	0.8	0.21
37	»	6.11	5.—	1.11	0.24
37	»	9.05	7.6	1.45	0.19
37	»	10.7	8.8	1.9	0.22
42	»	2.8	2.22	0.61	0.27
42	»	3.67	3.—	0.6	0.20
42	»	5.01	4.—	0.91	0.22
42	»	6.14	5.—	1.14	0.23

Uit deze tabel volgt, dat de verhouding tusschen de lengten van het voorste deel van het lichaam tot den anus en van het deel van het lichaam gelegen tusschen anus en cuticulaire punt tijdens den groei van de larve vrijwel constant blijft en bij de ♂♂ ongeveer de helft is van die bij de ♀♀.

De ringen van de cuticula der larven zijn verschillend in breedte. Vooraan zijn zij breeder dan achteraan. Bij de kleinste larven bedraagt deze breedte ongeveer 16—28μ, bij de grootste larven vóór de vervelling ± 60 μ (vangst N°. 42) en ± 75 μ (vangst N°. 37). De breedte der ringen neemt dus met den leeftijd van de larve toe. Na de vervelling echter zijn de ringen der jonge *Oxyuris*-exemplaren veel smaller.

De terminaal gelegen mondopening is rond (fig. 4,*a*) en niet zeshoekig zooals bij volwassen exemplaren. Volgens RAILLIET en HENRY is de mondrand verdeeld in 12 lobben. Het gelukte ons echter niet dit te kunnen vaststellen. De mondopening voert in een zeer korte mondholte (fig. 3). Op de mondholte volgt de pharynx (volgens de nomenclatuur van MARTINI (1916); gewoonlijk oesophagus genoemd). Bij imaginale exemplaren (fig. 5) kan men hieraan in

overeenstemming met MARTINI een corpus, isthmus en een bulbus onderscheiden. Bij de larven is de pharynx nog kort en bestaat uit twee deelen, die, zooals verderop zal blijken, met het corpus en den bulbus van het volwassen dier vergelijkbaar zijn.

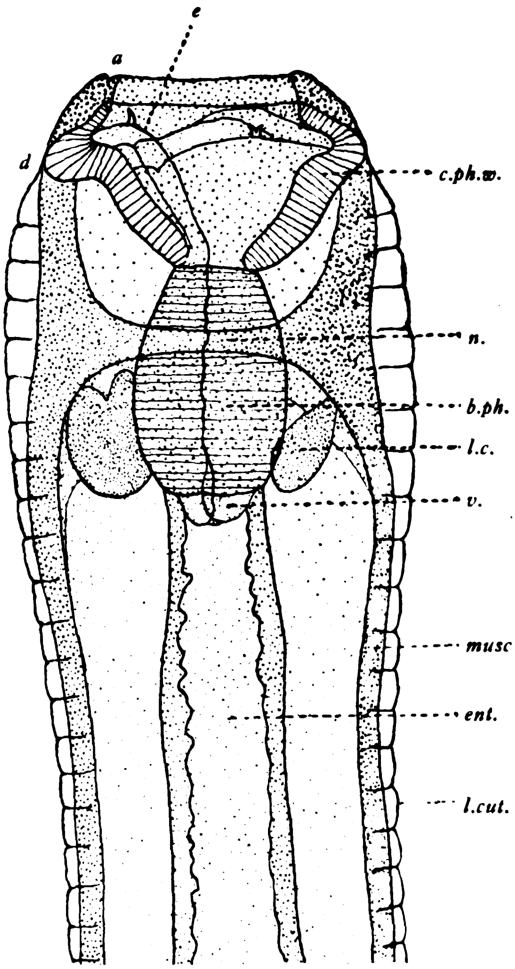


Fig. 3.

Fig. 3. Voorste uiteinde van een larvalen vorm, gezien van de ventrale zijde. ♀, totale lengte 4.6 m.m., vangst N°. 37. × 120.

Het corpus pharyngis is in optische doorsnede ongeveer halfcirkelvormig (fig. 3 *c.ph.w.*). Beschouwt men den pharynx echter van boven (fig. 4), dan ziet men, dat het corpus driehoekig is, terwijl de wanden dorsomediaan en latero-ventraal (fig. 4,*b*) een weinig naar binnen gebogen zijn. In het voorste deel van den pharynx verwijdt het lumen zich dorso-lateraal (*c*) en ventro-mediaan, om vandaar naar achteren toe

nauwer te worden. Hier wordt het lumen op dwarse doorsnede driestralig door de aanwezigheid van een sterke dorso-mediane en twee latero-ventrale verdikkingen van den wand, de pharynx-sectoren (*e*), wat voor den pharynx van alle volwassen Nematoden geldt. Op deze drie naar binnen puilende deelen van den pharynxwand (*e*) kan men kort achter de mondholte verschillende tanden (fig. 4) waarnemen.

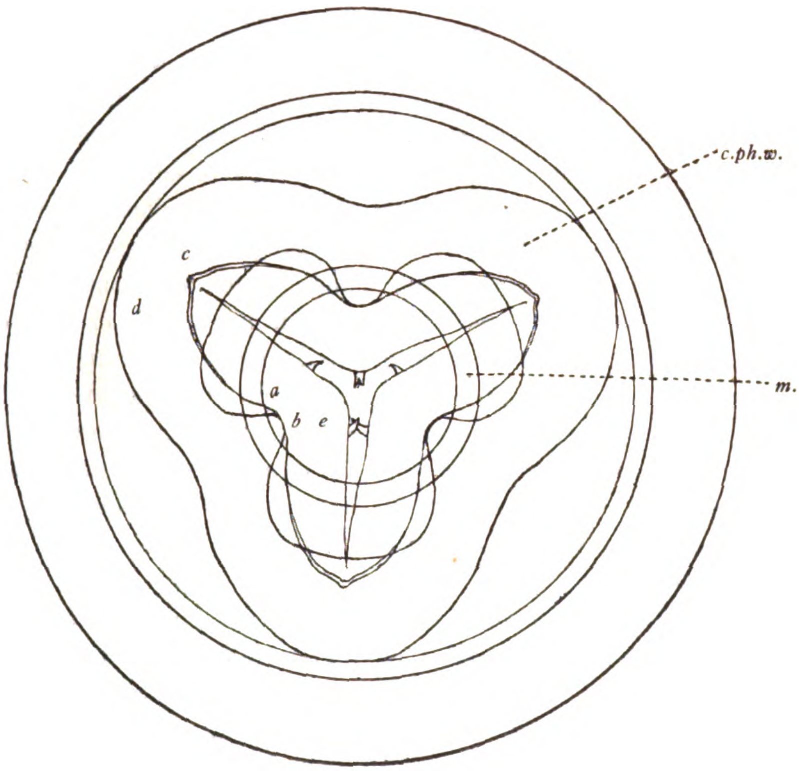


Fig. 4.

Fig. 4. De mondholte en het corpus pharyngis van een vrouwelijken larvalen vorm, van voren gezien. De dorsale zijde ligt aan den bovenkant van de figuur. Men lette op de tanden gezeten op de drie pharynx-sectoren. De letters *a—e* van fig. 3 en 4 correspondeeren met elkaar. Vangst Scl. 88. × 250.

Op den dorsalen wand zit mediaan een dubbele tand, de beide latero-ventrale wanden bezitten ieder twee tandjes, de een meer dorsaal, de ander meer ventraal gelegen. De twee meest ventraal gelegen tandjes raken elkaar in de mediaanlijn aan. In de larve, afgebeeld in fig. 3, waren niet alle zes pharynxtandjes duidelijk zichtbaar; daarom zijn slechts de dorsale en één laterale tand geteekend.

De bulbus pharyngis volgt direct op het corpus pharyngis; ook

hiervan is het lumen sterk vernauwd en op dwarse doorsnede driestralig. De zenuwring ligt om den bulbus. Aan de in glycerine of creosoot opgehelderde praeparaten is geen duidelijke grens tusschen den zenuwring en de spieren van den lichaamswand te zien. Links en rechts liggen tusschen den bulbus en deze spieren de beide eerste laterale cellen (MARTINI 1916, p. 367). De bulbus pharyngis bezit aan zijn achterste uiteinde drie kleppen, die in het wijde lumen van den middendarm uitpuilen. Een oesophagus, volgens MARTINI bij het volwassen dier uit enkele cellen bestaande, is aan onze, slechts opgehelderde en niet gekleurde totaalpraeparaten niet zichtbaar.

Geslachtsorganen zijn volgens RAILLIET en HENRY in de larve niet zichtbaar. In onze jongere exemplaren is dit ook het geval, doch in oudere larven, die op het punt zijn van te vervellen, kunnen wij vlak achter den excretieporus, die ventraal gelegen is, een duidelijke vagina en uterus waarnemen; om eenige maten te noemen: bij een larve met een totale lengte van 10.25 m.m. ligt de excretieporus 3 m.m. van het voorste uiteinde, en de vagina 0.75 m.m. verder achterwaarts; bij een 9.2 m.m. lange larve ligt de excretieporus 2.7 m.m. van het voorste uiteinde, de vagina 0.62 m.m. verder achterwaarts, terwijl bij een larve van 7 m.m. totale lengte, waar de afstand tusschen excretieporus en het voorste uiteinde 2.45 m.m. bedraagt, nog geen vagina zichtbaar is.

De vervelde worm.

Het vervelde jeugdige dier stemt in alle opzichten met volwassen, uitgegroeide exemplaren overeen en onderscheidt zich direct van den larvalen vorm door het bezit van een lang gestrekten pharynx. Fig. 5 geeft ons een beeld van een verveld, maar nog niet uitgegroeid, 9.2 m.m. lang exemplaar (vangst N°. 42). De mondopening, die zeshoekig is, voert in een kleine mondholte. Hierin zijn drie stompe tanden zichtbaar, welke gezeten zijn op de drie sectoren van het corpus pharyngis. Achter deze tanden ligt een krans zeer spitse borstels. In fig. 5 zijn deze drie tanden en de optische doorsnede van den borstelkrans aangegeven. Het corpus pharyngis gaat langzamerhand over in den veel smalleren isthmus; deze weder in den bulbus, die ongeveer even dik is als het corpus. Het lumen van den pharynx is evenals bij den larvalen vorm sterk vernauwd en op dwarse doorsnede driestralig. Het achterste uiteinde van den bulbus bezit wederom drie, in het lumen van den middendarm uitstekende kleppen. Een oesophagus, in den zin van MARTINI, is niet zichtbaar. De pharynx van ♂ en ♀ vertoont geen verschillen.

De vervelling.

Hoe ontstaat nu de pharynx van den zooeven beschreven vorm uit

dien van den larvalen vorm (fig. 3)? Talrijke vervellende exemplaren stelden ons in staat dit na te gaan en speciaal konden wij het uitgroeien van den pharynx bestudeeren.

Vervellende exemplaren zijn direct hieraan te herkennen, dat onder

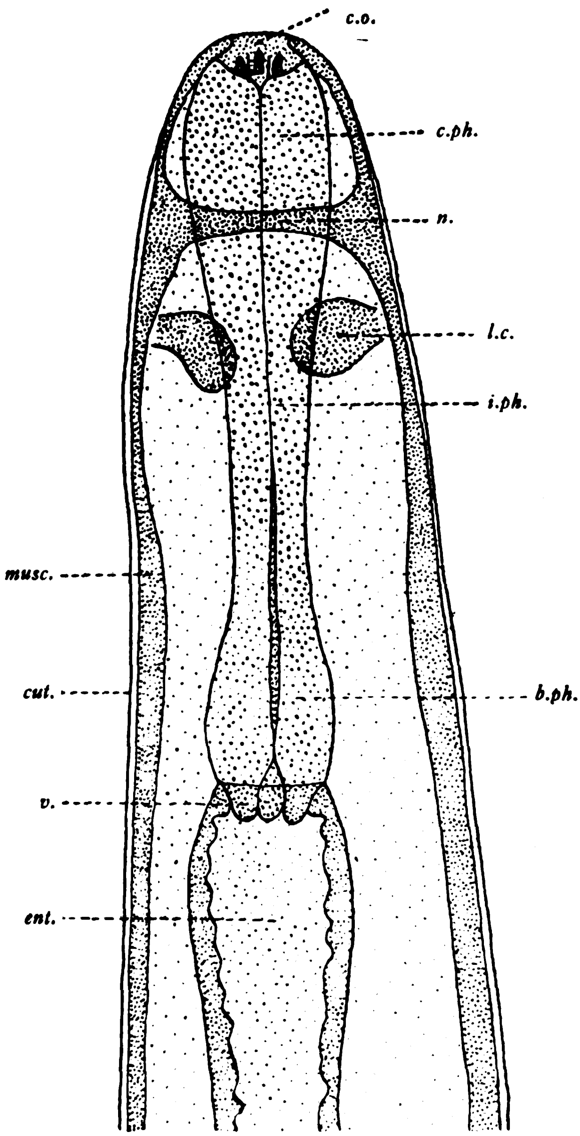


Fig. 5.

Fig. 5. Voorste uiteinde van een pas verveld ♀. Totale lengte 9.2 m.m. vangst N°. 42. × 75.

de oude cuticula, waarvan de ringen een vrij aanzienlijke breedte bezitten (60—75 μ), de nieuwe cuticula met zeer smalle ringen (± 12 μ) zichtbaar is.

Bij exemplaren in het allereerste begin van vervelling is de larvale pharynx nog onveranderd aanwezig. Vervolgens groeit het gedeelte van den bulbus, dat onmiddellijk achter het corpus ligt, sterk uit

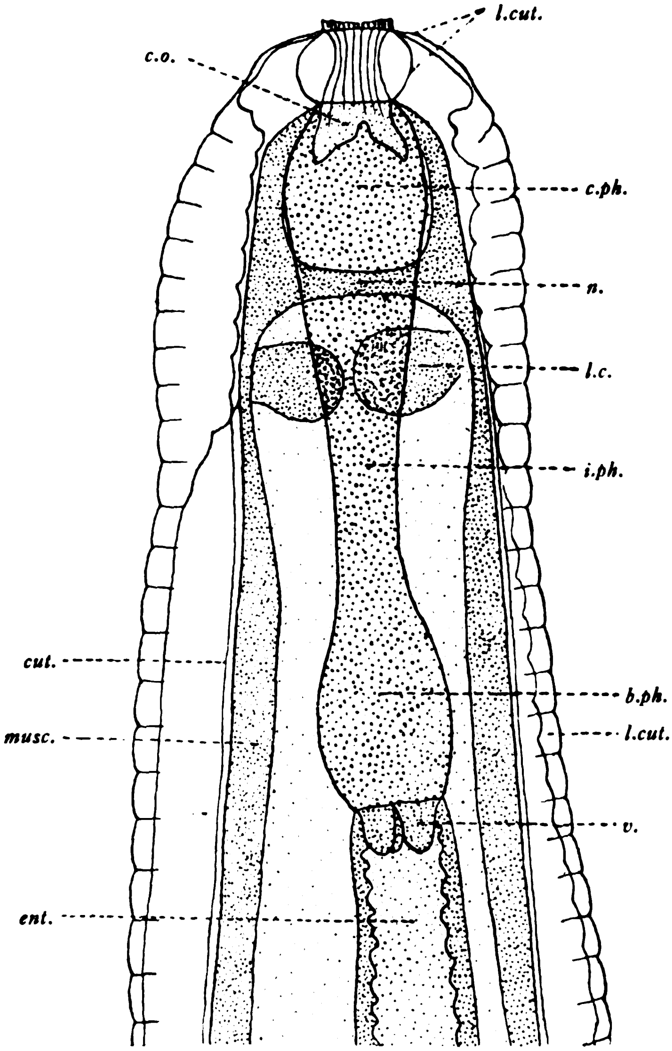


Fig. 6.

Fig. 6. Voorste uiteinde van een vervellend vrouwelijk exemplaar. Onder de larvale cuticula met breede ringen ligt de imaginale cuticula van het volwassen dier. De imaginale ringen zijn zóó smal, dat zij bij deze vergrooting (× 75) niet aangegeven kunnen worden. De losgelaten cuticulaire bekleeding van den larvalen pharynx is vooraan zichtbaar. Totale lengte 8.8 m.m., vangst N°. 42.

en vormt zoo den isthmus. Oorspronkelijk liggen de laterale cellen links en rechts van den bulbus. Tijdens de verlenging van den bulbus blijven zij op hun plaats liggen. Ook het corpus groeit eenigszins, doch lang niet

zoo sterk als de bulbus in de lengte, en aldus komen de laterale cellen bij vervelde exemplaren bij den overgang van corpus en isthmus te liggen (fig. 5). Wij bezitten een praeparaat van een stadium, waarop de lengtegroei van den bulbus juist begonnen is, maar het corpus den larvalen vorm nog bezit. De eerste aanleg van den isthmus is reeds gevormd. Het corpus verlengt zich dus later dan de bulbus, door wiens uitgroeiing de isthmus waarschijnlijk geheel gevormd wordt. De verlenging van den pharynx geschiedt snel: de verschillende hierboven genoemde stadia komen voor in exemplaren van ongeveer dezelfde grootte.

Een meer gevorderd vervellingsstadium is in fig. 6 afgebeeld: onder de oude cuticula, die vooraan nog tegen het lichaam aanligt, ligt de nieuwe cuticula. De cuticulaire bekleeding van de mondholte en van het corpus pharyngis van de larve is vooraan zeer duidelijk zichtbaar. Vóór den pharynx ligt de imaginale mondholte, hierin is één pharynxtand zichtbaar. Dan volgt naar achteren toe het corpus pharyngis, dat langzamerhand overgaat in den isthmus, die zich weer in den bulbus pharyngis voortzet. Het voorste deel van het lichaam van vervellende ♂♂ en ♀♀ vertoont geen verschillen. De vervellende ♂♂ zijn, zooals reeds vermeld is, kleiner dan de ♀♀. De zeer groote verschillen, die in het achterste deel van het lichaam tusschen volwassen ♂♂ en ♀♀ bestaan, komen natuurlijk ook bij de vervellende ♂♂ en ♀♀ tot uiting. Bij beide wordt met de oude cuticula ook de cuticulaire staartpunt afgeworpen. In praeparaten van het vervellende ♀ ziet men onder de oude cuticula den langen, aan de punt iets afgeronden staart; de afstand van den anus tot het uiteinde van den staart is hier vrij aanzienlijk. Bij het vervellende ♂ echter is deze afstand gering en vertoont het achterste gedeelte van het lichaam reeds alle details, welke door Railliet 1883, Ehlers 1899 en Jerke 1900 uitvoerig beschreven zijn.

Zoölogisch Laboratorium der Veeartsenijkundige Hoogeschool.

Utrecht, Mei 1920.

LITERATUUR.

Ehlers, H. 1899. Zur Kenntnis der Anatomie und Biologie von Oxyuris curvula Rud. Arch. f. Naturg. Jhrg. 65. Bd. 1.

Jerke, M. 1900. Zur Kenntnis der Oxyuren des Pferdes. Jen. Zeitschr. der Naturw. Bd. 35.

Martini, E. 1916. Die Anatomie von Oxyuris curvula. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 116.

Railliet, A. 1883. Note sur le male de l'Oxyure du cheval. Bull. Soc. Zool. de France. T. 8.

Railliet, A. 1917. L'Oxyurose des Equidés. Receuil de Med. Vétér. T. 93.

Railliet, A. et Henry, A. 1903. Une forme larvaire de l'Oxyure du cheval. Archives de Parasitologie. T. 7.

Seurat, L. G. 1914. Sur l'évolution des Nematodes parasites. 9e congrès int. de Zool. Monaco.

VERKLARING DER GEBRUIKTE AFKORTINGEN.

an. = anus.
c.o. = mondholte.
cut. = imaginale cuticula.
l.cut. = larvale cuticula.
c.p. = larvale cuticulaire punt.
ent. = middendarm.
l.c. = laterale cellen.
m. = mondrand.
musc. = lichaamsspieren.
m.r. = rectaal-spieren.
n. = zenuwring.
c.ph. = corpus pharyngis.
i.ph. = isthmus pharyngis.
b.ph. = bulbus pharyngis.
c.ph.w. = wand van het corpus pharyngis.
r. = einddarm.
r.g. = rectaal-klieren,
v. = kleppen van den bulbus pharyngis.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer TH. WEEVERS: *„De kalkmijdende planten der binnenduinen van Goeree”.*

(Mede aangeboden door den Heer MOLL).

De brem, Sarothamnus vulgaris Wimm komt op het eiland Goeree voor in een zeer scherp omgrensd gebied. Dit feit bracht mij eerst tot een onderzoek van de flora der terreinen, waar de brem wel en waar ze niet voorkomt, later tot een onderzoek van die flora in verband met de bodemgesteldheid.

Speciaal had dit onderzoek betrekking op de oude kern van het eiland, in 't midden genaamd het Oude Land van Diepenhorst, waaraan zich westwaarts de Westduinen, oostwaarts de Middel- en Oostduinen aansluiten, de laatste grenzen aan de jonge zeeduinen, overigens is de oude kern geheel door polders omgeven. Reeds door LORIÉ [1]) werd deze kern als oude binnenduinen opgevat; het geringe kalkgehalte van den zandbodem, lager dan 0,07 °/₀ $CaCO_3$ [2]) wijst ook hierop.

Toch mogen deze binnenduinen niet gelijkgesteld met de binnenduinen, zooals die benoorden de Maas worden aangetroffen. Uit de gegevens van boringen, ter wille van tramaanleg en watervoorziening op het eiland verricht [3]), bleek mij, dat onder de zandlagen, steeds veen- en kleibanken worden aangetroffen, waarvan de bovenrand op 1 M. beneden A. P., de benedenrand op 2—5 M. beneden A. P. ligt, op dezelfde hoogte ongeveer, waar ook op de rest van het eiland Goeree en Overflakkee en eveneens in Zeeland deze lagen worden gevonden. De binnenduinen van Goeree liggen dus op veen- en kleilagen van het oude „haff” zooals in België en niet op de oude schoorwal. Echter zijn de Goereesche binnenduinen kalkarm en niet kalkrijk zooals de meeste der Belgische duinen, hun flora komt dan ook sterk overeen met die der enkele kalkarme terreinen in Zeeland en in België gevonden en door MASSART [4]) in aansluiting

[1]) J. LORIÉ, Arch. du Musée Teyler. Vol. III. 1892.

[2]) Vergelijk JESWIET, Entwicklungsgeschichte der Flora der holländischen Dünen.

[3]) Door de welwillendheid van den Heer Dr. J. T. STEENHUIS, kon ik hierover beschikken.

[4]) J. MASSART, Essai de geographie bot. des districts litt. et alluv. de la Belgique Recueil Inst. bot. L. Errera, T. VII. 1908.

aan Rutot [1]) voor België bestempeld met de namen van „dunes internes" en sable à Cardium.

Toch is de vorming op Goeree een andere dan Massart aanneemt; uit archeologische vondsten onder de zandlagen aangetroffen, bleek dat deze later dan ± 200 na Christus [2]) daar ter plaatse moeten zijn afgezet en waarschijnlijk is hun vorming een aeolische uit meer westwaarts gelegen en uitgeloogde oudere duinen, op een manier als door Jeswiet l.c. voor gronden benoorden de Maas is betoogd. Hun kalkgehalte blijkt dan ook tot vrij groote diepte ± 1 M. nog niet toe te nemen, bedraagt dan nog slechts 0.018 °/₀ $CaCO_3$ in 't Land van Diepenhorst. Nader wil ik te dezer plaatse hier niet op ingaan en omtrent den bodem nog slechts vermelden, dat het kalkgehalte in het Oude Land van Diepenhorst het geringst is, minder dan 0.02 °/₀ [3]), in de West- en Middelduinen iets hooger ± 0,1 °/₀ en naar de zeezijde stijgend tot ± 1 °/₀. Terwijl nu het geheele gebied der binnenduinen zandbodem is en een psammitische flora bezit in den zin van Drude, bestaat er een belangrijk verschil tusschen den plantengroei van de weiden van het Land van Diepenhorst eenerzijds en dien van de meentweiden der West- en Middelduinen anderzijds. In de eerste vinden we overal Sarothamnus vulgaris, hier en daar Calluna vulgaris en Erica tetralix, in de tweede ontbreken steeds alle drie. Aan afgegraasd worden, of aan meer of minder bemesting door het weidende vee is dit niet toe te schrijven, daar deze omstandigheden in beide terreinen gelijk zijn; het ligt dus voor de hand dit verschil in flora in verband te brengen, met den meerderen of minderen kalkrijkdom van den bodem, daar zoowel de brem als struik- en dophei als kalkmijdende planten worden beschouwd.

Het vraagstuk der kalkmijdende en kalkminnende planten is ingewikkeld en nog volstrekt niet opgelost; het heeft dan ook aanleiding gegeven tot een uitgebreide literatuur, waarvan hier slechts de hoofdzaken genoemd kunnen worden. Ons geval biedt echter het voordeel, dat enkele factoren, die anders een groote rol spelen, hier zonder bezwaar te elimineeren zijn. In het bijzonder heeft dit betrekking op de physische factoren, als bodemstructuur, korrelgrootte en in verband daarmee waterhoudendheid van den bodem en vatbaarheid voor verwarming door zonbestraling.

---

[1]) A. Rutot, Bulletin de la société de geologie, paleontologie et d'hydrologie 1906.

[2]) Prof. Holwerda was zoo welwillend mij den ouderdom der gevonden voorwerpen op te geven.

[3]) De methode der Ca-bepaling, was dezelfde als die gebruikt door Jeswiet l.c. Bepaald werd daarbij slechts 't gehalte der gemakkelijk aantastbare Ca-verbindingen, dus van die, welke voor de plantenvoeding van beteekenis zijn.

Onderzoekingen van THURMAN[1]) later van GR. KRAUS[2]) hebben de groote beteekenis van deze factoren, vooral voor bergstreken in 't licht gesteld. Zoo is 't te verklaren, dat een plant hier kalkmijdend, elders kalkverdragend kan zijn; ook concurrentie tusschen naverwante soorten kan hierbij een rol spelen, zooals door NÄGELI met 't bekende voorbeeld van Achillea atrata en Achillea moschata is aangetoond.

In ons geval op Goeree is echter van geen van deze factoren sprake. De bodem is in beide terreinen zand van nagenoeg gelijke korrelgrootte, en met gering humusgehalte, de temperatuur verschilt bij zonbestraling niet noemenswaard op overeenkomstige plaatsen, toch bevatten de drogere gronden van het land van Diepenhorst de bedoelde planten wel en de drogere terreinen der West- en Middelduinen niet. Ook de concentratie van het bodemwater kan moeilijk de beslissende factor zijn [3]). De xerophytische brem bewoont de droge terreinen van het Land van Diepenhorst, waar de concentratie van het bodemwater groot is en slechts een hooge osmotische druk in de weefsels in staat is, water hieraan te onttrekken. De brem mijdt daarentegen, zoowel de droge als de vochtiger deelen der Middelduinen. In de eerste zou door het hooger kalkgehalte de concentratie van het bodemwater iets hooger kunnen zijn, in de laatste is dit zeker niet het geval. Toch ligt het voor de hand, dat edaphische factoren hier van beteekenis zijn en daarbij wil ik dan allereerst opmerken, dat zoowel de kalkmijdende als de kalkminnende planten kalkzouten noodig hebben, zooals bijv. voor de boekweit (die meestal op kalkarmen grond verbouwd wordt), door waterkulturen blijkt. Ook uit een zeer weinig kalk bevattenden bodem is de plant in staat aanzienlijke hoeveelheden op te nemen, zoo heeft de kalkmijdende Castanea vesca op diluvialen grond (kalkgehalte ± 0,3 %) in de asch van de blaren 45 % kalk, in die van 't hout zelfs 73 %.

Het kalkgehalte der kalkmijdende planten is echter meestal zeer gering, zooals op eenvoudige wijze met een reactie van MOLISCH [4]), vorming van het dubbelzout Gaylussiet door middel van een 10 % Na_2CO_3 oplossing is aan te toonen.

Kalkmijdende hoogveenplanten zooals Drosera spec., Orchis maculata, Narthecium ossifragum, Gentiana pneumonanthe, Pinguicula vulgaris, Molinia coerulea, Sphagnum spec geven dan een zeer zwakke reactie, eveneens de brem. Quantitatieve bepalingen leerden mij, dat het aschgehalte van een bremplant ± 1,6 % van het drooggе-

---

[1]) THURMAN, Essai de phytostatique appliqué à la chaîne du Jura. 1849.
[2]) GR. KRAUS, Boden und Klima auf kleinstem Raum. 1911.
[3]) G. Gola. Saggi di una teoria osmotica del edafismo. Ann. di Bot. VIII 1918.
[4]) H. MOLISCH, Beiträge zur Mikrochemie der Pflanze. Ber. d. Bot. Ges. 1916.

wicht bedroeg, het kalkgehalte van de asch ± 3,5 %. dus 0,5 pro mille van het drooggewicht. Al is dan ook het aschgehalte van een plant en eveneens de hoeveelheid kalk in de asch sterk verschillend naar gelang van den bodem, waarop zij groeit [1]) toch is dit een zeer sterk sprekend verschil met de in de Middelduinen voorkomende Trifolium pratense, waar 't kalkgehalte op 't drooggewicht der plant berekend 2,5 % is, dus 50 × zooveel als in de brem.

Vervolgens wil ik er de aandacht op vestigen, dat Ca CO_3 in vele gevallen een schadelijken invloed op de kalkmijdende planten b.v. de tamme kastanje uitoefent. Voor hoogveenplanten, voor de mycotrophen als Calluna en Erica is dit bekend genoeg, maar misschien uit den invloed der Calciumzouten op de mycorrhiza te verklaren. Daar de geheele stofwisseling dezer mycotrophen nog zoozeer in het duister ligt, wil ik deze liever buiten beschouwing laten, maar meer den nadruk leggen op de brem [2]). Proeven van MASSART l.c. te Coxyde verricht toonden de schadelijkheid van den kalkrijken bodem der jongere duinen voor de brem aan, zonder dat echter nauwkeurig bleek, waarin die schadelijke werking bestond. Voor Sphagnum spec. staat het geval gunstiger, daar leerden proeven van PAUL [3]) dat reeds oplossingen van 0,01—0,03 % Ca CO_3 voor deze planten schadelijk zijn, terwijl zij voor Ca SO_4 oplossingen veel minder gevoelig zijn. In dat geval kan dus moeilijk de schadelijke werking der Ca-ionen als zoodanig de hoofdrol spelen [4])

Dit voert ons vanzelf tot de beschouwing der reactie van de voedingsoplossing, die in deze laatste gevallen, als $CaCO_3$ of $CaSO_4$ werd toegevoegd, verschilt.

Werd 150 gr. droge zandbodem met 50 c.c. gedistilleerd water flink geschud en de vloeistof na 24 uur afgefiltreerd, dan vertoonde het filtraat bij den zandbodem der zeeduinen (kalkgehalte 2 à 3 %) een duidelijke alkalische reaktie met lacmoid- en rosolzuuroplossing, eveneens een zwakkere alkalische reactie bij dat der Middel- en Westduinen (kalkgehalte 0,1 tot 1,0 %). Daarentegen was de reactie neutraal of zwak zuur bij zandmonsters uit het Oude land van Diepenhorst (kalkgehalte 0,01—0,02 %) waar Sarothamnus, Calluna

---

[1]) Bij de kalkmijdende tamme kastanje vindt men in de zwakke exemplaren op kalkrijkeren bodem gegroeid ook een hooger Ca-gehalte, dan in de gezonde exemplaren van kalkarmen bodem.

[2]) Invloed van den kalkrijkeren bodem op de wortelknolletjes en dus de N-opname is onwaarschijnlijk. De andere Papilionaceeën hebben ook op den kalkrijkeren bodem knolletjes, ook in beide gevallen is er N-bemesting door 't weidende vee.

[3]) PAUL, Mitt. kgl. bayr. Moorkulturanstalt. 1908.

[4]) De meestal kalkmijdende lupine is wel gevoelig voor Ca SO_4.

en Erica voorkomen. Zou dus misschien in die richting een verklaring van het verschil in voorkomen te zoeken zijn? Een onderzoek van PAUL l.c. betreffende het voorkomen van Sphagnum in de hoogvenen van Beieren wees ook in die richting, eveneens enkele gevallen van plantenziekten [1]). Duidelijk is in elk geval, dat verschil in reactie van het bodemwater een geheel andere voedingsvloeistof geeft, waardoor bijv. bij alkalische reactie door meer kalk de ontledende werking van de zuren op de moeilijker aantastbare gesteenten is opgeheven. Dat, zooals ook voor de hand ligt, het de wortels zijn, die de schadelijke werking van meer kalk ondervinden blijkt bijv. bij de tamme kastanje, doordat deze op den eik geënt, ook op kalkrijkere gronden gedijt.

Al is echter deze invloed der reactie van het bodemwater van groote beteekenis, de eenige factor kan het niet zijn, daarvoor pleiten de gevallen, waar twee bodemsoorten gelijke reactie vertoonen en toch bij gelijke physische factoren, maar bij ongelijk kalkgehalte duidelijk verschillende plantengroei bezitten. Als voorbeelden kan ik hier aanhalen de binnenduinen, zooals de Middelduinen van Goeree eenerzijds, de zeeduinen anderzijds. Orchis morio, Scleranthus perennis, e.a. mijden op Goeree de zeeduinen (kalkgehalte 2—3 %), zijn daarentegen te vinden in de Middelduinen (kalkgehalte 0,1—1 %) Ook pleit hiervoor, dat de veelal kalkmijdende lupine wel nadeelige gevolgen ondervindt van $CaSO_4$ bemesting. Daarom wil ik ten slotte nog wijzen op het antagonisme der bivalente Ca-ionen, ten opzichte der eenwaardige Kalium- en Natriumionen. Onderzoekingen van LOEB [2]) op zoölogisch, later van OSTERHOUT [3]) op botanisch gebied (o.a. met plantenwortels verricht), hebben doen zien, dat zoowel de zouten der eenwaardige als die der tweewaardige metalen elk afzonderlijk genomen, een giftige werking uitoefenen, die echter door een bepaalde concentratie der andere opgeheven wordt.

De permeabiliteit van het protoplasma wordt er zoodanig door beïnvloed, dat zij in Na zouten toeneemt tot de dood intreedt, in Ca zouten afzonderlijk eerst afneemt om daarna als een zeker minimum bereikt is weer toe te nemen tot eindelijk ook de dood met standvastig worden der permeabiliteit en volledige exosmose intreedt [4]). Oplossingen daarentegen van bepaalde verhoudingen van Na en Ca

---

[1]) o.a. de veenkoloniale haverziekte en de Hooghalensche ziekte bij de rogge.

[2]) LOEB, Am. Journ. Physiology. Vol. 3. 1900.

[3]) W. J. v. OSTERHOUT, Jahrb. f. Wiss. Botanik Bd. XLVI, 1908, On the importance of physiologically balanced solutions for plants. Botan. Gazette 44. 1907.

[4]) TH. WEEVERS, Betrachtungen und Untersuchungen über die Nekrobiose und die letale Chloroformeinwirkung. Rec. des trav. bot. neerl. Vol. IX. 1912.

zouten (b.v. 95,24 Na Cl en 4,76 $Ca Cl^2$ bij proeven met Laminaria [1]), laten de normale permeabiliteit onveranderd en maken normalen groei mogelijk, iets wat OSTERHOUT l.c. tot hypothetische beschouwingen over de werking op het protoplasma aanleiding heeft gegeven, waarop ik hier niet wil ingaan.

Een feit is het echter, dat overmaat van een der beide (in casu Ca) zouten als gif werken kan. Dit toonden o.a. bodemproeven van OSTERHOUT aan. Toevoeging van $CaCl^2$ oplossingen aan een overigens vrij gunstigen bodem had schadelijke uitwerking op de gekweekte planten, toevoeging van K Cl oplossingen niet, wat OSTERHOUT verklaart door erop te wijzen, dat door toevoeging van Calcium de verhouding van beide metalen steeds meer van de optimale afwijkt, door toevoeging van Kalium ertoe nadert.

Keeren wij nu tot ons geval van de brem terug, dan vinden we dat in vergelijking van den bodem van het Land van Diepenhorst het kalkgehalte in den bodem der Middelduinen van 0,015 % tot 0,90 % stijgt, dus ± 60 × zoo groot wordt. Het gehalte aan kalium en natriumzouten tezamen stijgt daarentegen niet noemenswaard, in de Middelduinen was dit 0,08 %, in het Land van Diepenhorst 0,06 %. De verhouding is dus in de West- en Middelduinen zeer sterk gewijzigd, zoodat het evenwicht voor de echte kalkmijdende planten zooals de brem gestoord is. Voor deze opvatting pleit ook, dat men kalkmijdende planten, zooals de tamme kastanje op kalkrijken grond kweeken kan, mits deze van nature kalirijk is [2]) of er kali aan wordt toegevoegd. Door SCHIMPER [3]) werd beweerd, dat kalk de opname van ijzerzouten hinderde en toevoeging van ijzerzoutoplossing aan kalkrijken grond de ontstane chlorose deed verdwijnen. Door anderen, zooals SIDORIN is dit echter tegengesproken en geweten aan de alkaliciteit der gebruikte voedingsoplossing.

Voor Magnesium is door LOEW [4]) betoogd, dat een bepaalde verhouding van Ca en Mg noodzakelijk is voor goede ontwikkeling; door Russische en Amerikaansche schrijvers [5]) op het gebied der bemestingsleer is dit echter ontkend.

Bij de hier gevolgde methode van bodemonderzoek vond ik in beide bodemsoorten slechts sporen magnesium; een oordeel in deze quaestie wil ik mij dus voorbehouden. Wellicht zullen dit latere

---

1) W. J. v. OSTERHOUT, Antagonism and Permeability. Science Vol. XLV. 1917.
2) ARNOLD ENGLER, Ber. Schweizer. bot. Ges. 1901.
3) SCHIMPER, Pflanzengeographie. 1908.
4) LOEW. Bull. Agric. Coll. Tokyo 1902. Die Lehre vom Kalkfactor. Berlin 1914.
5) A. DOJARENKO Journ. f. experim. Landwirtschaft 1903, F. A. WYATT Journ. agr. research 1916.

proeven uitmaken, die ik voornemens ben met de brem te doen door deze te kweeken op kalkrijkeren grond, waaraan verschillende zouten zijn toegevoegd. Dit is echter een werk van langeren duur; voorloopig gaven proeven met waterkulturen van boekweit mij eveneens aanwijzingen, dat het antagonisme der zouten van eenwaardige en tweewaardige metalen een belangrijke factor in het vraagstuk der kalkmijdende planten is.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: „*Catalysis* — Part VII — *Temperature Coefficient of Physiological processes*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

In this article it is proposed to subject to critical examination the results obtained with regard to the effect of temperature on physiological processes. Before proceeding to the consideration of these reactions I shall briefly state the results obtained in the case of purely chemical reactions and then try to show how far these relations are applicable to physiological changes.

In homogeneous medium the following general results have been obtained.

a. The higher the order of the reaction, the smaller is the coefficient of temperature, in other words, unimolecular reactions have higher temperature coefficients than polymolecular reactions under identical conditions.

b. The greater the velocity of a reaction the smaller is the temperature coefficient.

c. The temperature coefficient of a positively catalysed reaction is smaller than that of the uncatalysed reaction and the greater the concentration of the catalyst the greater is the fall in the temperature coefficient.

In the case of negative catalysis, a reaction which is catalysed (negatively), has a higher temperature coefficient than the uncatalysed reaction. In this case, the greater the concentration of the catalyst the greater is the increase in the temperature coefficient.

In the case of heterogeneous reactions, the following points have been established:

a. Diffusion is the guiding factor in the velocity of heterogeneous reactions.

b. With heterogeneous catalysts which cause reaction between the substance in question to take place with practically infinite velocity, the actual rate of reaction will be determined solely with which the substance is diffused to the surface of the catalyst.

c. If the heterogeneous velocity is that of the diffusion process, one will always get a unimolecular coefficient for the reaction in question, independent of the actual order of the more rapid chem-

ical reaction, which accompanies the diffusion process. Hence it is useless to try and determine the order of a heterogeneous reaction, from the velocity with which it proceeds.

d. The temperature coefficients of heterogeneous reactions are small, (viz, about 1.2 for a 10° rise).

In this connection it is interesting to note that photo-chemical reactions have small temperature coefficients (viz. about 1.1 for a 10° rise).

Now I shall discuss the results obtained in physiological processes with regard to the influence of temperature on them.

The relation between the temperature and the velocity of respiration has been studied during the last few years both for plants and animals. The principal object of these investigations has been to find out whether respiration can be considered as a chemical process.

From the researches of CLAUSEN (Landwirt. Jahrbuch Bd. **19** 1890), BLACKMAN (Annals of Botany 1905, **19**, 288), KUIJPER (Rec. Trav. Bot. Néerl. 1910, **7**, 131) LEHENBAUER (Physilogical researches N°. 5, AUGUST 1914), Miss LEITSCH (Annals of Botany January 1916), Miss SAUNDERS (private communication) and others we find that the temperature coefficients of plant processes generally lie between 2 and 3 for a 10° rise of temperature.

BROWN and WORLEY (Proc. Roy. Soc. 1912, **85** B, 546) have shown that the temperature coefficient of the velocity of absorption of water by different seeds is about 2 for a 10° rise. If the values of the velocity coefficients are calculated from their results, we see that they follow the unimolecular formula.

The researches of VELEY and WALLER (Proc. Roy. Soc. 1910, **82** B) show that the ARRHENIUS formula can be applied to the influence of temperature on the velocity of the action of drugs on muscles.

Very large number of experiments have been made on the influence of temperature upon metabolism both in cold-blooded and in warm-blooded animals. But comparativelv few of them have been made under standard conditions. In most cases animals have been free to move about and even in cases where they have been tied muscular movements have not been prevented or muscular tone abolished. In these conditions a fundamental difference has been observed between the effects of temperature upon cold-blooded and upon warm-blooded animals. In cold blooded-animals the respiratory exchange almost always rises with increasing temperature, but generally irregularly and to a very different degree in different animals.

In the case of bees MARIE PARHON (Ann. des Sc. nat. Zoo. Sér., 9, **9,** 1—58) finds that the temperature in the cluster of bees inside the hives shows a very striking constancy throughout the year.

In intact warm-blooded animals, a fall in the surrounding temperature regularly causes an increase in the respiratory exchange thanks to the mechanism of „Chemical heat regulation".

In all the experiments so far mentioned both on cold-blooded and on warm-blooded animals we have to do with two distinct effects of temperature, viz. one upon the central nervous system causing variation in the innervation of different organs and especially of the muscles and one upon the tissues themselves influencing the reaction velocity of the metabolic processes.

In the warm-blooded animals the action of low temperature on the skin produces reflexly innervation of the muscles resulting either in movements or in increase of tone.

In the cold-blooded animals the processes in the central nervous system itself are probably acted upon, and increased muscular activity is produced by increasing temperature except in the cluster of bees which in the aggregate reacts against the temperature somewhat after the fashion of a warm-blooded animal.

When the influence of temperature on the metabolic process is to be studied, the nervous influence must be excluded and the experiments must be made under standard conditions.

It has been found repeatedly both on man and on animals that even a slight increase in body temperature over the normal produces an increase in the standard metabolism.

It follows from the experiments of KROGH (Biochem. Zeit. 1914, **62,** 266) and others that the velocity of catabolic reactions increases in all animalls with rising temperature up to a maximum at and above which temperature has deleterious effect upon the organism. The maximum temperature probably differs considerably for different animals, but very few determinations have been made so far.

The more rigorously standard conditions are maintaind the more regular is the influence of temperature observed.

CHICK en MARTIN (Journal of Physiol. **45,** 40) find that the coagulation of haemoglobin by heat has the temperature coefficient 13.8 for the elevation of 10°, whilst in the case of albumen it is higher. In this connection it is interesting to note that VON SCHROEDER (Zeit. Phys. Chem. 1903, **45,** 75) has found that a solution of gelatine has a viscosity of 13.76 at 21° C. and 1.42 at 31° C. i. e about 10 times less with an elevation of 10°.

The results obtained by CHICK and MARTIN show that the temper-

ature coefficient of coagulation of proteins by water is an exceedingly high one compared with effect of temperature on most chemical reactions. In the majority of instances the reaction velocity is increased about 1.1 times for 1° C. i. e. 2 to 3 times for a rise of temperature of 10°. Even the biological processes of germination of seeds, respiration of plants and growth of bacteria fall within this range.

On the other hand many reactions in which complex protein bodies are concerned have been shown to possess high temperature coefficients which are comparable with those obtained for heat coagulation. The destruction of emulsin by heat has according to TAMMANN (Zeit. Phys. Chem. 1895) a temperature coefficient of about 7.14 for a 10° rise between 60° and 70°. BAYLISS (1908) found the action of trypsin to be hastened 5—3 times for some germs in accordance with a logarithmic law. BALLNEV (1902) found the disinfection of anthrax spores by steam to take place from 9 to 11 times more quickly by raising the temperature 10° and the law of ARRHENIUS is equally applicable to his results.

CHICK and MARTIN (loc. cit) have shown that the disinfection of vegetative forms of bacteria with phenol and other coal-tar derivatives has a temperature coefficient of 8 to 10 for a 10° rise of temperature.

On the other hand the disinfection by Silver Nitrate and Mercuric Chloride has a much lower coefficient and that is about 2.

The high temperature coefficient for the coagulation of egg albumen has a counterpart in that for the velocity of destruction by hot water of the haemolysins in vibriolysins, tetanolysin and goat serum.

MADSEN and his collaborators found the influence of temperature to be in accordance with the law of ARRHENIUS and the velocity of this reaction to be doubled if the temperature were raised 1° C. They also showed that the action of hot water upon some agglutinins to be similarly influenced by temperature.

This marked influence of temperature is extremely useful for men and animals. When a toxin enters the system, the temperature of the body rises by two or three degrees and we get the phenomenon of fever and the poison is destroyed about 10 or 20 times more quickly at this fever temperature.

HARTRIDGE (Jour. of Physiol. 1912, Vol. XLIV, 34) finds the temperature coefficient for heat coagulation to be as great as 726 for a 10° rise for some protein matter. In this connection it is interesting to note that the decomposition of sulphur trioxide by heat has 419 for its temperature coefficient for a 10° rise at about 30°.

WATSON (Jour. Hygiene 1908, **8**, 536) applying OSTWALD's isolation method to Miss CHICK's results finds that in the disinfection of certain

bacteria with phenol, the molecules (N) of phenol reacting with those of the bacterial constituent are in the proportion of 5.5 to 1. As regards the metallic salts the same law holds good for disinfection by silver nitrate and the molecules (N) of silver nitrate reacting with those of bacterial constituents are in the proportion of 1 : 1. In the case of Mercuric chloride, however, the above relation between the concentration of disinfectant and the average velocity of disinfection is maintained only if the former is expressed in terms of the corresponding concentration of mercuric ions. Under these circumstances, N has the value **4.9** for anthrax spores and **3.8** for paratyphosus. But the temperature coefficient of the disinfection by phenol is very high though the reaction is approximately heptamolecular. On the other hand, in the case of silver nitrate the reaction is approximately bimolecular and the temperature coefficient is small viz. 2 for a 10° rise. These results are contrary to our experience in ordinary chemical reactions, where the greater the order of a reaction the smaller is the coefficient of temperature.

KANITZ (Temperature und Lebensvorgänge,, 1915), SNYDER (Amer. Jour. of Physiol. **22**, 1908, 309), COHEN STUART (Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1912, **20**, 1270), PÜTTER (Zeit. Allg. Physiol. 1914, **16**, 617) and others have tried to represent the influence of temperature on physiological processes by the rule of VAN 'T HOFF, but it is not very important whether the temperature coefficient has the value 2 or 3, the important point to establish is whether the formula of ARRHENIUS (Zeit. Phys. Chem. 1889, **4**, 226) or the formula of HARCOURT and ESSON (Phil. Trans series A Vol. **186**, 817 (1895), Vol. **212**, 187, (1912) which is applicable to ordinary chemical reactions is also applicable to physiological processes.

BLACKMAN (Annals of Botany 1905, **19**, 281) has accepted the validity of the VAN 't HOFF rule and has found the value 2.1 between 9° and 19°. He has assumed that this value of the temperature coefficient remains constant at higher temperatures; this assumption is contrary to our experience in ordinary chemical reactions, the temperature coefficient for a 10° rise becomes smaller as the temperature rises. This falling off of the temperature coefficient with increase of temperature is also expected from the ARRHENIUS formula. Evidently the conclusions of BLACKMAN would have been more correct had he accepted the ARRHENIUS formula.

Looking at the whole problem from a broad point of view it seems that temperature has two effects on vital processes: — (a) the increase of the velocity of the chemical reaction involved in the physiological changes, (b) the destruction of the living cells.

At low temperatures the first effect is predominant since the harmful effect does not begin to play its part.

Thus the problem for us is to investigate the effect of temperature on vital processes at low temperatures that is, before the harmful effect on the living cells has begun and we shall probably see the same quantitative laws which are applicable in the domain of ordinary chemical reactions *in vitro* are also applicable to vital processes taking place in nature.

Enzymes and colloids reign supreme in life processes and the BROWNIAN movement of these particles does away with the diffusion layer characteristic of heterogeneous reactions and makes them analogous to positively catalysed reactions taking place in homogeneous medium and hence we expect to find the same laws governing both ordinary chemical reactions and life processes, compare DHAR, Proc. Akad. Wetensch. (1919).

In conclusion I suggest that it is desirable to study the problem of acclimatization scientifically from the point of view of the influence of temperature on life processes.

SUMMARY.

a. Physiological processes take place mostly in heterogeneous medium. The Brownian movement of the colloidal particles present in the reacting substances does away with the diffusion layer characteristic of heterogeneous reactions and makes the physiological reactions similar to positively catalysed reactions taking place in homogeneous medium. Consequently the temperature coefficients of physiological processes instead of being small (Viz. about 1.2) are generally greater than 2 for a 10° rise.

b. The spontaneous destruction of certain toxins is highly influenced by temperature and this fact is extremely useful to the human body because in the phenomenon of fever the poison is killed very rapidly.

c. Before the destructive effect of temperature begins to set in, the ARRHENIUS formula connecting temperature and velocity is generally applicable to physiological processes.

Chemical Laboratory, Muir Central college,
Allahabad (India).

Palaeontologie. — De Heer EUG. DUBOIS biedt eene mededeeling aan: „*De proto-Australische fossiele Mensch van Wadjak, Java*".

De dessa Tjampoer Darat of Wadjak, de hoofdplaats van het district Wadjak, ligt ten zuidwesten van Toeloengagoeng en ongeveer in den meridiaan van den Wilis-top. Daar is de vlakte van Kediri, voorbij den Kloet-mantel, in den Goenoeng Kidoel — het Zuidergebergte — ingedrongen en heeft een steile oostelijke begrenzing verkregen. Het ontstaan dier steile afsnijding van het tertiaire kalksteengebergte hebben VERBEEK en FENNEMA, wel terecht, aan eene daarlangs, over Tjampoer Darat of Wadjak en Gamping, loopende verschuiving toegeschreven [1]). In die zuidelijke voortzetting der vlakte van Kediri, door slechts 3 K. M. breed bergland van den Indischen Oceaan gescheiden, ligt de Rawa Bening (het Klare Meer), thans grootendeels moeras, dat afwatert door de Kali Tjampoer, welke, na met de uit het westen komende Kali Bendo zich tot de Kali Ngrowo vereenigd te hebben, haar water, ten noorden van Toeloengagoeng, in de Brantas stort. Herhaalde uitbarstingen van den Kloet en andere vulkanen moeten wel allengs den bodem van het meer met vulkanische asch hebben opgehoogd. En terwijl in de gelijksoortige afzettingen, die zich stroomafwaarts vormden, de rivier gemakkelijk haar bed diep hield, moest, in den loop der tijden, het waarschijnlijk eerst zeer aanzienlijke en tot aan den voet der kalksteenrotsen zich uitbreidende meer afnemen, in grootte en diepte. Misschien heeft ook wel opheffing van zuidelijk Java daartoe bijgedragen.

Tegen de helling van dat gedeelte van den berg, dat onmiddellijk bezuiden Tjerme en 2 kilometer Z.Z.W van Tjampoer Darat zich in W.Z.W. richting, over 800 M. lengte, bijna rechtlijnig uitstrekt, werden in 1889 en 1890 fossiele menschenbeenderen gevonden. De vlakte ligt daar aan den voet van den berg 90 M. boven zee, het plateau ruim 140 M. hooger, dat is ruim 230 M. boven zee. Nabij den bovenkant staat plaatselijk de rots ongeveer te lood, overigens bedraagt de hellingshoek, door ophooping van afgestorte kalksteenblokken en -puin, gemiddeld 30°, en er zijn ook eenige kleine onregelmatige terrasvormige uitstekken. Waar de steilte niet zeer

[1]) Verschuiving N°. XXXI op de kaart „CVII en DII" van den Geologischen Atlas van Java en Madoera.

groot is vindt men, gelijk op het plateau, de kalksteen veelal bedekt met een meer of minder humushoudende, geelachtige klei, verweeringsprodukt, ongetwijfeld, van in vroeger tijden gevallen vulkanische asch. Deze klei kan plaatselijk, waar zij eenigszins tegen de directe inwerking van den regen beschut is, met calciet geïmpregneerd, brokstukken kalksteen tot eene breccie verbinden. Ook waren vele beenderen in de verharde klei van zulk een breccie geheel of ten deele opgenomen. Overigens lagen zij, slechts oppervlakkig met een kalkconcretie overtrokken, in de leemachtige klei.

De eerste vondst dateert van 1889. In het begin van dat jaar, opgravingen doende in grotten der omstreken van Pajakombo, in de Padangsche Bovenlanden op Sumatra, mocht ik door de vriendelijkheid van Dr. C. Ph. Sluiter, destijds te Batavia en bestuurslid der Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië, fossiele beenderen ontvangen, door den Heer B. D. van Rietschoten, bij de exploratie van de beschreven kalksteenrotsen, ten behoeve eener marmerontginning [1]), aangetroffen en aan de Vereeniging gezonden. De Heer van Rietschoten meende daarin overblijfselen van „den schedel van een mensch of menschachtig dier" te zien. Na de zeer fragmentaire beenderen in hoofdzaak geprepareerd en samengevoegd te hebben, erkende ik daarin den niet geheel volledigen schedel met het rechter hoekgedeelte der onderkaak [2]), benevens weinige andere skeletfragmenten van een van het Maleische type sterk afwijkenden fossielen mensch. Voorloopig scheen mij met het Papoeatype de overeenkomst het grootst te zijn [3]).

Deze belangrijke vondst van den Heer van Rietschoten gaf mij aanleiding, het volgend jaar bij Wadjak opgravingen te verrichten. De vindplaats van den Wadjak-schedel I bleek te liggen nabij het midden van het beschreven gedeelte der berghelling en op ongeveer 50 M. boven de vlakte, in een terrasvormig uitstek, gevormd door rotsblokken en kleinere steenen met breccie en klei [4]). Daarin werden alsdan nog fossiele beenderen aangetroffen van een tweede individu, Wadjak II, met onmiskenbaar gelijksoortige vormeigenschappen als het eerste, welke, evenals de eerste schedel na verdere

---

[1]) De marmerontginning, vroeger genaamd „Wadjak", bestaat thans voort onder den naam „Marmoyo".

[2]) Natuurkundig Tijdschrift van Nederlandsch-Indië. Batavia. Deel 49. (1889), p. 209—211.

[3]) Het overige der onderkaak en de meeste tandkronen der bovenkaak moeten bij het opgraven verloren zijn geraakt.

[4]) Eene ruimte tusschen steenblokken aldaar had ik aanvankelijk, ten onrechte, voor eene rotsspleet aangezien.

bewerking, mij nog grooter overeenkomst met den tegenwoordigen Australiër dan met het Papoea-ras deden vinden [1]). Naast een groot deel van de bovenkaak en een groot deel van de onderkaak [Fig. 4—Fig. 7; het voorhanden stuk rechter ramus mandibulae is niet afgebeeld], zes losse tanden (welke in de onderkaak ontbreken) en verschillende groote en kleine fragmenten der calvaria, waaraan de belangrijkste vormeigenschappen nog wel te herkennen zijn, werden eenige stukken van overige skeletdeelen gevonden en enkele beenderenfragmenten van zoogdieren, zoover is na te gaan niet onderscheiden van tegenwoordig op Java levende soorten. Al de gevonden beenderen verkeerden in denzelfden toestand van fossilisatie; alle werden verspreid, in onsamenhangenden, fragmentairen toestand aangetroffen, geheel omkorst, voor zoover zij niet in een breccie waren opgenomen, met een ongelijkmatig dikke, een ruwe oppervlakte vormende, geelachtig grijze, kleihoudende kalkconcretie. Deze was zoo vast met de daaronder gelegen witte beenzelfstandigheid verbonden, dat zij daarmede mechanisch een geheel uitmaakte; alleen het verschil in kleur kan helpen bij hare verwijdering. De incrustatie was op de meeste plaatsen dun genoeg, dat de algemeene eigenschappen van den vorm der beenderen er nauwelijks door gemaskeerd werden. Dat het soortelijk gewicht der beenderen van deze fossiele australoiede menschen hoog is en de fossilisatie een zeer volkomene, wordt men reeds gewaar bij het in de hand nemen; zij zijn inderdaad zwaar en koud op het aanvoelen als steen. Naar de voorhanden overblijfselen kan het gewicht der geheele onderkaak van den Wadjak-mensch II op 230 G. berekend worden, dat is een honderd gram meer dan het maximum van een tegenwoordigen Australiër. Ten deele is dat meerdere gewicht wel op rekening te stellen van de zeer buitengewone grootte en robusticiteit der fossiele kaak, maar zeker is het soortelijk gewicht toch wel een derde hooger dan van versch been [2]).

Daar directe gegevens ter bepaling van den geologischen ouderdom ontbreken — ook artefakten werden niet gevonden — heeft eene andere vondst bij Wadjak bijzondere beteekenis. Aan den oostelijken hoek van het beschreven rechtlijnig gedeelte van den berg, bij ongeveer 120 M. hoogte boven de vlakte, in gelijk-

---

[1]) Verslag van het Mijnwezen, over het Derde Kwartaal 1890. Batavia 1890.

[2]) Het s.g. der beenderen van den fossielen mensch van La Chapelle-aux-Saints is slechts in de verhouding $1:1^1/_5$ toegenomen, in plaats van $1:1^1/_3$ als vermoedelijk dat bij de fossiele Wadjak-menschen. Dit ligt wel vooral aan de gunstiger voorwaarden der fossiliseering voor deze laatste beenderen, maar wijst toch ook zeker op groote oudheid.

soortige breccie en klei, en weder op een klein terrasvormig uitstek (waarachter hier de ingang eener met dezelfde kleisoort bijna geheel opgevulde, U-vormig rondloopende, 40 M. lange grot, waarin niets belangrijks gevonden werd, gelegen was), groef ik in hetzelfde jaar menschelijke skeletdeelen op, die in geheel verschillenden toestand van fossilisatie verkeeren en een geheel ander anthropologisch karakter bezitten. Het is ook zeker dat deze overblijfselen als skelet door menschenhand bewerkt werden, want het buitenvlak der schedelbeenderen (niet het binnenvlak), de tanden en ook andere beenderen waren met een vast aanhechtend okerlaagje rood geverfd. Daarna moeten de beenderen gebroken zijn, want de fragmenten waren op soortgelijke wijze geïncrusteerd en ten deele in breccie opgenomen als de beide Australoieden. Zij zijn evenwel veel minder versteend en soortelijk lichter dan deze. Bovendien heeft de schedel, in tegenstelling met gene dolichocephalen, duidelijk een brachycephalen vorm gehad. Aangezien deze fossiele mensch toch zeker als praehistorisch te beschouwen is, moeten de onder gelijke omstandigheden gefossiliseerde beide anderen, wier beenderen zooveel meer versteend zijn, waarschijnlijk van plistocenen tijd zijn.

De aanwezigheid van menschelijke overblijfselen uit zeer verschillende tijdperken is wel daaraan toe te schrijven, dat die bergrand tot den oever van een vischrijk meer behoorde, [1]) het sterk gebroken zijn der beenderen wel aldus te verklaren, dat, in ver uiteengelegen tijden, eerst de twee aldaar levende proto-Australiërs en, veel later, het voor die waarschijnlijk bewoonde grot geplaatste skelet onder afstortend steenpuin, mogelijk bij aardbevingen, bedolven en verpletterd werden. In kalksteengebergten van Sumatra mocht ik eenige malen en eens ook in den Goenoeng Kidoel op Java het imposante natuurverschijnsel van het spontaan nederstorten van kalksteenrots en -puin van nabij aanschouwen. De groote hoeveelheid van het puin aan den voet en tegen de helling dier bergen levert het bewijs van de veelvuldigheid der steenstortingen. Aan kannibalisme kan het fragmentaire karakter der skeletdeelen niet worden toegeschreven; daarvoor zijn de breuken te talrijk. De onderkaak van Wadjak II, een zeer sterk been, was bijvoorbeeld in ten minste 5 groote stukken gebroken. Het voorkomen der overblijfselen telkens op een vlak gedeelte der helling, onder een steilte, en de omstandigheid dat Wadjak I, die, naar allen schijn, een vrouw was, Wadjak II, die zeker een man was, vergezelde; dat ook het *skelet*, op het andere vlakke

[1]) Kalkrijke wateren plegen vischrijk te zijn. De Râwâ Bening is dit nog en ongelooflijk vogelrijk, paradijsachtig ook door den plantengroei.

gedeelte, voor de grot, verbrijzeld werd, zijn tegen kannibalisme als oorzaak van den fragmentairen toestand der gebeenten sprekende feiten; die daarentegen zeer goed bij de andere verklaring passen. Om gelijke redenen zijn ook Carnivoren (Tijger, Adjag) niet verantwoordelijk te stellen voor het breken der beenderen. Men kan verder wel denken, dat bij de steeds voortgaande natuurlijke verandering van de berghelling vele stukken van de verbrijzelde skeletten verloren gingen.

De schedel van Wadjak I is ten deele met breccie-massa opgevuld en op eenige plaatsen defekt; ook hebben enkele beenderen eenigermate verschuivingen ondergaan. Dientengevolge kunnen sommige maten slechts indirect, andere niet genomen worden. De eersten zijn na eenige correctie meestal, wanneer namelijk het bedrag der verschuiving meetbaar is, nog met voldoende zekerheid te bepalen.

De algemeene vorm en de voornaamste afmetingen toonen onmiddellijk aan, dat men met een van het Maleische ras volstrekt afwijkend type te doen heeft. Dit springt reeds in het oog bij vergelijking van de norma lateralis met die van een op dezelfde oor-bregma-lijn geplaatsten typisch Javaanschen schedel (Fig. 1). Voor nadere vergelijking met onzen fossielen schedel komen, naar zijn vormeigenschappen, slechts in aanmerking de Papoea (in het algemeen de Melanesiër), de Australiër en de Tasmaniër, eene groep die een groot aantal vormeigenschappen gemeen heeft. Dat de Wadjak-mensch evenmin tot *Homo neandertalensis* nader in betrekking staat als die recente menschtypen behoeft tegenwoordig niet meer betoogd te worden [1]).

De fossiele schedel van Wadjak I is groot, zeer bijzonder voor eene vrouw, waarvan hij (naar de vergelijking met Wadjak II) waarschijnlijk afkomstig is. De grootste lengtemaat der calvaria, in millimeters, is 200. Deze wordt door vrouwelijke vertegenwoordigers der genoemde recente menschenrassen wel nooit, door mannelijke Australische schedels zelden bereikt (TURNER) [2]), en door zeer enkele met een paar millimeter overtroffen (DUCKWORTH) [3]). De grootste

---

1) Verwezen zij naar M. BOULE, L'Homme fossile de La Chapelle-aux-Saints. Paris 1913. Extrait des Annales de Paléontologie. (1911—1913), p. 231 e.v. en ook naar de verhandeling van BERRY en ROBERTSON, hieronder laatstelijk genoemd, p. 171 e.v., en A. KEITH, The Antiquity of Man, Chapter VIII. Londen 1920.

2) W. TURNER, Report on the Human Crania and other Bones of the Skeleton. Challenger Reports, Vol. X. (1884); Vol. XVI. (1886).

3) W. L. H. DUCKWORTH, A Critical Study of the Collection of Crania of Aboriginal Australians in the Cambridge University Museum, Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland, Vol. XXIII. (1894), p. 284, en Notes on Crania of Australian Aborigines. Ibid., Vol. XXVI. (1897), p. 204.

breedte is 145 (direct gemeten, zonder de noodige correctie, 150), de basion-bregmahoogte is 140. Ook deze maten liggen nabij de maxima van de te vergelijken groep. Voor den lengte-breedteindex vindt men aldus 72.5, voor den lengte-hoogteindex 70, voor den breedte-hoogteindex 96.5. De schedel is dus dolichocephaal en tapeinocephaal. [Fig. 2. Norma frontalis, en Fig. 3, Norma verticalis].

Naar de opgaven van BERRY, ROBERTSON, STUART CROSS en BÜCHNER [1]) waren bij 100 Australiërs, 86 Tasmaniërs en 191 Papoeas (van beide seksen) deze schedelmaten, minima, gemiddelden en maxima, in millimeters, en de gemiddelde indices; waarmede ik Wadjak I vergelijk, als volgt:

	Australiërs			Tasmaniërs			Papoeas			Wadjak I
Grootste lengte	164	181.8	199	163	180.3	198	157	177	197	200
Grootste breedte	120	130.7	143	125	135.1	145	112	128.4	146	145
Hoogte (basion-bregma)	115	129.7	144	117	130.3	140	118	131.7	143	140
Lengte-breedteindex		71.75			74.94			72.54		72.5
Lengte-hoogteindex		71.38			72.19			74.41		70
Breedte-hoogteindex		99.65			96.33			102.56		96.7

Hieruit blijkt wel de groote overeenkomst met deze groep van moderne menschtypen. De toenadering is het grootst tot de Australiërs en de Tasmaniërs, het geringst tot de Papoeas. Dit geldt ook voor andere vormeigenschappen van den schedel. De calvaria is kiel- of dakvormig gewelfd en de zijwanden zijn bijna vertikaal (Fig. 2. Norma frontalis), maar daarbij is de schedelhoogte toch betrekkelijk gering; de glabella en de wenkbrauwbogen zijn bijzonder sterk uitgedrukt; het voorhoofd is meer achteruitwijkend; de oog-

[1]) A. W. D. ROBERTSON, Craniological Observations on the Lengths, Breadths and Heights of a Hundred Australian Aboriginal Crania. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXI. (1912), p. 1. — RICHARD J. A. BERRY and K. STUART CROSS, A Biometrical Study of the Relative Purity of Race of the Tasmanian, Australian and Papuan. Ibid., p. 17. — RICHARD J. A. BERRY and A. W. D. ROBERTSON, The Place in Nature of the Tasmanian Aboriginal as deduced from a Study of his Calvarium. Part I. His Relations to the Anthropoid Apes, Pithecanthropus, Homo primigenius, Homo fossilis and Homo sapiens. Ibid. p. 41. — L. W. G. BÜCHNER, A Study of the Curvatures of the Tasmanian Aboriginal Cranium. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XXXIV. (1914), p. 128. — RICHARD J. A. BERRY and A. W. D. ROBERTSON, The Place in Nature of the Tasmanian Aboriginal as deduced from a Study of his Calvaria. Part II. His Relation to the Australian Aboriginal. Ibid., p. 144.

kassen zijn, naar verhouding hunner breedte, laag (in al deze eigenschappen overtreft Wadjak II nog den eerstgevonden schedel); de neusbeenderen zijn weinig prominent; de bovenkaak is meer prognaath en de bodem der neusholte gaat geleidelijk in de regio incisiva over, aan beide schedels komt zelfs een bijna volkomen sulcus praenasalis („Affenrinne") voor; de onderkaak is bijzonder sterk en de kin meer geprononceerd. In al deze eigenschappen staat de fossiele nog iets dichter bij den Australischen schedel.

Berry, Robertson en Stuart Cross hebben wel afdoend aangetoond, dat het tegenwoordig Papoea-type van de drie genoemde het minst zuivere en dat ook het Australische een heterogeen type is, hetgeen reeds door vele anthropologen, contra Schoetensack, Klaatsch [1]) e. a., werd aangenomen.

Berry stelt zich voor, dat een primitief Papoea-ras de stamvorm kan zijn van den meer zuiver gebleven, doch gedurende den langen tijd zijner isoleering veranderden Tasmaniër en ook van den door vermenging met een ander ras afwijkenden Australiër [2]).

G. Sergi [3]) neemt als gemeenschappelijken stamvorm een primitieven *Homo tasmanianus* aan, gekenmerkt door dakvormige verheffing der sutura sagittalis en zijdelingsche afplatting van de schedelwanden (lophocephalie), die niet onwaarschijnlijk in vroeg-plistocenen of zelfs aan het eind van den pliocenen tijd, via den Pacifischen Oceaan, uit Amerika zou gekomen zijn. In Tasmanië veranderde deze dan tot den recenten Tasmaniër, dien Sergi voorstelt *Hesperanthropus tasmanianus* te noemen. In Australië had, ook volgens Sergi, vermenging van den *Homo tasmanianus* met een ander, naar hij vermoedt polynesisch, ras plaats, waardoor de tegenwoordige Australiër ontstond.

Ik meen nu, in den fossielen *Homo wadjakensis* van Java, die in sommige opzichten primitiever vormeigenschappen van den schedel en de onderkaak bezit dan die tegenwoordige rassen, zulk een stam-

---

[1]) O. Schoetensack, Die Bedeutung Australiens für die Heranbildung des Menschen aus einer niederen Form. Zeitschrift für Ethnologie. Jahrgang 23. (Berlin 1901), p. 127.

H. Klaatsch in „Weltall und Menschheit". Band II. Berlin 1902. — H. Klaatsch. The Skull of the Australian Aboriginal. Reports from the Pathological Laboratory of the Lunacy Department. New South Wales Government. Vol. I, Part 3. Sydney 1908.

[2]) Richard J. A. Berry, A Living Descendant of an Extinct (Tasmanian) Race, Proceedings of the Royal Society of Victoria. Vol. XX. (New Series). Part. I. 1897. Vergelijk ook: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXXIV. (1914), p. 186.

[3]) G. Sergi, Tasmanier und Australier. *Hesperanthropus tasmanianus* spec. Archiv. für Anthropologie. Neue Folge, Band XI. (1912), p. 201.

vorm te mogen zien. Deze moet dan uit Azië oostwaarts getrokken zijn. Hoewel met den recenten Tasmaniër de gelijkenis zeker niet minder is dan met den tegenwoordigen Australiër, heb ik hem hier als proto-Australiër aangekondigd, omdat de autochthoon van het kleinste continent meestal als het hoofdtype der groep beschouwd wordt. Deze gelijkenis en die meer primitieve toestand mogen nog uit de nadere vergelijking en beschrijving blijken.

Wat in de eerste plaats den vorm der calvaria betreft, wordt weder met behulp der bepalingen van minima, gemiddelden en maxima, door Berry c. s., aan schedels van Australiërs en Tasmaniërs bevonden als volgt.

	Australiërs			Tasmaniërs			Wadjak I
1. Grootste schedellengte	164	181.8	199	163	180.3	198	200
2. Glabella-inionlengte	162	179.5	196	157	173.1	188	192
3. Calvariahoogte	79.5	95.1	108	87	97	108	100
4. *Calvariahoogte-index*	44.9	53	61.5	48.3	56.1	62.7	52
5. Afstand calvariahoogtevoetpunt tot glabella	88	101.1	123	85	101.9	115.5	123
6. Afstand bregmavoetpunt tot glabella	51.5	61.2	74	43	58.7	71.5	69
7. *Liggingsindex van calvariahoogtevoetpunt*	44.9	56.4	65.3	53.1	59	64.8	64
8. *Liggingsindex van bregmavoetpunt*	29.2	34.1	38.8	26	34	40.6	36
9. *Breedte-calvariahoogteindex*	60.3	72.7	85.4	65.9	72.2	79.2	69
10. Nasion-bregmaboog	116	126.8	143	113	126	143	136
11. Nasion-bregmakoorde	100	110.9	124.5	97	109.5	120	119
12. Glabella-lambdakoorde	161	178.7	194	162	173.2	189	190
13. Glabella-bregmaboog (frontale boog)	99	110.2	128	90	111.9	125	122
14. Glabella-bregmakoorde	95	108	121	87	105.2	118	115
15. Grootste afstand front. boog tot koorde	13	19.6	28	10	18.9	25	16
16. *Frontale krommingsindex*	12.5	18.1	24.5	10.3	17.9	23.3	13.9
17. Bregma-lambdaboog (parietale boog)	109	125.9	147	112	125.8	145	130
18. Bregma-lambdakoorde	98	114 6	137	99	113	127	113
19. Grootste afstand par. boog tot koorde	17	23.2	30.5	19	23.3	28	23
20. *Parietale krommingsindex*	15.3	20.2	25.2	17.3	20.6	24.7	20.6
21. *Glabella-bregmahoek* (BGI).	49°	54.8°	60°	51.5°	56°	64°	54°
22. *Frontale kromming* (glabella-bregma front. hoek)	123.5°	139.6°	153°	131.5°	139.5°	149°	148°
23. *Parietale kromming* (bregma-lambda par. hoek)	125°	135.7°	145°	125.5°	134.3°	141.5°	138°

De grootte van den fossielen schedel in aanmerking genomen, zijn de afwijkingen met de Australiërs en Tasmaniërs meestal gering. De glabella-inionlengte is dan, evenals de glabella-lambdakoorde, in verhouding tot de grootste schedellengte, in de beste overeenstemming met de Tasmaniërs, de calvariahoogte-index met de Australiërs. De glabella-lambdalijn, zoowel als de glabella-inionlijn zijn bij den Tasmaniër en bij Wadjak I ten opzichte van de „grootste schedellengte" korter dan bij den Australiër. Dit staat in verband met het uitpuilen van het achterhoofd. Bij Wadjak is dit laatste nog sterker, zoodat de lobus occipitalis van het cerebrum puntig uitliep.

Een belangrijker verschil bestaat daarin, dat het hoogtepunt der calvaria (N°. 7 der Tabel) bij den fossielen mensch van Wadjak I relatief veel meer naar achteren gelegen is dan gemiddeld bij die recente rassen, vooral het Australische. Dit beteekent, dat het voorhoofdsgedeelte van den schedel betrekkelijk laag gewelfd is; hetgeen ook blijkt uit de kleinheid van den frontalen krommingsindex (N°. 16) en de aanzienlijker grootte van den frontalen krommingshoek (N°. 22). Het verdient opmerking, dat in al deze punten de fossiele schedel even dicht of dichter dien van den Tasmaniër nadert als van den Australiër.

De betrekkelijk geringer ontwikkeling van het voorhoofdsgedeelte van den schedel is ook af te leiden uit de maat der „kleinste voorhoofdbreedte", die bij den 200 m.M. langen Wadjak-schedel I slechts 99 m.M. bedraagt (bij den tweeden schedel, die zeker nog langer was, 101 m.M.), terwijl bij Australiërs het maximum 104 en het gemiddelde 98 is in de bepalingen van DUCKWORTH, TURNER zelfs een maximum van 108 aantrof. Dit laatste ging gepaard met de grootste door TURNER in Australische schedels gevonden capaciteit, 1514 c.M.^{3} [1]).

Deze relatief geringer ontwikkeling van het voorhoofdsgedeelte moet op de capaciteit van de schedelkapsel ongunstigen invloed hebben, zooals feitelijk blijkt bij de capaciteiten van Australische schedels gevonden door directe meting.

Ook mag de ongunstige invloed der dakvormige verheffing, in vergelijking met even hooge schedels met ronde welving, op de capaciteit, die bij Australische schedels wordt waargenomen, bij de beoordeeling der capaciteit van Wadjak I niet verwaarloosd worden, hoewel hij hier niet bijzonder groot kan zijn.

---

[1]) Challenger Reports. Vol. X. (1884). Ook in 1897 (Some Distinctive Characters of Human Structure. Toronto Meeting of the British Association for the Advancement of Science) had TURNER onder 63 Australische schedels nog geen grooter capaciteit gevonden dan 1514 c.M^3, van dien schedel van Port Curtis in Queensland.

De lengte der schedelbasis, de basi-nasale lijn, meet 107 m.M. Bij 26 mannelijke Australische schedels vond DUCKWORTH als gemiddelde 101 m.M., bij 5 vrouwelijke 95, en als maximum 109; FLOWER [1]) bij 22 mannelijke Australische schedels 102.5, bij 9 mannelijke Tasmanische 100 en bij 14 vrouwelijke Australische, zoowel als bij 4 vrouwelijke Tasmanische schedels 95.5 m.M. De verhoudingen van die schedelafmeting tot de voornaamste overige afmetingen bij den fossielen schedel wijken niet af van die recente; daarin kan geen aanleiding tot afwijking van de grootte der capaciteit gelegen zijn.

Dat alles in aanmerking nemend en lettend op de dikte der schedelwanden, welke bij Wadjak I, nabij het bregma, 10 m.M. bedraagt, kan men uit de lengte, breedte en hoogte van den fossielen schedel zijne capaciteit bij benadering berekenen.

Naar de methoden van MANOUVRIER [2]), van LEE [3]) en van FRORIEP [4]) vind ik, met overweging van de boven aangeduide punten, dat de capaciteit van den Wadjak-schedel I waarschijnlijk ongeveer 1550 c.M.^{3} bedraagt.

Dat is een hooge capaciteit in vergelijking met die der Australiërs en Tasmaniërs. TURNER (1897) bepaalde het gemiddelde van mannelijke Australische schedels op 1280 en het maximum op 1514 c.M.^{3}, van vrouwelijke het gemiddelde op 1116 c.M^3. en het maximum op 1240 c.M^3. Het Tasmanische ras had misschien een 50 c.M hooger capaciteit. Waarschijnlijk waren de Wadjak-menschen grooter, althans zwaarder dan hunne schrale Australische nakomelingen,

[1]) W. H. FLOWER, On the Size of the Teeth as a Character of Race. Journal Anthrop. Institute of Great Britain and Ireland. Vol. XIV. (London 1885), p. 183.

[2]) L. MANOUVRIER, Sur l'indice cubique du crâne. Association française pour l'avancement des Sciences, 1880, p. 869. — De gemiddelde coëfficient 1.2 voor mannelijke Polynesiërs, Australiërs enz. werd gebruikt en de in Broca-maat berekende tot ware capaciteit herleid.

[3]) ALICE LEE, A First Study of the Correlation of the Human Skull. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Vol. 196. (1901), p. 225—264. Formules en tabellen, p. 243—247. De hierbij als factor noodige oor-bregmahoogte (auricular height) bedraagt 122 m.M. bij Wadjak I. Gebruikt werd de formule (p. 243) voor de mannelijke Naqada-Egyptische schedels, met welke de gelijkvormigheid relatief het grootst is (zie hoofdmaten, p. 246).

[4]) A. FRORIEP, Ueber die Bestimmung der Schädelkapazität durch Messung und Berechnung. Zeitschrift für Morphologie und Anthropologie. Band 13, p. 347. (1910). Gelijke uitkomst verkrijgt men ook naar de methode van H. WELCKER (Die Kapazität und die drei Hauptdurchmesser der Schädelkapsel bei den verschiedenen Nationen. Archiv für Anthropologie. Braunschweig 1886. Band 16, p. 1), na eenige, door den bijzonderen vorm van den fossielen schedel vereischte wijzigingen der hoofdmaten.

zoodat zij in de verhouding van het neurocranium tot het splanchnocranium deze moderne rassen niet overtroffen.

Om die verhouding te schatten heeft ARTHUR KEITH [1]) de vergelijking der capaciteit met de „palatal area" ingevoerd, dat is met de grootte van het vlak begrensd door den buitenrand der tandkronen van de bovenkaak en de achter de 3de molares getrokken raaklijn. Hij vond dat vlak van den bovensten tandenboog bij een vrouwelijken chimpanse-schedel, met 320 c.M³ capaciteit, gelijk aan 36.5 c.M²; op 1 c.M² „palatal area" kwam derhalve 8.7 c.M³ hersenruimte. Aan den schedel van een Tasmaniër was het bovenste tandenboogsvlak 36.7 c.M², de capaciteit van dezen schedel was 1350 c.M³, hetgeen eene verhouding geeft van 1 : 36.8. Bij den *Homo neandertalensis* van Gibraltar [2]) vond KEITH voor deze waarden 31.6 c.M², en 1200 c.M³ en de verhouding 1 : 38, maar bij den Aurignac-mensch van Combe Capelle is de verhouding 1 : 53, ongeveer gelijk aan die van den tegenwoordigen Engelschman, namelijk 1 : 56.3, bij 26.6 c.M² bovenste tandenboogsvlak en 1500 c.M³ capaciteit.

Het tandenboogsvlak nu van den Wadjak-mensch II is met vrij groote nauwkeurigheid — daar alleen de kronen der snijtanden en de kroon van den rechter m_1 ontbreken, — te bepalen op 41.4 c.M². Dat van Wadjak I, waarin slechts weinig tandkronen zijn bewaard gebleven, meet ongeveer 35 c.M². Door zijn relatieve kleinheid onderscheidt zich dit gebit onmiddellijk in het oog loopend van dat van Wadjak II, hetgeen een der vormeigenschappen is die mij doen aannemen, dat de het eerst gevonden fossiele mensch een vrouw, de tweede een man was. Andere vrouwelijke eigenschappen van Wadjak I zijn: de meer gereduceerde vorm der tanden (de bovenste m_2 en m_3 zijn bijna volkomen drieknobbelig), de kleinere afmetingen der vergelijkbare schedeldeelen, ofschoon niet in die mate kleiner als het gebit, de minder uitgedrukte wenkbrauwbogen en het niet even sterk wijkend voorhoofd, de, met betrekking tot hunne breedte, hooger oogkassen, de iets geringere ontwikkeling der spieroorsprongen, de meer afgeronde vorm van het achterhoofd, de iets geringer lophocephalie en dolichocephalie, zoover deze aan de fragmenten van den tweeden schedel te beoordeelen zijn.

---

[1]) ARTHUR KEITH, The Antiquity of Man. (London 1920), p. 97, 151, 328.

[2]) Bij den *Homo neandertalensis* van La Chapelle-aux-Saint bereken ik, naar de reconstrueerende teekening van BOULE, een bovenste tandenboogsvlak van 38 c.M², hetwelk met 1600 c.M³ schedelcapaciteit de verhouding 1 : 42 geeft. Maar het normale tandenboogsvlak is, naar de vroegtijdig grootendeels tandeloos geworden opperkaak van dezen man (of vrouw?), mogelijk te klein aangenomen.

Komen dan bij de fossiele vrouw van Wadjak op 1 c.M^2 van het vlak van den bovensten tandenboog 44.3 c.M^3 hersenruimte, men kan aannemen, dat bij den man, die een veel sterker gebit had, maar ook een grooteren hersenschedel, deze verhouding kleiner was. Zijne schedelcapaciteit 100 c.M^3 hooger stellend dan die van de vrouw, hetgeen wel een redelijke schatting is, vind ik voor hem de verhouding 1 : 40. Zooveel blijkt in ieder geval met zekerheid, dat *Homo wadjakensis* in de betrekkelijke grootte der twee hoofdafdeelingen van den schedel, het neurocranium en het splanchnocranium, zich bij die meest primitieve tegenwoordige menschentypen en ook bij den plistocenen *Homo neandertalensis* aansluit.

Nog in menig ander opzicht bestaat onmiskenbare aansluiting van *Homo wadjakensis* bij de tegenwoordige Australische menschengroep. Maar hij vertoont ook afwijkingen van deze, die ten deele zeker op een meer primitieven toestand berusten.

Het eene zoowel als het andere moge nog uit de beschrijving van eenige andere vormeigenschappen blijken.

De sterke uitpuiling van de glabella en de wenkbrauwbogen, ook bij de vrouw van Wadjak, hoewel niet in gelijke mate als bij den man, is zeker een australoiede eigenschap, maar de bovenoogkuilsche randen zijn wel iets minder dik afgerond dan bij den recenten Australiër; dit geldt ook voor de buitenste omranding van de orbita. Deze laatste is bij Wadjak I 33 m.M. hoog en 42 breed, zoodat de orbitale index 78.6 bedraagt. Aan den mannelijken schedel zijn deze afmetingen en index 30, 40 en 75; merkwaardigerwijze is de oogkas bij den man kleiner, maar in den lageren index dan bij de vrouw ligt volgens Turner een belangrijk sexueel vormverschil der Australiërs. Hij vond bij deze voor den gemiddelden orbitalen index 84, voor dien van twintig mannen 81.4 en van negen vrouwen 90; Flower, aan een-en-vijftig Australische schedels, een gemiddelden index 80.9, Quatrefages en Hamy, aan een-en-dertig schedels, een gemiddelden index 78.8. De interorbitale breedte van Wadjak II is ten minste 29 m.M. Turner vond als gemiddelde aan mannelijke Australische schedels 24.5 en als maximum 28 m.M.

De neuswortel ligt diep ingezonken (bij Wadjak II het meest) en de neusrug is zeer vlak, in dwarse richting afgerond. De apertura piriformis van Wadjak I meet in de breedte 30, (Wadjak II 32), in de hoogte 27 m.M., waaraan de index 111 beantwoordt. Deze index beweegt zich aan Australische schedels, volgens Klaatsch, tusschen 82 en 130; bij Europeanen is hij gemiddeld 70. De spina nasalis is kort en stomp. De neushoogte is bij Wadjak I 50, de neusbreedte 30 m.M. (bij Wadjak II 32), de nasale index 60. Aan Australische

schedels werden voor dezen nasalen index als gemiddelden gevonden: 57.9 door QUATREFAGES en HAMY ($N = 31$), 56.9 door FLOWER ($N = 31$), 53.5 door TURNER ($N = 21$), 55.6 door DUCKWORTH $N = 38$) met het maximum 65.1.

De zijkanten der neusopening zijn niet scherp, doch, gelijk in den regel aan Australische schedels, stomp en afgerond, vooral nabij den overgang in den bodem der neusholte. De aan Australische schedels veel voorkomende, meer of minder geleidelijke overgang van dat bodemvlak in het incisivale vlak is bij *Homo wadjakensis* een volkomene; daarbij zet zich van den buitenrand der neusopening een lijnvormige verhevenheid op laatstgenoemd vlak voort, boogvormig naar onder en binnen, die zich op 6 m.M. beneden den bodem der neusholte verliest. Dat is een overgangsvorm tusschen het infantiele type van den onderrand der apertura piriformis en den sulcus praenasalis der Anthropoieden, dien men als „Affenrinne" bestempelen kan en die ongetwijfeld in verband staat met het sterke alveolaire prognathisme van *Homo wadjakensis* [1]). Het prognathisme, dat gemeten wordt door de relatieve lengten der basi-alveolaire en basi-nasale lijnen, den „gnathic index" van FLOWER, dien hij aan Australische schedels gemiddeld 103.6 bevond, terwijl TURNER een (vrouwelijk) minimum van 92 en een (mannelijk) maximum van 108 aantrof, kan bij Wadjak I niet nauwkeurig bepaald, wel benaderend door den index 91 aangegeven worden. De kleinheid van dezen index versterkt mij weder, den eerst gevonden fossielen schedel als vrouwelijk te beschouwen. Het alveolair prognathisme [Fig. 1. Norma lateralis van Wadjak I en Fig. 4. Boven- en onderkaak van Wadjak II] is niet gering.

Een vormeigenschap, waardoor *Homo wadjakensis* zich bijzonder onderscheidt is de buitengewoon groote breedte van den tandenboog in de bovenkaak, met betrekking tot de lengte. [Fig. 6]. De maximale breedte tusschen de buitenranden der kronen van de 2[de] bovenste molares is bij Wadjak II 81, bij Wadjak I 71 m.M. Daarbij is de lengte der rij van vijf kiezen, de „dental length" van FLOWER, aan den mannelijken schedel slechts 50 en aan den vrouwelijken schedel 47 m.M. In Australische schedels vond TURNER [2]) als maximum van breedte aan de 2[de] bovenste molares 73, als maximum van dentale lengte 51 m.M. Bij de fossiele Wadjak-menschen staan de breedten

---

[1]) Vergelijk over deze vormen van den onderrand der apertura piriformis: RUDOLF MARTIN, Lehrbuch der Anthropologie. Jena 1914, p. 845 e.v.

[2]) Sir WILLIAM TURNER, The Relation of the Dental Arcades in the Crania of Australian Aborigines. Journal of Anatomy and Physiology. Vol. 25. (1891), p. 461—472.

tot de lengten als 1.62 en 1.51 : 1. Met de grootste breedte over de molares stemt ongeveer de palato-maxillaire breedte overeen. Deze is 82 m.M. bij Wadjak II en 70 m.M. bij Wadjak I. Tot de dentale lengten staan deze breedten als 1.64 en 1.49 : 1. DUCKWORTH bepaalde aan elf mannelijke Australische schedels de palato-maxillaire breedte op gemiddeld 64.9 en de dentale lengte op gemiddeld 46.4; deze afmetingen staan tot elkander als 1.40 : 1. Aan een vrouwelijken schedel waren deze afmetingen en verhouding 63, 46 en 1.37 : 1. Het grootst, nl. 1.52, was de verhouding aan een mannelijken schedel met 70 m.M. palato-maxillaire breedte en 46 m.M. dentale lengte. De gemiddelde dentale lengte, door FLOWER [1]) bepaald aan twee-en-twintig mannelijke Australische schedels, was 45.9 en aan veertien vrouwelijke 44 m.M., aan negen mannelijke Tasmanische schedels 47.5 en aan vier vrouwelijke 44 m.M.

De dentale index van FLOWER (dentale lengte $\times$ 100 : basislengte) was 44.8 aan Australische en 47.5 aan Tasmanische mannelijke schedels, 46.1 aan Australische en 48.7 aan Tasmanische vrouwelijke schedels. Aan den schedel van Wadjak I is deze index 44, de dentale lengte dus relatief klein, vermoedelijk bij Wadjak II nog kleiner.

Aan den fossielen schedel van Gibraltar is de breedte tusschen de buitenranden der 2de bovenste molares 71 mM. volgens KEITH, de dentale lengte naar zijne afbeeldingen (gem. van linker- en rechter tandenrij) 45 m.M. [2]). De breedte staat tot de lengte als 1.57 : 1. Bijna volkomen gelijke verhouding, 1.56 : 1, bij 75 m.M. breedte en 48 m.M. dentale lengte, vertoont de bovenste tandenboog van den fossielen mensch van La Chapelle-aux-Saints in de reconstructie van BOULE [3]). In die groote relatieve breedte van den bovensten tandenboog sluit derhalve *Homo wadjakensis* zich bij *Homo neandertalensis* aan.

Dat geldt evenwel alleen voor de grootste (aan de molares gemeten) breedte van den bovensten tandenboog, de vorm van dezen boog is zeer verschillend. Terwijl namelijk bij den Neandertal-mensch de kromming van den boog zich naar voren regelmatig voortzet, verandert in het bovengebit van *Homo wadjakensis*, vooral van het mannelijk individu, de booglijn, naar voren van de molares, van vorm. De drie molares liggen in een parabolische lijn van grooter parameter, de voorste helft van het gebit (de praemolares, canini, en incisivi) in een soortgelijke lijn van kleiner parameter, zoodat voor de rij

[1]) FLOWER, l.c., p. 186.

[2]) KEITH, l.c., p. 149–151.

[3]) MARCELLIN BOULE, L'Homme fossile de la Chapelle-aux-Saints. Extrait des Annales de Paléontologie. (1911—1913). Paris 1913, p. 100, fig. 60. De dentale index (FLOWER) was slechts 38.

der molares de tandenboog zich ongeleidelijk versmalt. De parabolische lijn van de voorste gebitshelft valt slechts weinig buiten de bijna gelijkvormige lijn waarin de geheele tandenboog der onderkaak gelegen is. Inderdaad steekt de voorste gebitshelft der bovenkaak aan de praemolares weinig, (aan de incisivi natuurlijk niet) buiten die van de onderkaak uit, wel steken de bovenste molares sterk buiten de onderste molares uit. De breedte tusschen de buitenranden der onderste 2de molares is slechts 69 m.M , zoodat aldaar het gebit in de bovenkaak 12 m.M. breeder is dan in de onderkaak (bij Australiërs — welk ras in dit opzicht andere overtreft — vond TURNER als maximum 8 m.M.). Het gevolg van deze eigenaardige verhouding der beide tandenbogen is, dat de linguale knobbels van de kronen der molares in de bovenkaak op de buccale knobbels van die in de onderkaak scheef van binnen en boven naar buiten en onder zijn afgeslepen, terwijl daarentegen in de bovenkaak de buccale knobbels, in de onderkaak de linguale knobbels van de kronen de 2de en 3de molares niet of zeer weinig en de kronen der 1ste molares althans buccaal en linguaal ongelijk, de onderste zeer scheef zijn afgeslepen.

Gebitsvormen die op den beschreven vorm gelijken worden niet zelden, hoewel misschien niet zoo uitgedrukt, in Australische en ook in Maleische schedels aangetroffen; maar het gebitstype van den Neandertal-mensch is een geheel ander. Ook de molare helft van den bovensten tandboog steekt daar slechts weinig buiten die der onderkaak uit; beide bogen zijn gelijkvormig en dekken elkander veel meer, en de afslijping van de kronen heeft over het geheele kauwvlak meer gelijkmatig, horizontaal plaats. Men mag aannemen, dat het voedsel van *Homo neandertalensis* van anderen aard was als dat van *Homo wadjakensis* en van de Australiërs. Dit ras leeft hoofdzakelijk van dierlijk voedsel; mogelijk was de levenswijs van *Homo neandertalensis* meer vegetarisch. In verband hiermede is het van beteekenis, dat bij een door de medewerking van mijnen broeder, Dr. V. DUBOIS verricht onderzoek met X stralen bevonden werd, dat de tanden van *Homo wadjakensis* wortels bezitten en pulpaholten, die in vorm en grootte bij het Australisch type behooren en volstrekt afwijken van het taurodonte type der Neandertal-menschen.

Ik stel mij voor, de onderkaak en ook de tanden in eene latere mededeeling uitvoeriger te bespreken. Thans zij evenwel van de belangrijkste vormeigenschappen het volgende vermeld.

De tanden zijn over het geheel genomen groot, hoewel zij door die van menigen Australiër nog overtroffen worden. De 2de en 3de bovenste molares vertoonen reductieverschijnselen, vooral bij Wadjak I.

De onderkaak [Fig. 7 en Fig. 8] is een zeer sterk been, duidelijk

naar een op het Australische gelijkend type gebouwd. Het corpus mandibulae is, vrij gelijkmatig, hoog (40 m.M. aan de symphyse van Wadjak II. Gemiddeld bij 7 Australiërs 33, maximum 42 volgens FRIZZI) [1]) en dik. De ramus is bijzonder breed (aan de smalste plaats 46.5 m.M. bij Wadjak II. Bij 7 Australiërs, volgens FRIZZI, gemiddeld 37, maximum 40). Dit geldt vooral voor de onderkaak van Wadjak II, die ik als mannelijk beschouw, maar tot zekere hoogte ook voor de andere mandibula, waarvan slechts weinig is bewaard gebleven.

De symphyse- of kinhoek (gevormd door de infradentale-pogoniumlijn en de basislijn) meet 96°. Hoewel een zeer ontwikkelde protuberantia mentalis aanwezig is, valt toch nog de loodlijn, uit het infradentale of incision neergelaten, 3 m.M. voor het meest uitstekend punt van deze, het pogonium. Denkt men zich dit, als een afzonderlijke vorming zich voordoend uitsteeksel weg, dan zou de kinhoek 102° bedragen. De andere symphyse- of kinhoek, die met betrekking tot de alveolairrandlijn, meet 80°. Hij zou 86° bereiken als de protuberantia-opzetting niet bestond. Bij de Neandertal-mandibulae, die geen of een zeer geringe protuberantia bezitten, is de hoek toch nog belangrijk grooter: La Naulette 94°, Spy 106°, Mauer 105°. Aan 7 Australische kaken vond FRIZZI (evenals WELCKER aan 15) dezen hoek gemiddeld 83°, het maximum was 94°. Maar deze groote hoek der Australiërs is ook gedeeltelijk toe te schrijven aan de meestal geringe ontwikkeling der protuberantia mentalis. De w a r e hellingshoek van het corpus mandibulae aan de symphyse (zonder dat uitsteeksel) mag bij Wadjak II toch bijzonder groot genoemd worden. Daarom snijdt ook de „Korrekturvertikale" van FRIZZI, de loodlijn op de alveolairrandlijn rakelings langs het diepste punt der kinconcaviteit getrokken, slechts even in de protuberantia van Wadjak II. Bijzonder merkwaardig aan deze fossiele mandibula is verder nog de tamelijk scherpe onderrand en de ligging *achter* dien rand, op 23 m.M. van elkander, van kleine fossae digastricae, die aan den toestand bij *Hylobates syndactylus* doen denken.

Ten slotte moge nog gewag gemaakt worden van eene andere vondst van een tot het Australisch ras in betrekking staand menschelijk fossiel, den schedel van Talgai in Queensland, Australië, die in 1884 ontdekt, in 1914 door T. W. E. DAVID en J. T. WILSON [2])

---

[1]) E. FRIZZI, Untersuchungen am menschlichen Unterkiefer mit spezieller Berücksichtigung der Regio mentalis. Archiv. für Anthropologie. N. F. Band IX. (1910), p. 252—286.

[2]) Reports of the British Association for the Advancement of Science. Sydney Meeting. (1914), p. 531. — Vergelijk ook „Nature". London 1915, p. 52.

aangekondigd en in 1918 door STEWART ARTHUR SMITH [1]) uitvoerig beschreven werd. Die schedel, van een onvolwassen individu (daar m_3 nog niet was doorgebroken), hoewel in den grond in tallooze stukken gebarsten en uitgezet, aldus gedeformeerd, is toch duidelijk als van den tegenwoordigen Australiër in zijn algemeen voorkomen niet afwijkend te herkennen. De geheele schedel en ook het palatum laat evenwel nauwelijks eenige betrouwbare metingen toe. Aan de tandkronen, iedere op zich zelf, kon dat nog geschieden, maar de meeste zijn meer of minder sterk van elkander geweken; de *schijnbare* „palatal area" overtreft aldus aanzienlijk de *ware*, welke niet grooter is geweest dan die van den tegenwoordigen Australiër. SMITH stelt zich voor, dat de (bovenste) caninus, op analoge wijze als in het gebit der apen, hoewel zonder interstitieele tusschenruimte, met de punt tusschen den ondersten caninus en den ondersten eersten praemolaris indrong. Ik meen dit te moeten betwijfelen, op grond van vergelijking met het gebit van Wadjak II. De wrijvingsfacetten aan den bovensten caninus, door SMITH beschouwd als ontstaan door contact met de genoemde tanden *der onderkaak*, komen overeen met facetten aan den caninus in de Wadjak-maxilla, waar zij duidelijk als interstitiaire wrijvingsfacetten met de i_2 en pm_1 *der bovenkaak* te herkennen zijn. Op een andere plaats in zijne verhandeling heeft SMITH een daarvan dan ook, m. i. terecht, als zoodanig beschouwd. Ten onrechte laat hij den caninus 7 m.M. zakken, totdat de bovenrand zijner kroon in eene lijn met den bovenrand der kroon van pm_1 naast hem komt te liggen. Een zoo groote tandkroon toch als die van den Talgai-caninus ligt steeds belangrijk boven de lijn der praemolares, bij Wadjak II 3 mM. De caninus kan dus niet zoover naar beneden gereikt hebben als in de voorstelling van SMITH noodig is. De caninus van Wadjak, die treffend op die van Talgai gelijkt, is ook even breed als deze laatste en ware hij aan den top nog zoo weinig afgestompt als de caninus van den „boy" van Talgai, dan zou hij ook wel even puntig zijn en weinig korter dan deze. Kan ik daarom niet met SMITH een primitief karakter aan den fossielen, overigens ook volgens hem typisch Australischen schedel van Queensland toeschrijven, zoo is deze toch van groote beteekenis, daar verschillende omstandigheden, door SMITH genoemd, er op wijzen, dat de Australische mensch met *Canis dingo* reeds naast thans uitgestorven Buideldieren, die men als plistoceen beschouwt,

---

[1]) STEWART ARTHUR SMITH, The Fossil Human Skull found at Talgai, Queensland. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Vol. 208, pp. 351—387. 7 Plates. Londen 1918.

EUG. DUBOIS: „De proto-Australische fossiele Mensch van Wadjak, Java".

PLAAT I.

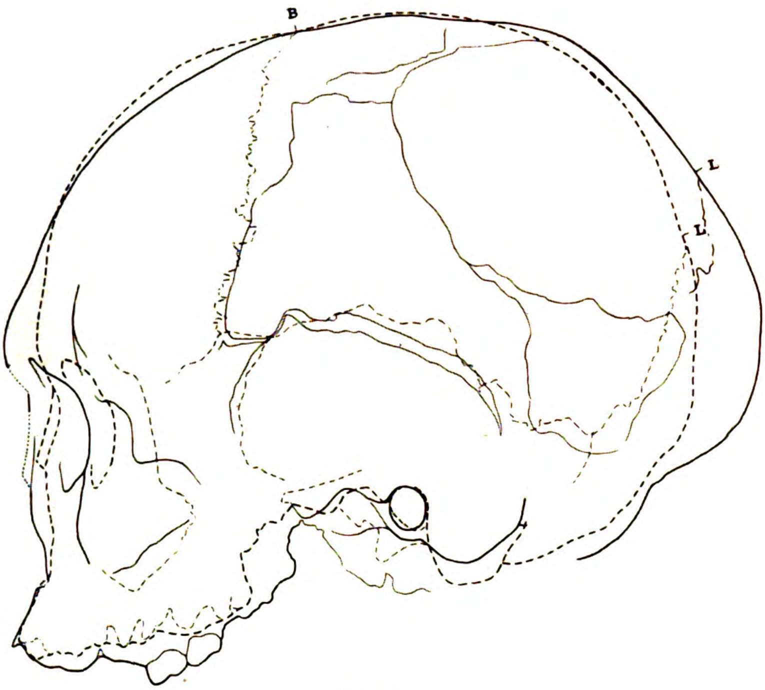


Fig. 1.

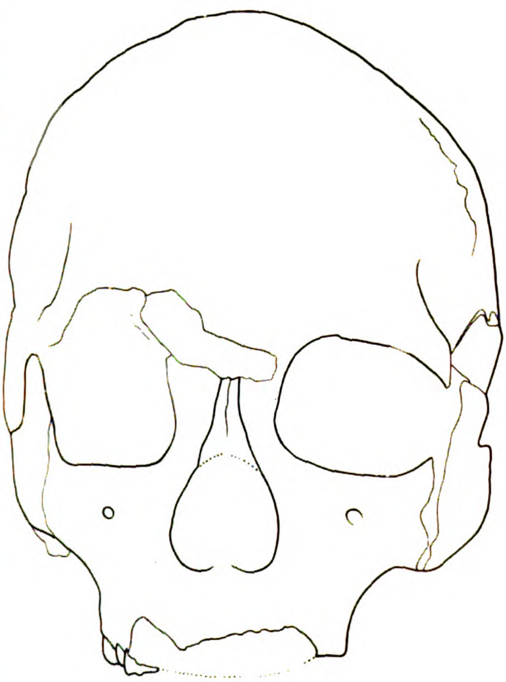


Fig. 2.

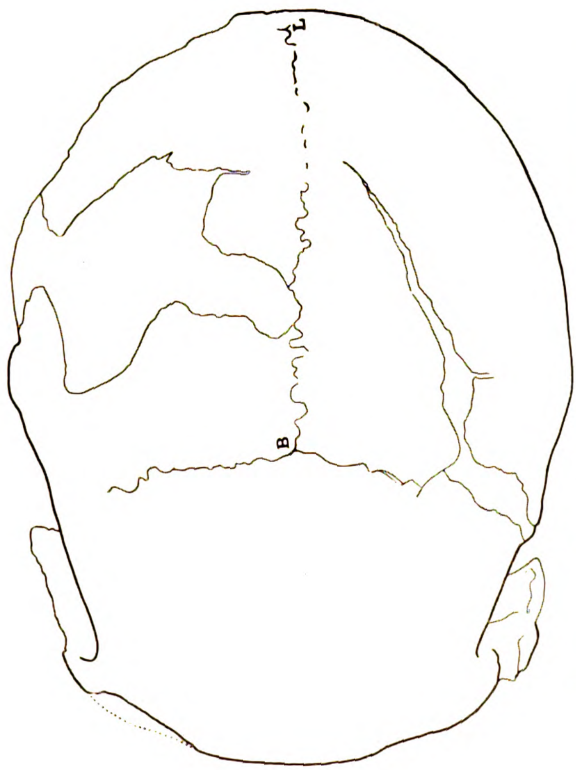


Fig. 3.

in het kleinste vasteland leefde. Daar de genoemde echte *Canis*-soort, als de eenige groote placentale zoogdiersoort van Australië, buiten den Mensch, wel niet anders dan met dezen uit Oost-Azië kan gekomen zijn, werpt de ontdekking te Talgai ook eenig licht op den geologischen ouderdom van den fossielen Mensch van Wadjak.

VERKLARING DER PLATEN.

PLAAT I.

Fig. 1. Wadjak I. Norma lateralis van den schedel. Als horizontaal het „oor-oogvlak" aangenomen. Gestippelde omtrek van een typisch Javaanschen schedel.

Fig. 2. Wadjak I. Norma frontalis van den schedel. Als horizontaal het „oor-oogvlak" aangenomen.

Fig. 3. Wadjak I. Norma verticalis van den schedel. „Oor-oogvlak".

Figuren 1—3 in benaderend $^{1}/_{2}$ nat. gr.

PLAAT II.

Fig. 4. Wadjak II. Maxilla en mandibula. Linker zijde. Als horizontaal de alveolairlijn.

Fig. 5. Wadjak II. Maxilla en mandibula. Van voren. Als horizontaal de alveolairlijn.

Fig. 6. Wadjak II. Maxilla van onderen. Alveolair-vlak. De kronen van den rechter p_2 en van de linker m_2 en m_3 moeten 1 m.M., de kroon van den linker p_2 moet 0.5 m.M. meer naar buiten liggen, in de figuren 4, 5 en 6, wegens deformatie tot de dubbele bedragen in het origineel.

Fig. 7. Wadjak II. Mandibula van boven. Alveolair-vlak.

Figuren 4—7 in $^{1}/_{2}$ nat. gr.

Fig. 8. Vertikale doorsneden in de symphyse-lijn der mandibula van Wadjak II (volle lijn), ***Homo heidelbergensis*** (onderbroken lijn) en Australiër (stippel-lijn), daarnaast Franschman. De beide laatste naar BOULE (l. c., p. 88, Fig. 56). Alle naar gipsafgietsels, behalve de Mauer-kaak, welke naar afbeelding van het origineel (O. SCHOETENSACK, Der Unterkiefer des Homo Heidelbergensis. Jena 1908, Tafel 8, Fig. 20 en Tafel 13, Fig. 48).

Nat. gr.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet, mede namens den Heer P. H. v. CITTERT, een mededeeling over: „*De algemeene relativiteitstheorie en het zonnespectrum*".

Van de drie door EINSTEIN genoemde gevolgtrekkingen uit de algemeene relativiteitstheorie, welke zouden kunnen dienen om te beoordeelen of die theorie inderdaad beter dan de oude denkbeelden beantwoordt aan de resultaten der waarneming, zijn er twee, die den toets met gunstigen uitslag schijnen te hebben doorstaan. Omtrent de derde — een stelselmatige verschuiving der Fraunhoferlijnen naar het rood — verkeert men nog in het onzekere.

Oorzaak van die onzekerheid is niet de kleinheid van het te verwachten effect. Verschuivingen van Fraunhoferlijnen ten opzichte van de correspondeerende lijnen in de spectra van aardsche lichtbronnen zijn in groot aantal geconstateerd; zij zijn van de zelfde orde van grootte als de „gravitatieverschuiving" die door de relativiteitstheorie wordt geëischt, en deze is ongeveer tienmaal zoo groot als de eenheid (0.001 Å) waarin men gewoon is de gemeten verschuivingen uit te drukken. Maar het eenvoudig verband tusschen verplaatsing en golflengte, dat volgens de relativiteitstheorie zou moeten bestaan, komt in de directe waarnemingen beslist niet tot uiting; en de moeilijkheid is dan ook gelegen in het feit, dat er verschillende invloeden zijn aan te wijzen (beweging in de gezichtslijn, drukking, anomale dispersie) die ieder op zichzelf lijnverplaatsingen van gelijke orde van grootte kunnen teweeg brengen.

Men moet derhalve trachten de waarnemingsresultaten op zoodanige wijze te groepeeren en te beoordeelen, dat alle invloeden behalve het Einstein-effect worden geëlimineerd. Dit doel is tot op zekere hoogte bereikbaar omdat de genoemde verschuivingsoorzaken werken volgens verschillende wetten.

Pogingen zijn reeds gedaan om den invloed van drukking uit te sluiten. SCHWARZSCHILD [1]), EVERSHED en ROYDS [2]), ST. JOHN [3]), GREBE en BACHEM [4]) hebben namelijk voor het onderzoek lijnen uitgekozen

---

[1]) K. SCHWARZSCHILD, Berl. Ber. 1914, S. 1201.

[2]) EVERSHED and ROYDS, Kodaikanal Bull. **39**, 1914.

[3]) ST. JOHN, Astroph. Journ. **46**, 249, (1917); Mt. Wilson Contrib. N⁰. 138.

[4]) GREBE und BACHEM, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 454 (1919); Zeitschr. f. Physik. **1**, 51 (1920).

waarvan men wist, dat zij in het laboratorium geen merkbaar drukeffect vertoonen. De uitkomsten waartoe deze waarnemers kwamen zijn niet eensluidend. Volgens St. John pleiten de waargenomen verschuivingen beslist tegen het bestaan van het Einstein-effect, terwijl Grebe en Bachem uit hun onderzoek het besluit trekken dat de gravitatie-verschuiving zoowel wat richting als wat grootte betreft werkelijk voorhanden is. Door allen is bij de beoordeeling gelet op de gevolgen van beweging in de gezichtslijn.

Geen der genoemde waarnemers heeft echter rekening gehouden met de mogelijkheid, dat anomale dispersie invloed kon hebben op de plaatsen der lijnen.

Doel van ons onderzoek is nu, het vraagstuk te behandelen uitgaande van de onderstelling dat Fraunhoferlijnen in hoofdzaak dispersielijnen zijn [1]).

Deze interpretatie van het zonnespectrum wijkt intusschen zoo zeer af van de bijna algemeen aangenomene, dat zij slechts kan worden aanvaard indien zeer deugdelijke redenen daartoe nopen.

Voor een deel zijn zulke redenen te vinden in de omstandigheid dat de bedoelde interpretatie in staat stelt, zonder invoering van bij-hypothesen een samenhangend stelsel van verklaringen te geven voor een groote verscheidenheid van zonneverschijnselen die, uit het oudere oogpunt bezien, tot minder bevredigende voorstellingen leiden. Het sterkst echter spreken ten gunste van de nieuwe opvatting eenige algemeene eigenschappen van de Fraunhoferlijnen, welke men uit de onderstelling dat zij in hoofdzaak dispersielijnen zijn onmiddellijk afleidt, doch waarvoor men uit andere gezichtspunten tot heden absoluut geen verklaring heeft kunnen vinden. Als zoodanig noemen wij:

1°. De roodverschuivingen der Fraunhoferlijnen zijn *zeer* verschillend van grootte (meerendeels gelegen tusschen + 0,020 Å en — 0,007 Å), ook waar het de lijnen van eenzelfde element betreft, en zijn niet in verband te brengen met de verplaatsingen onder den invloed van druk, die men in het laboratorium heeft bestudeerd. (Men vergelijke hieromtrent vooral de onderzoekingen, in het Kodaikanal Observatory gedaan door Evershed en zijne medewerkers).

2°. Groepeert men de lijnen naar hare intensiteit, dan zijn in elke sterkteklasse de bedragen der roodverschuivingen nog zeer uiteen-

---

[1]) Op het bestaan van dispersiebanden en -lijnen werd door een onzer het eerst gewezen in 1904, Versl. Nat. Afd. **13**, 26, 138, 359. Verdere onderzoekingen over dit bijzondere type van spectraallijnen vindt men o.a. in Versl. Nat. Afd. **15**, 317; **18**, 181, 913; **19**, 1007, 1395; **22**, 1037, 1243; **24**, 678, 865; **25**, 1245; verder in Arch. néerl. III A, Tome I, 231 (1912) — Men vergelijke tevens de proefschriften van Dr. B. J. v. d. Plaats (1917) en van Dr. P. H. van Cittert (1919).

loopend van lijn op lijn; doch als men voor elke sterkteklasse de gemiddelde verschuiving bepaalt, blijken die gemiddelde waarden samen te hangen met de intensiteit volgens een eigenaardige wet, die op grond van de dispersietheorie was voorzien (Versl. Nat. Afd. **18**, 923; **22**, 1251).

3°. Het bedrag der roodverschuiving eener Fraunhoferlijn is afhankelijk van de aanwezigheid van zeer naburige lijnen. Door een buurlijn aan den rooden kant wordt de roodverschuiving verkleind, door een buurlijn aan den violetten kant wordt zij vergroot. Het is dus alsof de componenten van enge lijnparen elkander afstootten.

Hoe uit de theorie der dispersielijnen deze drie eigenaardigheden van de verplaatsingen der Fraunhoferlijnen kunnen worden verklaard, werd door een onzer uiteengezet in de bovenaangehaalde mededeelingen, voorkomende in de Deelen **22, 24** en **25** der Verslagen.

Het derde punt hebben wij in den laatsten tijd nogmaals aan een streng onderzoek onderworpen, omdat daaraan wellicht het meest overtuigende criterium voor de juistheid van onze interpretatie van het zonnespectrum ontleend kan worden.

Nieuwe steun voor de opvatting, dat de lichtverdeeling in Fraunhoferlijnen beheerscht wordt door anomale dispersie.

Door EVERSHED, LARMOR en ST. JOHN is het bestaan van een merkbaren wederzijdschen invloed van naburige Fraunhoferlijnen sterk in twijfel getrokken. Laatstgenoemde zegt o.a. „While anomalous refraction may produce sporadic effects under occasionally favorable density-gradients in the solar atmosphere, the conclusion from investigations and observations at this observatory is that, within the present limit of precision of measurement, the positions of the Fraunhofer lines in the spectrum of the solar disk are not systematically affected by anomalous dispersion." [1])

Wij kunnen daarentegen aantoonen dat juist uit waarnemingen die op Mount Wilson met voortreffelijke hulpmiddelen, veel ervaring, groote zorg en volmaakte onpartijdigheid zijn verricht, het werkelijk bestaan van den bedoelden wederzijdschen invloed is af te leiden met een waarschijnlijkheid van ongeveer 500 tegen 1.

Alle gegevens waarop deze uitkomst berust zullen elders uitvoerig worden medegedeeld. Thans geven wij slechts een kort overzicht van het resultaat, daar dit kan medewerken om in het licht te stellen, dat men gedwongen is, bij het zoeken naar de aanwezigheid

---

[1]) CH. E. ST. JOHN, Astroph. Journ. **46**, 250 (1917); Mt. Wilson Contrib. N°. 138, p. 2.

van het Einstein-effect in aanmerking te nemen, dat men in het zonnespectrum met *dispersielijnen* te doen heeft.

Een zeer geschikt materiaal voor het onderzoek naar den invloed van buurlijnen leveren de metingen van W. S. ADAMS aangaande verplaatsingen van 467 lijnen in het spectrum van den zonsrand vergeleken met het spectrum van het midden der schijf [1]).

Op een paar uitzonderingen na zijn al deze lijnen in het randspectrum naar rood verschoven, t. o. v. hunne plaatsen in 't centrumspectrum. Dat bij *dit* verschijnsel de gravitatiepotentiaal een merkbare rol zou spelen, is natuurlijk uitgesloten. EVERSHED heeft overtuigend aangetoond dat het ook niet op druk kan berusten; en diens verklaring op grond van het Doppler-beginsel, die aan de aarde een afstootenden invloed op de zonnegassen toeschrijft [2]), is onaannemelijk. Er is dus alle reden om een andere verklaring voor deze roodverschuivingen te beproeven. Wij onderstellen dat de hoofdoorzaak gelegen is in het feit, dat wij met *dispersiebanden* te doen hebben, die immers de eigenlijke (*zeer* dunne) absorptielijnen in 't algemeen asymmetrisch omhullen.

Is deze onderstelling juist, dan moet de genoemde wederzijdsche invloed zich openbaren, want de vorm der dispersiekromme in de omgeving van een absorptielijn wordt gewijzigd door de nabijheid van een andere absorptielijn. Hoe die wijziging zich moet afspiegelen in den graad van asymmetrie der dispersielijn, vindt men toegelicht in Versl. Natuurk. Afd. **24**, blz. 686 en vlg.

Het uitkiezen uit de lijst van ADAMS van die lijnen, bij welke men op grond van de dispersietheorie een vermeerdering of vermindering van de roodverschuiving verwachten mag, geschiedt nu op de volgende wijze.

De kolommen Δ en Δ' van de tabel worden met strooken papier bedekt, zoodat men zich bij de keuze niet kan laten influenceeren door het zien van de waargenomen verplaatsingen. Met behulp van de atlassen van ROWLAND en van HIGGS beoordeelt men nu achtereenvolgens voor alle lijnen der tabel of zij geacht kunnen worden een „werkzamen" begeleider te hebben. Gevallen waarin aan beide kanten van een lijn een werkzame begeleider moest worden ondersteld, blijven natuurlijk buiten beschouwing, want daar zouden de invloeden elkander geheel of gedeeltelijk opheffen. De golflengte en de intensiteit van de influenceerende lijn worden opgezocht in de tabellen van ROWLAND.

---

[1]) W. S. ADAMS, Astroph. Journ. **31**, 30 (1910); Mt. Wilson Contrib. N⁰. **43**.

[2]) EVERSHED, Kodaikanal Bull. **39**.

Als „werkzaam" werd door ons beschouwd een lijn van intensiteit i (schaal van ROWLAND) indien haar afstand tot de geïnfluenceerde lijn bedroeg d of minder, waarbij dan i en d de volgende waarden hadden:

i.	*d.*
00 of kleiner	0.02 Å
0 en 1	0.1
2, 3, 4	0.2
5, 6, 7, 8	0.3
9 en hooger	0.4

In enkele twijfelachtige gevallen werd aan het uiterlijk eener lijnengroep op de atlassen beoordeeld, of van een bepaalde lijn uit het oogpunt der dispersie-theorie redelijkerwijze verwacht kon worden dat zij onder eenzijdigen invloed van een buurlijn stond. Over zulke gevallen zal steeds verschil van opvatting kunnen bestaan; men kan slechts trachten, de beoordeeling zoo objectief mogelijk te doen geschieden. Daartoe hebben drie personen, zoowel ieder afzonderlijk als in onderling overleg, de lijnen uitgekozen.

Wij troffen 26 lijnen aan, waarbij de werkzame begeleider aan den rooden, en 24 lijnen waarbij hij aan den violetten kant gelegen was.

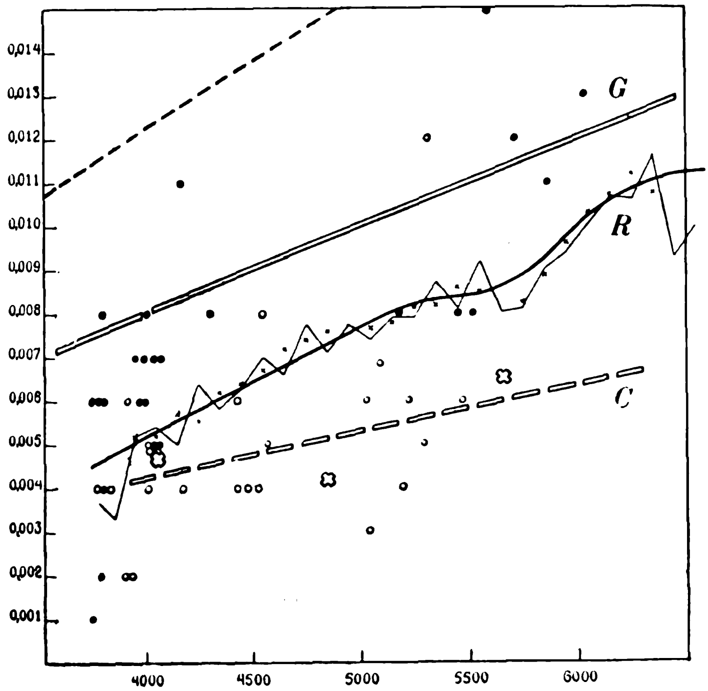
De figuur toont het resultaat. Daar zijn in de eerste plaats, voor opeenvolgende intervallen van 100 Å, voorgesteld de gemiddelde waarden van *alle* door ADAMS gemeten rand-centrum-verschuivingen; zij liggen op de doorgetrokken zig-zag lijn. De kruisjes geven de gemiddelde waarden voor intervallen van telkens 300 Å [1]). Een vloeiende kromme lijn R tusschen deze punten door getrokken, geeft dus het verloop van de rand-centrum-verschuiving met de golflengte aan [2]). Afzonderlijk aangeduid zijn nu de roodverschuivingen der 50 geïnfluenceerde lijnen. De kleine cirkels hebben betrekking op lijnen met begeleider aan den rooden kant, de volle stippen op lijnen met begeleider aan den violetten kant.

---

[1]) Lijnen met intensiteiten grooter dan 10 (die door oorzaken, welke uit de dispersietheorie terstond duidelijk zijn, abnormaal kleine verplaatsingen ondergaan) zijn bij het opmaken der gemiddelden buiten rekening gelaten.

[2]) Voor de anomalie die zich in deze lijn vertoont tusschen λ 5200 en λ 6000 is door een onzer een verklaring voorgeslagen (P. H. VAN CITTERT, proefschrift p. 54, 1919).

Met een oogopslag is te zien, dat de cirkeltjes meerendeels beneden, de volle stippen meerendeels boven de lijn der gemiddelde ver-



R gemiddelde rand-centrum verschuivingen (Adams),
o lijnen met begeleider aan den rooden kant,
• lijnen met begeleider aan den violetten kant.
C gemiddelde centrum-lichtboog verschuivingen (verschillende waarnemers),
G gravitatie-verschuiving volgens de algemeene relativiteits-theorie.

schuivingen liggen. De afwijking ten opzichte van die lijn is voor de 26 cirkeltjes gemiddeld — 0,0017 Å, voor de 24 stippen gemiddeld + 0,0015 Å.

Al zijn deze afwijkingen klein in absolute waarde, zij hebben een groote bewijskracht.

Om dit aan te toonen willen wij berekenen, welke de kans zou zijn voor het vinden van gemiddelde afwijkingen van deze grootte indien er *geen* stelselmatige invloed gewerkt had.

De 50 uitgekozen gevallen gaven 21 punten die boven, 29 punten die beneden de kromme *R* der algemeene gemiddelde verschuivingen gelegen waren. De som hunner positieve afwijkingen was + 0,0472, die der negatieve — 0,0547 ; in 't geheel gaf dus de groep een afwijkingssom — 0,0075, d.w.z. de groep lag gemiddeld $\frac{0{,}0075}{50} =$

$= 0{,}00015$ Å beneden het algemeen gemiddelde der 450 lijnen.

Zoeken wij de som van alle 50 afwijkingen (afgezien van hunne teekens) die deze gevallen vertoonen t. o. v. hun eigen gemiddelde:

$$0{,}0472 + (21 \times 0{,}00015) + 0{,}0547 - (29 \times 0{,}00015) = 0{,}1007,$$

dan blijkt, dat gemiddeld voor één geval de afwijking van dat gemiddelde $\frac{0{,}1007}{50} = 0{,}002$ Å was.

Deed men nu uit de groep eens een *niet* stelselmatige keuze van 26 gevallen, dan zou het arithmetisch gemiddelde daarvan slechts een gemiddelde afwijking

$$\eta = \pm \frac{0{,}002}{\sqrt{26-1}} = \pm 0{,}0004\,\text{Å}$$

doen verwachten, waaraan beantwoordt een *waarschijnlijke* afwijking:

$$r = 0{,}8453\,\eta = 0{,}00034\,\text{Å}.$$

Wij kozen echter 26 lijnen met begeleider aan den *rooden* kant en vonden $-(0{,}0017 - 0{,}00015) = -0{,}00155$ Å; bovendien 24 lijnen met begeleider aan den *violetten* kant en vonden $+0{,}0015 + 0{,}00015 = +0{,}00165$ Å als gemiddelde afwijking.

Voor beide rubrieken blijken dus de afwijkingen van het gemiddelde ongeveer 4,6 maal grooter te zijn dan de waarschijnlijke afwijking r bij toevallige keuze zou zijn geweest.

Nu is de kans, dat een afwijking gelegen is tusschen $-4{,}6\,r$ en $+4{,}6\,r$, gegeven door

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{4{,}6\rho} e^{-t^2}\,dt \quad (\text{waarin } \rho = hr = 0{,}477),$$

en de waarde dezer integraal is 0,998 [1]). Voor de kans dat, door toeval, de gemiddelde afwijking buiten die grenzen gelegen zou zijn, blijft slechts 0,002 over.

Met een waarschijnlijkheid van 500 tegen 1 volgt derhalve uit de waarnemingen van Adams, dat de wederzijdsche invloed van Fraunhoferlijnen inderdaad bestaat. Een analoge bewerking, toegepast op de rand-centrum verschuivingen door Evershed en Royds gemeten [2]), heeft ons tot hetzelfde resultaat geleid.

Intusschen behoort nu nog overwogen te worden of wellicht die wederzijdsche invloed het gevolg zou kunnen zijn van stelselmatige fouten in de *beoordeeling* der plaats van een lijn wanneer zich een andere lijn in de nabijheid bevindt.

---

[1]) Chauvenet, Spherical and practical astronomy, Vol. II, Table IX A.

[2]) Evershed en Royds, Kodaikanal Bull. 39.

Men moet hierbij bedacht zijn op fouten van objectieven en van subjectieven aard.

Wanneer twee in het negatief heldere (dus in het oorspronkelijke spectrum donkere) lijnen, die ieder op zichzelf een symmetrische lichtverdeeling zouden vertoonen, zóó kort bij elkaar staan dat zij elkander gedeeltelijk overdekken, zullen *objectief* de maxima van lichtsterkte zich op geringeren afstand van elkander bevinden dan de middens der afzonderlijke lijnen. Dit kan o.a. blijken bij mikrofotometrische bepaling van de lichtsterkte in het stelsel indien men den werkelijken afstand der lijnkernen kent.

Daartegenover staat echter dat men, wegens contrastwerking, geneigd kan zijn den afstand der maxima *subjectief* grooter te schatten dan hij feitelijk is.

Het is de vraag, welke van die beide invloeden overheerscht [1]. Omdat dit probleem van groot gewicht is voor de beoordeeling van den juisten onderlingen afstand der componenten van dubbellijnen, wordt het thans in het physisch laboratorium te Utrecht aan een speciaal onderzoek onderworpen.

Maar hoe ook de uitslag van dat onderzoek moge zijn, wij kunnen gemakkelijk aantoonen dat de wederzijdsche invloed dien wij in het bovengenoemde waarnemingsmateriaal van ADAMS en EVERSHED en ROYDS hebben geconstateerd, nagenoeg onafhankelijk is van de bedoelde beoordeelingsfouten, zoodat hij daaraan onmogelijk kan worden toegeschreven.

Immers onderstellen wij, dat in het spectrum van het centrum der zon de afstandsvergrooting bij een zeker lijnenpaar op een beoordeelingsfout berust.

De afstand moge bijv. zijn 0,3 Å, de schijnbare afstandsvergrooting, die van deze nabijheid het gevolg is, moge 0,003 Å bedragen.

Beschouwen wij nu hetzelfde lijnenpaar in het randspectrum. Daarin zijn de beide componenten wellicht iets verschoven t. o. v. de plaatsen in het centrum-spectrum, maar hun onderlinge afstand kan van 0,3 Å dan toch niet veel meer dan 1 % afwijken, dus de invloed, dien de onderlinge nabijheid der lijnen heeft op de beoordeeling van hun afstand, moet

---

[1]) ST. JOHN onderstelt dat de laatste invloed de belangrijkste is en ziet daarin de oorzaak van het feit, dat in de tabellen van ROWLAND de afstanden der componenten van enge lijnparen grooter zijn dan volgens metingen, verricht op Mt. Wilson. Hij noemt daarom die verschillen „systematische fouten" in de bepalingen van ROWLAND (Astroph. Journ. **44**, 16 en 265 (1916); Mt. Wilson Contr. N°. 120 en 123. Men overwege intusschen de bezwaren, door een onzer tegen deze opvatting geopperd in Versl. Nat. Afd. **25**, 1245, 1917).

praktisch dezelfde zijn in de beide spectra: de afstand zou óók in het randspectrum 0,003 Å te groot moeten schijnen. In de rand-centrum verschillen zou zich een wederzijdsche invloed, die op beoordeelingsfouten berust, niet openbaren. De wederzijdsche invloed van naburige lijnen, dien wij juist bij de rand-centrum verschuivingen zoo duidelijk aantreffen, moet derhalve wel een reëel verschijnsel zijn.

Een verklaring hiervan schijnt slechts mogelijk op grond van de dispersietheorie die het verschijnsel deed vinden. Daarin ligt een krachtige steun voor de opvatting dat men de Fraunhoferlijnen inderdaad beschouwen moet als dispersielijnen, die de — zeer veel dunnere — eigenlijke absorptielijnen omhullen, en wel in den regel op asymmetrische wijze.

Het bestaan eener gravitatie-verschuiving schijnt door het tot heden beschikbare waarnemingsmateriaal weersproken te worden.

Vestigen wij thans onze aandacht op de verplaatsingen, die de Fraunhoferlijnen in het spectrum van de centrale deelen der zonneschijf vertoonen ten opzichte van de lijnen in aardsche lichtboog-spectra.

De wetten van deze verschuivingen zijn minder gemakkelijk empirisch vast te stellen dan die der rand-centrum verschuivingen, omdat de golflengten der booglijnen in vele gevallen nog niet voldoende scherp konden worden bepaald. Intusschen is wel reeds gebleken dat zich hier wederom dezelfde eigenaardigheden voordoen: sterke fluctuaties van lijn op lijn, afhankelijkheid van lijnsterkte, en influenceering door buurlijnen[1]). Dit strookt met het karakter der Fraunhoferlijnen als dispersielijnen; immers ook het licht uit het midden der schijf is op zijn weg door dikke gaslagen verzwakt wegens anomale dispersie en toont dus in het spectrum dispersielijnen, die in 't algemeen asymmetrisch gelegen moeten zijn ten opzichte van de kernlijnen, wier plaatsen bepaald worden door de eigen-frequenties *op de zon.*

Omdat de straling uit het midden der schijf minder lange wegen door lichtbrekende en verstrooiende gasmassa's heeft afgelegd dan het randlicht, is de asymmetrie der centrumlijnen gemiddeld kleiner dan die der randlijnen; het verschil openbaart zich als de rand-centrum verschuivingen.

---

[1]) ALBRECHT, Astroph. Journ. **41**, 333 (1915); **44**, 1 (1916); ROYDS, die de conclusies van ALBRECHT bestrijdt, vindt niettemin zelf dat 17 lijnen met begeleider aan den rooden kant een gemiddelde roodverschuiving zon-boog van slechts 0,0032 Å, daarentegen 30 lijnen met een violetten begeleider een roodverschuiving van 0,0079 Å vertoonen (Kodaikanal Bull. **48**).

Welke verschuivingen zijn nu grooter, die van de randlijnen t. o. v. de centrumlijnen; of die van de centrumlijnen t. o. v. de plaatsen der eigen-frequenties op de zon?

Indien wij zeker wisten dat de plaatsen van de eigen-frequenties op de zon dezelfde waren als op de aarde en gegeven werden door de booglijnen, zou een vergelijking van de gemiddelde rand-centrum verschuivingen met de gemiddelde centrum-lichtboog verschuivingen ons leeren, dat de twee bedoelde categorieën van roodverschuivingen niet veel in grootte van elkander verschillen. De tweede levert een iets kleiner gemiddelde, zooals aanstonds blijken zal. Ook de fluctuaties van lijn op lijn zijn in beide gevallen ongeveer evengroot, hetgeen mede wijst op gelijken oorsprong en aard van de twee verschijnselen [1]). En op grond van verschillende overwegingen betreffende de constitutie van de buitenste deelen der zon is het niet onaannemelijk, dat licht uit de centrale deelen der schijf iets minder dan half zooveel gelegenheid gehad heeft om gebroken en verstrooid te worden, als licht uit de randdeelen.

De gevolgtrekkingen uit de dispersietheorie zijn dus met de waargenomen roodverschuivingen goed vereenigbaar, indien de aardsche lichtbooglijnen ons met groote benadering de waarden der eigenfrequenties op de zon doen kennen.

Onderstaande tabel geeft een overzicht van het gebezigde waarnemingsmateriaal. Alle zon-lichtboogverschuivingen voorkomende in de tabellen van Grebe en Bachem (Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, **454** (1919), Evershed (Kod. Bull. **36**), Royds (Kod. Bull. **38**), Evershed en Royds (Kod. Bull. **39**), in het geheel **446** getallen die elk uit een aantal waarnemingen waren afgeleid, hebben wij naar de plaat-

	λ	Aantal lijnen.	δ	δ'
I.	3650—4450 gemidd. 4050	287	0.0050 Å	0.0081 Å
II.	4450—5250 gemidd. 4850	118	0.0042	0.0097
III.	5250—6050 gemidd. 5650	41	0.0065	0.0113

[1]) Hierbij dient intusschen in aanmerking te worden genomen, 1°. dat bij de tweede categorie van waargenomen verschuivingen de onzekerheid in de plaatsen der booglijnen een rol speelt, en 2°. dat volgens de dispersietheorie eenvoudige *evenredigheid* van de twee categorieën niet te verwachten is.

sen der lijnen in het spectrum in drie groepen verdeeld en voor elke groep de gemiddelde waarde δ der verschuiving bepaald.

Deze drie waarden δ zijn in de figuur op blz. 111 voorgesteld door kruisblokjes. De daar tusschendoor gelegde blokjeslijn C toont ons hoe ongeveer de roodverschuivingen zonnecentrum-lichtboog met de golflengte verloopen; zij blijft beneden de lijn der rand-centrum verplaatsingen.

De vraag is nu of met deze waarnemingsresultaten in overeenstemming te brengen is het bestaan van de gravitatieverschuiving die voortvloeit uit de algemeene relativiteitstheorie. Haar berekend bedrag is in de tabel aangeduid door δ' en in de figuur door de dubbellijn G.

Nu geven de ordinaten van G de gravitatieverschuivingen der *kernen* van de Fraunhoferlijnen ten opzichte van de plaatsen der aardsche lijnen. Nemen wij in aanmerking dat de Fraunhoferlijnen zelve dispersielijnen zijn en dus gemiddeld naar rood verschoven ten opzichte van hare kernlijnen, dan zouden de totale roodverschuivingen der Fraunhoferlijnen t. o. v. de aardsche lijnen zich moeten groepeeren om gemiddelde waarden van $0{,}008 + 0{,}004 = 0{,}012$ Å bij λ 4000, tot $0{,}012 + 0{,}006 = 0{,}018$ Å bij λ 6000 (zie de stippellijn boven in de figuur).

Deze bedragen zijn gemiddeld ongeveer 0,010 Å grooter dan de werkelijk waargenomene — een verschil, veel te groot om aan toevallige fouten te kunnen worden toegeschreven.

Het is natuurlijk denkbaar — alhoewel niet waarschijnlijk — dat er een thans nog geheel onbekende oorzaak voor *violet*verschuiving van Fraunhoferlijnen gevonden zal worden, die de gravitatieverschuiving juist opheft. Ook moet men de mogelijkheid in het oog houden dat de lichtbooglijnen ons nog niet nauwkeurig genoeg de aardsche eigen-frequenties hebben doen kennen, doch zullen blijken stelselmatig ongeveer 0.01 Å naar rood verschoven te zijn.

Maar indien wij ons bepalen tot de gegevens waarover men tot heden beschikt, moeten wij tot het besluit komen, dat de gravitatieverschuiving niet bestaat.

Aan Dr. M. Minnaert en Mej. C. E. Bleeker betuigen wij onzen dank voor hunne medewerking bij het beoordeelen en bewerken der gegevens.

Heliophysisch Observatorium.
Utrecht, Mei 1920.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt namens Prof. W. H. KEESOM aan: Mededeeling N°. 5 uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: N. H. KOLKMEIJER, J. M. BIJVOET en A. KARSSEN: *„Onderzoek met Röntgenstralen naar den bouw der kristallen van natriumchloraat en natriumbromaat".*

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

§ 1. *Inleiding.* Voor de biologische wetenschappen zal elke vermeerdering van ons inzicht in den aard der chemische bindingen, die de voor de organische wereld zoo belangrijke koolstof met andere elementen aangaat, van groote waarde geacht moeten worden. Reeds bij het nagaan van den bouw der modificaties van het element koolstof zelf werd dit punt aangeroerd [1]). Ook het constateeren van het innig verband tusschen de atomen van de groep CO_3, voorkomend in kalkspaat [2]), vormt een belangrijk gegeven voor het aangeduide doel. Het was dus aanvankelijk de bedoeling andere koolstofverbindingen op hun kristalstructuur te onderzoeken. Wel zeer kwamen hiervoor in aanmerking natriumcarbonaat en natriumhydrocarbonaat, twee voor het dierlijk leven belangrijke stoffen. Daar zich nu echter, vooral bij de berekeningen met de hierbij te verkrijgen gegevens groote moeilijkheden lieten voorzien in verband met resp. kristalwatergehalte en monoklien kristalstelsel, besloten wij eerst nog eens een paar stoffen met soortgelijken chemischen bouw te onderzoeken, die deze moeilijkheden niet deden verwachten. De keus viel op de kubisch kristalliseerende zouten natriumchloraat en -bromaat. Wij hoopten ook bij deze stoffen aanduiding te vinden van het groepsgewijs tezamen blijven van de atomen van het zuurradikaal.

§ 2. *Bestaande kennis omtrent* $NaClO_3$ *en* $NaBrO_3$. In de *Chemische Krystallographie* van P. GROTH worden de kristalvormen beschreven, in welke $NaClO_3$ en $NaBrO_3$ onder verschillende omstandigheden kristalliseeren. Bij gewone temperatuur uit waterige oplossingen kristalliseerend geven deze stoffen regulair-tetartoëdrische vormen.

[1]) P. DEBIJE en P. SCHERRER, Phys. ZS. **19**, (1918) p. 476.
D. COSTER, deze Verslagen, **28**, (1919) p. 391.
N. H. KOLKMEIJER. Meded. N°. 4; deze Verslagen, **28**, (1920) p. 767.

[2]) W. H. en W. L. BRAGG, X-Rays and Crystal Structure. London, 1918.

Zoowel bij het chloraat als bij het bromaat komen twee enantiomorphe vormen voor. In verband met dit verschijnsel vertoonen de kristallen zelf draaiing van het polarisatievlak bij elke straalrichting, terwijl de oplossingen niet actief zijn. De polaire trigonale assen zijn electrische assen. Het scheen ons ook met het oog op deze eigenschappen gewenscht, den bouw der kristallen te bepalen.

Door BECKENKAMP [1]) was reeds theoretisch die bouw nagegaan; zijn conclusies werden door ons onderzoek echter niet bevestigd.

Door W. H. en W. L. BRAGG [2]) wordt zonder meer medegedeeld, dat in de kristallen van natriumchloraat de plaatsen der Na- en Cl-atomen weinig verschillen van die bij natriumchloride. Uit het volgende zal blijken, dat wij ons hiermede vrijwel kunnen vereenigen.

Door JAEGER en HAGA [3]) zijn LAUE-photogrammen van $NaClO_3$ genomen; bijzonderheden over de structuur zijn daaruit niet afgeleid.

§ 3. *De gebruikte apparatuur.* Deze was gelijk aan die, beschreven in een vorige mededeeling [4]). De zeer fijn gepoederde stof werd thans zoo gelijkmatig mogelijk door middel van weinig collodion om een glazen staafje (doorsnede ± 0,1 mm.) gebracht tot een dikte kleiner dan 0,5 mm. Tijdens de bestraling werd het staafje, dat bevestigd was aan het deksel van de camera, met behulp van dit deksel om zijn lengteas gedraaid om het optreden van door grootere kristaldeeltjes veroorzaakte streepjes op de interferentielijnen, welke het bepalen der intensiteiten bemoeilijken, te voorkomen [5]). Door de geringe dikte van het praeparaat was de correctie voor de dikte van het staafje, aangegeven in Mededeeling N°. 2 [6]), nu veel kleiner dan aldaar opgegeven. Van de glazen kern van het staafje ondervonden wij geen bezwaren.

§ 4. *Berekening van den bouw der kristallen.* In tabellen I en II zijn opgegeven voor het chloraat resp. bromaat in de kolommen 1 de afstanden van het midden van het beeld op het film tot de interferentie-

---

1) Verg. J. BECKENKAMP, Z. f. anorg. u. allg. Chemie, **110**, (1920) p. 290.

2) W. H. en W. L. BRAGG, X-Rays and Crystal-Structure, London 1918. blz. 173.

3) F. M. JAEGER. Deze Verslagen, 23 (1915), p. 1207.

4) A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER, deze Verslagen, **27**, (1918) p. 191, Mededeeling N°. 1.

5) Dat deze streepjes aan de interferentielijnen raken, is l. c. blz. 193 verklaard. Nu vertoonden eenige films opgenomen zonder draaiing van het praeparaat ook snijdende streepjes; deze snijdingen kunnen op de aangegeven wijze verklaard worden, als daarbij rekening wordt gehouden met de hoogte van het bestraalde deel van het praeparaat. Verkleining dezer hoogte deed de snijdingen verdwijnen.

6) A. J. BIJL en N. H. KOLKMEIJER, deze Verslagen, **27**, (1918) p, 352.

TABEL I.

$NaClO_3$

Afstanden in 0.1 mm en geschatte intensiteiten	$10^3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ (gecorrig.)	$Cu_{K_{\alpha_1}}$-straling			Cu_{K_β}-straling		
		Σh^2	$10^3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ (berekend)	$h_1\ h_2\ h_3$	Σh^2	$10^3 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$ (berekend)	$h_1\ h_2\ h_3$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
90 z	26	2	27	110			
114 z	41	3	41	111			
121 zz	47				4	45	200
132 s	56	4	55	200	5	56	210
147 zs	69	5	69	210	6	67	211
164 m	83	6	82	211			
199 m	125	9	124	{ 221 300	11	124	311
211 zz	139	10	138	310			
221 z	152	11	151	311	14	157	321
241 zz	180	13	179	320			
250 zs	193	14	193	321			
278 z	234	17	234	{ 322 410			
296 zz	262	19	261	331			
312 z	288	21	289	421	26	292	{ 431 510
353 m	358	26	358	{ 431 510			

TABEL II.

$NaBrO_3$

Afstanden in 0.1 mm en geschatte intensiteiten	$10^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ (gecorrig.)	$Cu_{K_{\alpha_1}}$-straling			Cu_{K_β}-straling		
		Σh^2	$10^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ (berekend)	$h_1\, h_2\, h_3$	Σh^2	$10^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ (berekend)	$h_1\, h_2\, h_3$
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
98 zm	25	2	25	110			
119 zz	39	3	39	111			
136 zm	52	4	53	200	5	54	210
149 zs	64	5	66	210	6	65	211
165 z	79	6	79	211			
182 zzz	97				9	97	{ 221 300
201 zz	119	9	119	{ 221 300			
224 zz	152				14	151	321
250 zs	184	14	184	321			
274 zz	221	17	224	{ 322 410			
293 zz	251	19	250	331			
308 z	275	21	276	421	26	280	{ 431 510
331 zz	313	24	316	422			
347 s	342	26	342	{ 431 510			

lijnen, uitgedrukt in 0,1 mm., en de geschatte intensiteiten, in de kolommen 2 de hieruit berekende gecorrigeerde waarden van $10^3 . \sin^2 \frac{\theta}{2}$. Op de bekende wijze zijn de getallen, die betrekking hebben op β-lijnen, afgezonderd. In overeenstemming met den regulairen kristalvorm van beide stoffen werd daarop gevonden, dat de waarden van $10^3 . \sin^2 \frac{\theta}{2}$ der α-lijnen een gemeenschappelijken factor bezitten, n.l. voor het chloraat $A_\alpha = 13{,}79$ en voor het bromaat $A_\alpha = 13{,}16$. De kolommen 3, 5, 6 en 8 bevatten de hieruit volgende indices-tripletten (resp. hun kwadraatsommen) der lijnen, de kolommen 4 en 7 de met genoemde waarden van A berekende waarden van $10^3 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Uit de gevonden waarden van A_α volgt, in verband met de moleculairgewichten, dichtheden (resp. 2,496 en 3,254), het getal van Avogadro ($6{,}062.10^{23}$) en de golf-lengte van $Cu_{K_{\alpha_1}}$-straling ($1{,}537.10^{-8}$ cm.) voor het aantal moleculen per elementair-cel resp. 3,98 en 3,93. Dit aantal bedraagt dus voor beide vier [1]).

Vervolgens gingen wij na, welke groepeering dezer 4 Na-, 4 Cl- resp. Br- en 12 O-deeltjes in de cel voldoet aan de uit de kristalvormen af te leiden symmetrie-eischen (nl. drie tweetallige assen, vier polaire drietallige assen, draaiing van het polarisatievlak). Het op de volgende wijze verkregen model voldoet aan deze eischen (zie fig. 1).

Verdeel de cel in 8 kuben, teeken in vier daarvan, die slechts ribben gemeen hebben, een lichaamsdiagonaal, zoodanig, dat deze elkaar niet snijden. Plaats willekeurig op een der diagonalen een natrium- en een halogeendeeltje, de plaatsen der overige natrium- en halogeendeeltjes worden dan direct met behulp der trigonale assen gevonden. Plaats één zuurstofdeeltje willekeurig, de plaatsen der andere volgen dan weer vanzelf.

Het beschreven model is niet met zijn spiegelbeeld tot dekking te brengen (zie fig. 2), hetgeen met de optische activiteit in overeenstemming is.

Voor de berekening van de plaatsen der deeltjes (ionen of atomen) kozen wij als parameters: één der drie gelijke rechthoekige coördinaten van een der natriumdeeltjes a (uitgedrukt in de ribbe van de cel als eenheid), één der drie gelijke coördinaten van een der halogeen-

---

[1]) Het essentieele verschil met het door BECKENKAMP (l. c. blz. 300) aangegeven model bestaat nu daarin, dat dit aantal bij hem 16 (of wel 2 in een kubus met half zoo groote ribbe) bedraagt, hetgeen onvereenigbaar is met onze foto.

deeltjes $\frac{1}{2} - b$ en de drie coördinaten p, q, en r van een der zuurstofdeeltjes. Met de waarden $a = \frac{1}{12}$, $b = \frac{1}{12}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{5}{12}$, $r = \frac{11}{36}$ werden intensiteiten der lijnen gevonden, welke én voor het chloraat

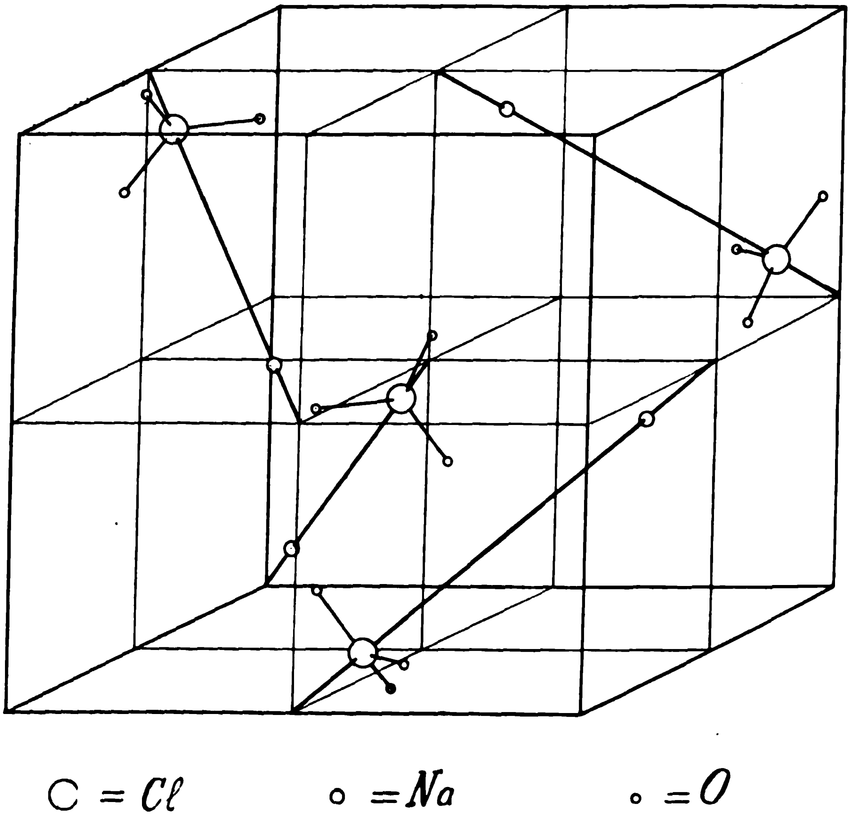


Fig. 1.

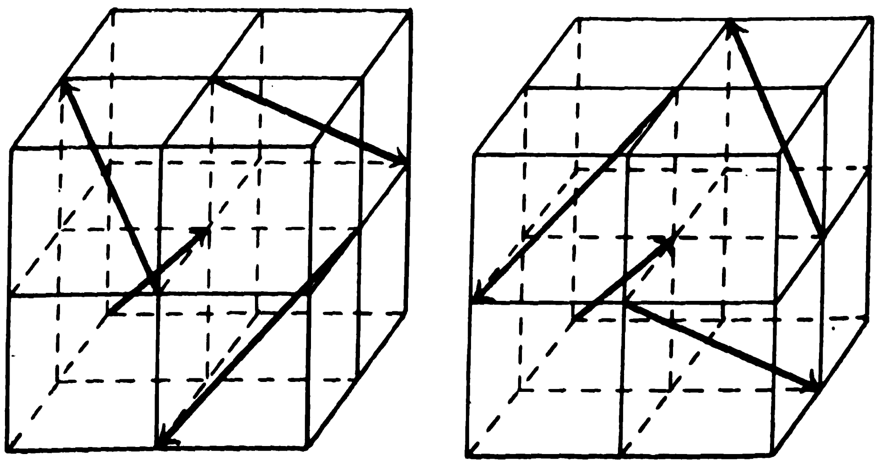


Fig. 2.

$NaClO_3$

TABEL III.

Vlakken	INTENSITEIT				
	Waargenomen	Berekend			
		A	B	C	D
100	?	0	0	0	0
110	z	137	146	55	5
111	z	47	70	22	4
200	s [1])	80	95	57	32
210	zs	395	444	252	123
211	m	114	139	80	44
220	—	0	0	1	3
221 } 300 }	m	54 } 0 } 54	70 } 0 } 70	37 } 0 } 37	24 } 0 } 24
310	zz	5	10	2	0
311	z [2])	18	22	13	9
222	—	8	7	2	0
320	zz	12	8	4	1
321	zs	147	194	115	73
400	—	1	4	3	5
322 } 410 }	z	12 } 41 } 53	6 } 62 } 68	4 } 35 } 39	1 } 26 } 27
330 } 411 }	—	20 } 5 } 25	13 } 13 } 26	7 } 7 } 14	1 } 9 } 10
331	zz	36	47	24	23
420	—	31	26	15	6
421	z [3])	34	22	12	11
332	—	29	19	10	1
422	—	1	6	1	1
430 } 500 }	—	6 } 0 } 6	5 } 0 } 5	2 } 0 } 2	0 } 0 } 0
431 } 510 }	m	27 } 13 } 40	36 } 5 } 41	24 } 4 } 28	26 } 1 } 27

[1]) tevens β-lijn van 210 zs. [2]) tevens β-lijn van 321 zs. [3]) tevens β-lijn van 431 m.

$NaBrO_3$ TABEL IV.

Vlakken	INTENSITEIT				
	Waargenomen	Berekend			
		A	B	C	D
100	?	0	0	0	0
110	zm	376	391	228	97
111	zz	216	261	155	88
200	zm [1])	179	197	143	100
210	zs	864	881	643	409
211	z	288	324	228	159
220	—	3	9	9	16
221 300	zz	149 0 } 149	179 0 } 179	107 0 } 107	97 0 } 97
310	—	53	91	54	46
311	z [2])	41	50	37	32
222	—	23	32	19	16
320	—	36	61	32	33
321	zs	393	471	338	260
400	—	11	19	15	1
322 410	zz	16 136 } 152	21 172 } 193	12 125 } 137	11 102 } 113
330 411	—	20 33 } 53	13 52 } 65	7 39 } 46	1 42 } 43
331	zz	92	115	85	73
420	—	46	43	30	19
421	z [3])	43	33	43	59
332	—	29	19	10	1
422	zz	30	50	30	25
430 500	—	19 0 } 19	32 0 } 32	19 0 } 19	17 0 } 17
431 510	s	78 8 } 86	144 10 } 154	96 6 } 102	112 6 } 118

[1]) tevens β-lijn van 210 zs. [2]) tevens β-lijn van 321 zs. [3]) tevens β-lijn van 431 s

én voor het bromaat goed voldoen, zooals tabellen III en IV toonen. De mogelijke fout in de b-waarde voor het bromaat bedraagt ongeveer 0,01 van de celribbe, de nauwkeurigheid der overige parameters is veel kleiner. [1])

Bij de berekening der intensiteiten zijn behalve de structuurfactor [2]), slechts de vlakkenaantalfactor en de factor van LORENTZ in aanmerking genomen; er is alzoo geen rekening gehouden met absorptie in het staafje, den temperatuurfactor en den polarisatiefactor. Dit vormt geen bezwaar, mits men slechts onderling vergelijkt de intensiteiten van zeer naburige interferentielijnen.

Uitgaande van de onderstelling, dat het hoofdzakelijk de electronen zijn, die de Röntgenstralen afbuigen, zijn de intensiteiten berekend in de volgende benaderende onderstellingen.

Om het natriumpunt zijn steeds 10 electronen gedacht (eenwaardig positief ion) [3]); de verzwakking hunner samenwerking door onderlinge interferentie wordt verwaarloosd. Om het halogeendeeltje zijn in de gevallen A, B, C en D van kolommen 3, 4, 5 en 6 van tabellen III en IV achtereenvolgens 12, 18, 12 en 10 electronen voor het chloraat, en 30, 36, 30 en 28 electronen voor het bromaat aangenomen, waarbij eveneens bovengenoemde verwaarloozing heeft plaats gehad; evenzoo voor een zuurstofdeeltje resp. 10, 8, 6 en 2 electronen. De voorstellingen, welke hieraan ten grondslag liggen, zijn:

in geval A: vijfwaardige positieve halogeen-ionen en tweewaardige negatieve zuurstof-ionen;

in geval B: eenwaardige negatieve halogeen-ionen en zuurstofatomen;

in geval C: binding van zuurstof in het halogenaat-ion door een ring van vier rondloopende electronen, waarvan twee door het zuurstof- en twee door het halogeen-atoom zijn afgestaan en waarbij het interferentieeffect geleverd door deze bindingselectronen verwaarloosd is;

---

[1]) Dit is daaraan toe te schrijven dat verplaatsingen van het Br-deeltje slechts klein kunnen zijn, willen zij, wat hun invloed op het interferentieresultaat betreft, vrijwel gecompenseerd kunnen worden door passend gekozen verplaatsingen der overige deeltjes. Dit geldt wegens het kleine atoomnummer voor het Cl-deeltje in veel mindere mate. Zoo kan dan ook voor dit deeltje evenmin als voor de O- en Na-deeltjes een grens voor de nauwkeurigheid der parameters genoemd worden.

[2]) Bij de opstelling van den structuurfactor werd er rekening mede gehouden, dat deze voor vlakken met drie ongelijke indices bij de symmetrie dezer kristallen afhangt van de volgorde dier indices. Verg. W. H. en W. L. BRAGG, l. c. blz. 151.

[3]) P. DEBIJE en P. SCHERRER, Phys. ZS. 19 (1918), p, 474.

in geval D: binding tusschen halogeen en zuurstof, waarbij het effect geleverd door de geheele buitenste electronenringen, waartoe de bindingselectronen behooren, verwaarloosd is.

Uit tabellen III en IV blijkt, dat onafhankelijk van welke dezer onderstellingen wordt uitgegaan, de overeenstemming tusschen berekende en waargenomen intensiteiten goed is.

Uit de gevonden waarden der parameters volgt, dat telkens drie zuurstof-deeltjes dicht om elk halogeen-deeltje liggen, het vlak dezer drie zuurstof-deeltjes, loodrecht op een trigonale as, bevat, althans ongeveer, het halogeen-deeltje. De afstand tusschen de middelpunten van een halogeen- en een dier naastbij gelegen zuurstof-deeltjes bedraagt ongeveer $\frac{1}{4}$ van den netparameter. De ligging der groepen Na^+ en ClO_3^- resp. BrO_3^- kan verkregen worden uit het NaCl-model door de tegengestelde ionen ieder over ongeveer $\frac{1}{8}$ van hun onderlingen afstand naar elkaar toe te schuiven.

Tot slot danken wij Prof. KEESOM ten zeerste voor de welwillendheid, waarmede hij ons toestond, dit onderzoek in zijn laboratorium te verrichten en voor zijn groote belangstelling en medewerking.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van Mej. RASSA RIWLIN: „*Photographische Absorptie- en Extinctie-Metingen. Bijdrage tot de studie der vloeibare kristallen. V.* (*Extinctie-metingen*)" [1]).

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

In deze mededeeling zal een fotografische methode voor de meting van absorptiespectra uiteengezet en een voorloopige toepassing daarvan op het onderzoek der extinctie van vloeibare kristallen gegeven worden. Het doel van dit laatste onderzoek is: de wijze waarop de extinctie van de golflengte afhangt nader quantitatief te onderzoeken en bovenal na te gaan in hoeverre het onderscheid, door Dr. W. J. H. MOLL en Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN tusschen de vloeibaar-kristallijne toestanden „ex-vast" en „ex-vloeibaar" [2]) in het ultrarood gevonden, ook voor zichtbaar licht bestaat.

1. De extinctie (absorptie of verstrooing) van een stof kan met behulp van de volgende methode gemeten worden. Een evenwijdige lichtbundel, afkomstig van een constante lichtbron, doorloopt het preparaat. Het licht dat de stof doorloopen heeft wordt in een spectrograaf tot een spectrum uiteengespreid, en dit spectrum wordt gefotografeerd. Daarna verwijdert men het preparaat uit de opstelling en vervangt het achtereenvolgens door eenige filters, die het opvallende licht in bekende mate verzwakken; de zoo ontworpen spectra worden telkens weder gefotografeerd. Het zou nu voor de hand liggen, om voor elke kleur het filter te zoeken dat op de fotografische plaat dezelfde zwarting oplevert als het preparaat. Is dan de doorlaatbaarheid van het filter bekend, dan is die van het preparaat voor de beschouwde golflengte daaraan gelijk. In de practijk echter is deze methode — het zoeken naar plaatsen van gelijke zwarting — ongeschikt, en zij is daarom vervangen door een interpolatie-methode. Voor een bepaalde golflengte wordt namelijk de zwarting gevonden uit de verschillende filterspectra, uitgezet als functie van de lichtintensiteit. De zwarting van het preparaat voor

---

[1]) Vergelijk YNGVE BJORNSTHAL, Untersuchungen über Anisotrope Flüssigkeiten. Ann. der Phys. Bd. 56 (1918), p. 161.

[2]) Verslagen Kon. Ak. v. Wet. XXV (1917), p. 1112.

elke golflengte geeft dan met behulp van de aldus experimenteel geconstrueerde zwartingskromme onmiddellijk de gezochte doorlaatbaarheid voor de bedoelde golflengte. Deze laatste bepalen wij door op elk spectrum een Heliumspectrum te superponeeren. De belichtingstijd moet voor alle spectra dezelfde zijn. De gebruikte methode heeft het voordeel dat de absorptie voor alle kleuren tegelijkertijd gemeten wordt, en dat zij in alle spectraalgebieden onder identieke omstandigheden is tot stand gekomen.

2. Wij zullen nu de details van onze methode nader uiteenzetten. In de eerste plaats dient het gebruik der filters toegelicht te worden en de methode aangegeven om hun doorlaatbaarheid voor verschillende kleuren te meten. Gewoonlijk wordt uit de zwarting, gemeten op een fotografische plaat, de intensiteit van het opgevallen licht berekend volgens de benaderingsformule van SCHARZSCHILD

$$z = log. I . t^p \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \text{zwarting van de fotografische plaat} \\ I = \text{Intensiteit van het opvallende licht} \\ t = \text{belichtingstijd} \end{array} \right.$$

waarin p eene van plaat tot plaat varieerende constante is. Ten einde het gebruik van een dergelijke benaderingsformule te vermijden, hebben wij een methode uitgewerkt die in staat stelt, zonder ons van deze wet te bedienen, het verband te vinden tusschen de intensiteit van het opvallende licht en de zwarting die het teweeg brengt op de fotografische plaat.

Dit verband kan voor elke plaat afzonderlijk langs experimenteelen weg worden gevonden door een zwartingsschaal op de plaat te ontwerpen. Deze zwartingsschaal wordt gevormd met behulp van een reeks spectra, die in bekende mate verzwakt zijn; ter verzwakking van die spectra worden filters in den lichtweg geplaatst. Aan deze filters moeten de volgende eischen gesteld worden: Zij moeten het licht voor alle kleuren in dezelfde mate tegenhouden d. w. z. geen selectieve absorptie vertoonen; of zoo zij deze bezitten, moet de absorptie voor elke kleur gemakkelijk bepaald kunnen worden. Verder moet de structuur der filters zoo fijn zijn dat hare afbeelding op de spleet van den spectrograaf de gelijkmatigheid van het gefotografeerde spectrum niet verstoort.[1]) Ten slotte moet het mogelijk zijn de filters in elken gewenschten graad van doorlaatbaarheid te kunnen verkrijgen. Aan al deze gestelde eischen voldoet een gelijkmatig gezwarte fotografische plaat. Een voorloopig onderzoek toonde dat zij een verwaarloosbaar kleine selectieve absorptie in het zichtbaar

[1]) De verzwakking door nicols blijkt te onnauwkeurig te zijn. Mazen verstoren de gelijkvormigheid van het spectrum.

spectrum bezit.[1]) Dit voorloopige resultaat gaf aanleiding tot een uitvoerig onderzoek, dat door den Heer A. DEUMENS werd verricht, en dat in deze Verslagen gepubliceerd zal worden, Het bleek daarbij dat de plaat een selectieve absorptie vertoont, die onder geschikt gekozen omstandigheden gering kan zijn. De filters werden dan ook met behulp van de door den Heer DEUMENS uitgewerkte methode nagemeten en bij de discussie van onze proeven werd de voor elk golflengtegebied gevonden verzwakking in aanmerking genomen. Wij gebruikten een tiental fotografische filters, wier doorlaatbaarheid in procenten volgens een meetkundige reeks werd gekozen. Op deze wijze kunnen de nauwkeurigste resultaten verkregen worden; daar toch de zwarting bij benadering evenredig is met de logarithme van de intensiteit, bereikt men met een dergelijke rij filters een regelmatig opklimmende schaal van zwartingen.

3. De zwarting der gefotografeerde spectra werd gemeten met den fotometer van Dr. W. J. H. MOLL[2]). Gebruikt werd het kleine en eenvoudige apparaat van het Instituut voor Theoretische Natuurkunde dat geschikt is om voor groote spectrale gebieden de zwarting te bepalen. Het toestel wijkt in enkele opzichten van den door Dr. W. J. H. MOLL in deze Verslagen beschreven microfotometer af; nl.:

1e. De spleet S_2 is weggelaten (zie l.c. p. 571 fig. 5) terwijl het microscoopobjectief O_2 van de gloeispiraal zelf een beeld op de plaat P ontwerpt.

2e. De snelheden van de fotografische plaat P en van de registreertrommel R waren zoodanig geregeld dat een verschuiving der fotografische plaat over 10 cM. overeenkwam met een verplaatsing van het gevoelige papier op de trommel over de helft van zijn lengte: d.i. circa 20 cM.

Vóór en nà elk spectrum kwam een stuk van de heldere ongezwarte plaat in den lichtweg, en bereikte de galvanometeruitslag zijn maximaal bedrag.

De donkere Heliumlijnen, die als inkepingen in de continu ver-

---

[1]) Dit voorloopig onderzoek leverde het volgende resultaat:

Kleur van het opvallende licht.	Doorlaatbaarheid van het filter.
Rood	27.4 %
Geel	27.6 %
Groen	27.0 %
Blauw	25.6 %
Violet	25.0 %
Totale zichtbare spectrum	27.2 %.

[2]) Dr. W. J. H. MOLL, Een nieuwe registreerende microfotometer. Versl. Kon. A. v. W. XXVIII (1919), p. 566.

loopende registratielijnen zijn te herkennen, dienen om de golflengte op verschillende plaatsen van het spectrum te identificeeren.

4. De bruikbaarheid van de boven beschreven methode om verhoudingen van lichtintensiteiten te meten door bemiddeling van de fotografische plaat zal in de eerste plaats sterk afhankelijk zijn van de gelijkmatigheid der plaat zelf en van de fouten in hare structuur. Een eerste vereischte voor haar deugdelijkheid is: dat men een met bepaalde intensiteit en belichtingstijd verkregen zwarting volkomen kan reproduceeren door een andere plaats der plaat onder volmaakt dezelfde omstandigheden te belichten. Elke soort platen moet daarom vóór haar gebruik aan de volgende ijking onderworpen worden: een reeks gelijke spectra, opgenomen bij constante lichtintensiteit met gelijken belichtingstijd, wordt onder elkaar op éénzelfde fotografische plaat ontworpen. De spectra worden dan loodrecht op de lengterichting en op verschillende plaatsen gefotometreerd. Voor elk spectrum zelf moet bij het doorloopen in deze richting de zwarting hetzelfde blijven, hetgeen door het constant blijven van den fotometeruitslag geconstateerd wordt. Verder moet de hoogte van deze constante stukken voor de verschillende spectra dezelfde zijn. Is de plaat goed, dan moet de registratie met den fotometer een beeld opleveren, waarbij de gezwarte resp. heldere stukken op twee aan de lijn der nulstanden evenwijdige rechten liggen. Op deze wijze kon de best bruikbare fotografische plaat: de Panchromatic van WRATTEN en WRAINWRIGHT, worden uitgezocht. (Panchromatisch om de absorptiemetingen zoo ver mogelijk naar het rood te kunnen voortzetten). Ook deze bleek echter nog verre van volmaakt te zijn. Een nauwkeurige meting had uitgewezen dat de zwarting bij de spectra, die aan den rand van de plaat liggen, steeds grooter is dan die voor in het midden der plaat ontworpen spectra. Een gelijk resultaat verkrijgt men als men de zwarting meet aan de randen en in het midden van een fotografische plaat die over haar geheele oppervlakte gelijkmatig belicht is. Deze systematische fout [1]) werd zoo goed mogelijk geëlimineerd door op éénzelfde plaat elk spectrum minstens twee maal op te nemen op verschillenden afstand van het midden [2]).

[1]) De Kodakfabriek kon ons geen verklaring van dit verschijnsel geven; men denkt aan een uitdrogen van de randen.

[2]) Om in ons geval zooveel mogelijk spectra op een enkele fotografische plaat te krijgen werd de lengte der vergelijkingsspectra aan den kant der kleine golf lengten beperkt. Het onderzochte preparaat liet namelijk voorbij de golflengte $\lambda = 4700$ toch geen licht meer door. De eene helft van de fotografische plaat wordt daartoe afgedekt; de andere gebruikt, en omgekeerd, zoo is het mogelijk op een plaat van 9×12 c.M. twee rijen van 15 spectra elk op te nemen.

In de tweede plaats hangt de gelijkmatigheid van het gefotografeerde spectrum in hooge mate af van den aard van den ontwikkelaar. De eisch die aan den ontwikkelaar gesteld moet worden is dat hij een egale zwarting produceert zonder vlekken of zwarte vegen en zonder sluier, terwijl tevens toch de contrasten tusschen de verschillende zwartingen zoo sterk mogelijk uitkomen. Glycine blijkt aan de gestelde eischen te voldoen, indien de juiste omstandigheden n.l. van de concentratie van den ontwikkelaar, van den duur en de temperatuur van ontwikkeling gekozen worden. Met glycine kan bij deze wijze van werken een mooi egaal spectrum worden verkregen, dat, wat rijkdom aan contrasten betreft, zelfs te verkiezen is boven dat, door hydrochinon teweeggebracht.

5. De gevolgde werkwijze zal nader aan de meting der extinctie van para-azoxyanisol worden toegelicht. Dit preparaat werd in verband met bovengenoemde onderzoekingen van Dr. W. J. H. Moll en Prof. Dr. L. S. Ornstein gekozen. Voor de toestanden vloeibaar-isotroop, ex-vast en ex-vloeibaar is het absorptiespectrum bepaald. Daar deze phasen bij kamertemperatuur niet bestaanbaar zijn, moest het preparaat eerst worden verhit en op constante temperatuur gehouden. Daartoe is een electrisch oventje gebruikt. Dit bestaat uit een holle koperen cylinder omwonden met manganinedraad waardoor een stroom wordt gezonden. Door de sterkte van dezen stroom te regelen kan binnen het oventje elke gewenschte temperatuur verkregen worden. Een wollen omhulsel beschut de draadwikkelingen voor temperatuurswisselingen van de omgeving. In het midden van den cylinder is de wikkeling over een lengte van 1 cM. onderbroken en daar zijn diametraal tegenover elkaar twee vertikale openingen aangebracht, waarin een reep koper K past, die het glazen cuvetje met het preparaat draagt. Het cuvetje, waarin zich het preparaat bevindt wordt vervaardigd volgens het principe van de telkamertjes van Zeiss: langs de randen van een vlak glazen plaatje A zijn lange smalle glazen balkjes (dikte $= 1.13$ mM.) geplakt, door middel van waterglas gemengd met asbest. Er wordt zorg gedragen dat deze glazen omheining overal even hoog is. Als dekglas dient een even groot glazen plaatje B, dat aan den onderkant in het midden een rond glaasje C (dikte $= 0{,}90$ mM.) draagt. Als de randen van B op de glazen balkjes van A gedrukt worden, bedraagt de afstand tusschen A en C, waar het te onderzoeken gedeelte van het preparaat zich bevindt 0,23 mM.

Wegens de hooge temperatuur, noodig om het preparaat te smelten, was het moeielijk een plakmiddel te vinden, dat onder die omstan-

digheden volkomen doorzichtig blijft. Ook het waterglas dat oorspronkelijk was gebruikt om C aan B te bevestigen werd na eenigen tijd troebel. Een oplossing voor deze moeielijkheid werd gevonden door het dekglaasje B in het midden te doorboren, zoodat men C slechts aan de randen had vast te plakken. Tusschen de twee glazen plaatjes A en B wordt in het midden een weinig para-azoxyanisol gebracht en de platen door de stalen veeren op de koperen reep K en op elkaar vastgedrukt. Op een kleine gasvlam wordt de reep koper voorzichtig verwarmd tot het para-azoxyanisol gesmolten is. De isotrope vloeistof wordt door capillaire krachten naar het nauwste gedeelte in het midden getrokken waar het de ruimte tusschen C en A volkomen vult en ook bij het vertikaal stellen van K niet of slechts zeer weinig naar beneden vloeit. Eventueel aanwezige luchtbellen worden door voorzichtig tikken naar den rand verwijderd. Daarna eerst wordt K in het oventje geschoven dat vooruit op de juiste temperatuur is gebracht. De toestanden „ex-vloeibaar" en „ex-vast" verkrijgt men door regeling van den verwarmingsstroom om het oventje, zonder dat het cuvetje daarvoor van plaats behoeft te veranderen. Met het zoo verkregen preparaat worden de in het bovenstaande beschreven metingen verricht.

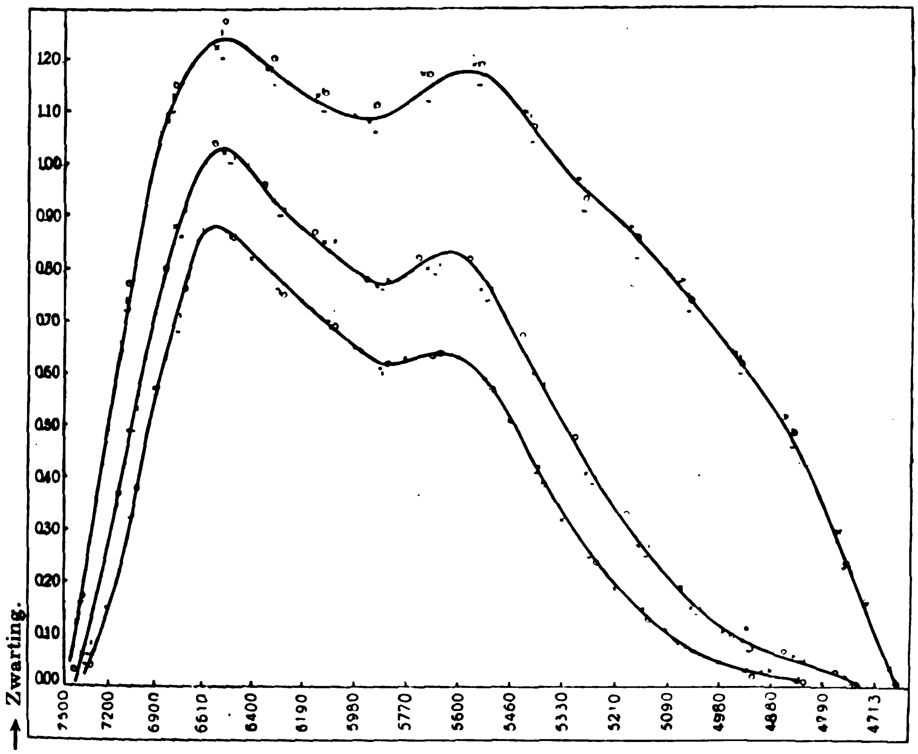
Als lichtbron wordt gebruikt een Nitra-lampje waarvoor een accumulatorenbatterij den constanten stroom levert; de verticale gloeidraad van deze lamp staat op brandpuntsafstand van een lens, waardoor een evenwijdige lichtbundel verkregen wordt die de opening in den wand van het oventje vult en het praeparaat doorloopt. Op eenigen afstand achter het oventje, midden in den evenwijdigen lichtbundel bevindt zich de nauwe spleet van den spectrograaf, die door een klepje kan worden gesloten. Het spectrum wordt gefotografeerd; de plaat bevindt zich in een chassis dat op en neer kan worden geschoven, waardoor meerdere spectra kunnen worden opgenomen op eenzelfde fotografische plaat.

6. Elk der 30 spectra van de fotografische plaat wordt in de lengterichting gefotometreerd en uit de geregistreerde krommen wordt de zwarting voor de verschillende kleuren berekend. Daartoe meet men op bepaalde punten, bijv. aan den rechterkant van elken nulstand, den galvanometer-uitslag U, terwijl de plaats dezer punten wordt bepaald t. o. v. de Heliumlijn $\lambda = 4713$.

Noemen we den maximalen galvanometer-uitslag, verkregen voor het onbelichte deel der plaat, U_0, dan definieert men de zwarting door de formule

$$z = log. \frac{U_0}{U}.$$

Voor elk der spectra is voor een 15-tal punten de zwarting berekend en uitgezet als functie van de golflengte. Vergelijken wij de zoo gevonden krommen van twee of meer spectra, die denzelfden toestand op verschillende plaatsen der plaat afbeelden, dan geeft ons hun onderlinge overeenstemming een maat voor de betrouwbaarheid der gebruikte methode. De grootste afwijkingen van de gemiddelde waarden blijken dan alle te blijven beneden 3 °/₀ van de totale zwarting. In fig. 1 zijn, van boven te beginnen de krommen afgebeeld correspondeerende met de absorptiespectra van de phasen: vloeibaar-isotroop, ex-vast en ex-vloeibaar; vier verschillende opnamen van eenzelfde absorptiespectrum op één plaat hebben voor elk dezer krommen het materiaal geleverd en zijn door vier verschillende teekens aangegeven.



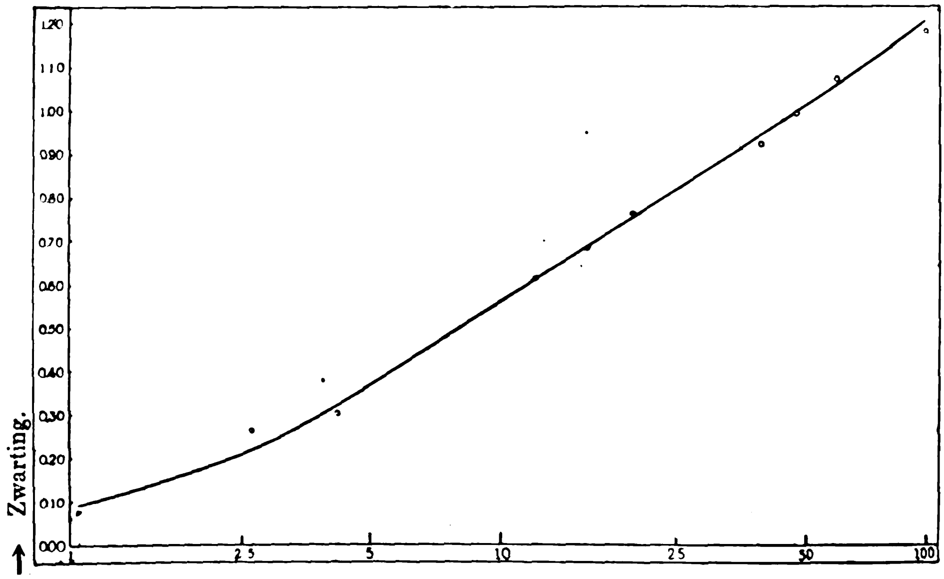
→ golflengte. Fig. 1.

Het verschil in optisch gedrag tusschen ex-vast en ex-vloeibaar, voor ultraroode stralen reeds gevonden [1]), blijkt ook in het zichtbare spectrum te blijven bestaan.

---

[1]) l.c. p. 1115.

Ook voor de filters zijn de zwartingen op deze wijze in teekening gebracht. Uit de zoo verkregen reeks krommen wordt voor een bepaalde golflengte de zwarting voor de opeenvolgende filters gemeten en, met behulp van de bekende doorlaatbaarheid der filters, uitgezet als functie van de lichtintensiteit (fig. 2).

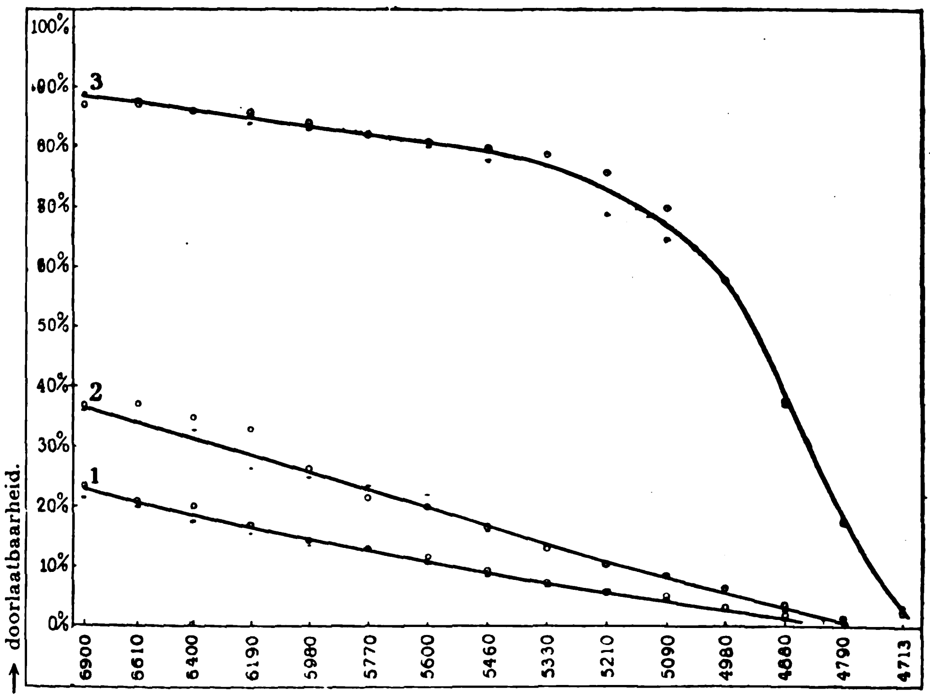


→ doorlaatbaarheid in %. Fig. 2.

Voor 15 verschillende golflengten zijn zoo de zwartingen berekend en in teekening gebracht. Wordt de doorlaatbaarheid der filters in procenten op logarithmisch millimeter-papier uitgezet, dan vertoont de zwarting geteekend als functie van log. I, den bekenden vorm der zwartingskromme met het groote rechte stuk in het midden. Dit rechte stuk correspondeert met zwartingen voor welke de plaat noch over-, noch onder-belicht is, en de beste verhouding tusschen belichtingstijd en sterkte van ontwikkelen is die waarbij het rechte stuk der zwartingskromme een hoek van 45° maakt met de x-as. Volgens fig. 2 is deze helling bij onze zwartingskromme iets te klein; de plaat had dus wat korter belicht en wat langer ontwikkeld moeten worden.

Men leidt uit de filterspectra een tiental punten af voor elke zwartingskromme; daar deze punten op een strakke kromme moeten liggen, kunnen de fouten in de ligging der verschillende punten gedeeltelijk door grafische interpolatie worden opgeheven, hetgeen de betrouwbaarheid der methode nog vergroot. Teneinde de extinctie te bepalen wordt voor een bepaalde golflengte in fig. 1 de zwarting afgelezen voor vloeibaar-isotroop, ex-vast en ex-vloeibaar en deze

waarden overgebracht op de zwartingskromme van de overeenkomstige golflengte. De abscis van dit diagram geeft dan onmiddellijk voor de respectieve phasen de doorlaatbaarheid in procenten. Met de zoo gevonden waarden voor de doorlaatbaarheid is voor elk der drie genoemde phasen de absorptiekromme geconstrueerd. In fig. 3 zijn deze absorptie-krommen geteekend; van boven te beginnen weer resp. voor de phasen: vloeibaar-isotroop, ex-vast en ex-vloeibaar. In de beide geteekende puntreeksen is het waarnemingsmateriaal verwerkt van twee afzonderlijke preparaten elk op een andere plaat gefotografeerd; de dikte van het preparaat was in beide gevallen hetzelfde.



→ golflengte. Fig. 3.

Onderstellen we nu (hetgeen bij de gevonden sterke extinctie zeker niet juist is) dat het verband tusschen opvallend en doorgelaten licht bij dit preparaat wordt gegeven door de bekende absorptieformule

$$I = I_0 e^{-hd} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \text{intensiteit van het opvallende licht} \\ I = \text{intensiteit van het doorgelaten licht} \\ h = \text{extinctie-coëfficient} \\ d = \text{dikte van het preparaat.} \end{array} \right.$$

dan kan met behulp van fig. 3 de grootheid „$h.d.$" voor de verschillende golflengten worden berekend. Volgens de Theorie der

verstrooiing door Dr. SPIJKERBOER in zijn dissertatie gegeven, waarbij aangetoond is dat absorptie- en extinctie-coëfficient onderling additief zijn, is de gevonden grootheid „h" voor elk der phasen = de som van verstrooiings- en absorptie-coëfficient. Gaat men nu uit van de veronderstelling dat bij benadering de eigenlijke absorptie-coëfficient der drie onderzochte phasen gelijk is, dan vindt men in het verschil:

$$h \text{ isotroop} - h \text{ ex-vloeibaar} = h_1,$$
$$\text{en } h \text{ isotroop} - h \text{ ex-vast} = h_1,$$

voor elk der beide vloeibaar-kristallijne toestanden den extinctie-coëfficient in zijn afhankelijkheid van de golflengte.

Om uit te maken of deze gevonden extinctie-coëfficient evenredig is met een macht van λ, werd de kromme $log\, h$ als functie van $log\, \lambda$ geconstrueerd. Deze lijn bleek niet in haar geheele lengte recht te zijn, maar kon bij benadering opgevat worden als bestaande uit twee lineaire stukken, welke voor elk der vloeibaar kristallijne phasen een anderen hellingshoek vertoonden.

Het is mij een behoefte hier mijn oprechten dank te brengen aan Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN onder wiens opwekkende leiding ik bovenstaand onderzoek heb mogen verrichten; en aan de Heeren Dr. W. J. H. MOLL en Dr. H. C. BURGER, wier voortdurende belangstelling en goede raad mij steeds tot grooten steun zijn geweest.

SAMENVATTING.

1. Een methode wordt beschreven om langs fotografischen weg de extinctie te meten. Deze methode wordt op vloeibaar-kristallijne stoffen toegepast.

2. De twee vloeibaar-kristallijne phasen „ex-vast" en „ex-vloeibaar" bezitten verschillende extinctie ook in het zichtbare spectrum.

Utrecht, Mei 1920. *Instituut voor Theoretische Natuurkunde.*

Voor de boekerij der Akademie wordt door den Heer F. M. JAEGER ten geschenke aangeboden een exemplaar van den 2^en^ verbeterden en vermeerderden druk van zijn werk: „*Elementen en atomen eens en thans*".

Aan het slot der vergadering brengt de Voorzitter in herinnering dat thans, na het verstrijken van een driejarig tijdvak, de vier leden der Commissie voor het Van 't Hoff-fonds aan de beurt van aftreden zijn en de Afdeeling tot een nieuwe keuze moet overgaan. Volgens Art. 4 der statuten van het fonds worden twee leden dier Commissie door de Afdeeling uit haar midden benoemd en de twee andere leden, die niet-leden der Akademie zijn, op voordracht der sub 1 genoemde leden, eveneens door de Afdeeling.

Ter voldoening aan deze bepaling worden de Heeren S. HOOGEWERFF en A. F. HOLLEMAN, de twee aftredende leden uit de Afdeeling, door haar herbenoemd. Zij verklaren de herbenoeming aan te nemen.

Onmiddellijk daarop worden, op voordracht der twee herbenoemde leden, ook de twee andere aftredende leden der Commissie, de Heeren E. H. BÜCHNER en A. SMITS door de Afdeeling herbenoemd. Aan deze twee Heeren zal van hun herbenoemen worden kennis gegeven met de vraag of zij zich de herbenoeming laten welgevallen.

De vergadering wordt gesloten.

---

8 September 1920.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN ZATERDAG 26 JUNI 1920.

DEEL XXIX.

N°. 2.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt goedgekeurd.

Ingekomen is:

Een bericht van den Heer H. KAMERLINGH ONNES dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

Andere stukken zijn voor deze vergadering niet ingezonden.

Alvorens over te gaan tot de wetenschappelijke werkzaamheden, spreekt de Voorzitter zijne vreugde erover uit dat de Heer HAMBURGER, na geruimen tijd ernstig ongesteld te zijn geweest, weer in staat is de vergadering bij te wonen.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet eene mededeeling over: *„De chloorbenzolen en hun omzettingsproducten met natriummethylaat".*

Een uitvoerig verslag van dit onderzoek zal binnenkort in het „Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas" worden geplaatst.

Geologie. — De Heer G. A. F. MOLENGRAAFF biedt een mededeeling aan over: *„De geologische ligging der petroleum-terreinen van Nederlandsch Oost-Indië."*

De ervaring heeft geleerd, dat van de petroleumterreinen van groote uitgestrektheid op aarde het meerendeel is ontstaan in geosynclinalen, waar deze randstandige sedimentatiegebieden van continenten zijn [1]). In zulke geosynclinale gebieden, die gekenmerkt zijn door lang voortdurende daling van den bodem, kunnen in de sedimenten de organische stoffen, de resten van dierlijk en plantaardig leven, telkens, naarmate de daling van den bodem voortschrijdt, bedekt worden door lucht en water afsluitende lagen en daardoor aàn oxydatie en dus aan vernietiging worden onttrokken; zij kunnen dan, laagsgewijze opeenliggend, opgehoopt worden tot afzettingen van aanzienlijke dikte. Zoolang in zulk een geosynclinale kuststrook de daling het wint van de sedimentatie blijft het gebied door de zee bedekt, wint de sedimentatie het van de daling, dan kan het gebied tot land worden.

In het eerste geval zullen in het dalende gebied ten slotte petroleum of verwante koolwaterstoffen kunnen worden gevormd, in het tweede geval zullen ten slotte kool of verwante stoffen kunnen worden gevonden. Een zeer geleidelijke en regelmatige daling, waarbij voortdurend of een vlakzeegebied of een laag land aanwezig is, geeft de allergunstigste voorwaarden voor ophooping van zulke fossiele brandstoffen. Ieder geosynclinaal gebied kan door verschuiving van het evenwicht tusschen de processen van daling van den bodem en sedimentatie, alsook door epirogenetische bewegingen van land en zee ten opzichte van elkaar, gedurende zijn lang leven nu eens zee dan weer land zijn en aldus kan in dezelfde geosynclinaal nu eens kool dan weer petroleum worden opgehoopt. In één geosyn-

[1]) Onder de geschriften uit den laatsten tijd omtrent deze kwestie verdienen de volgende de aandacht:

M. R. DALY. Geosynclines and petroliferous deposits. Trans. Amer. Inst. of Min. Eng. LVII p. 1054, 1918 en de discussie daaromtrent, ibidem p. 1065.

W. F. JONES. The relation of oil pools to ancient shore lines. Econ. Geol. XV, p. 81, 1920 en de discussie daaromtrent, ibidem p. 350.

clinaal kunnen [1]) dus koolbeddingen en petroleumbeddingen van boven naar beneden met elkaar afwisselen.

Zoo men alleen op de groote trekken let, mag men zeggen, dat in zulk een geosynclinaal in den regel de opvulling begint met de afzetting van marine vormingen met een eentoonige mikrofauna en dat daarop eerst, wanneer deze een aanzienlijke dikte hebben bereikt, brakwater-, zoetwater- en misschien terrestrische afzettingen volgen, die dan al of niet met elkander of bovendien met marine afzettingen kunnen afwisselen.

De ervaring heeft verder geleerd, dat in zulke randstandige geosynclinale gebieden min of meer nauwkeurig evenwijdig met de kustlijn, en op eenigen afstand daarvan, plooiingen kunnen ontstaan die aanleiding kunnen geven tot het uit zee opduiken van een of meer reeksen van eilanden of van een min of meer samenhangende strook lands. Niet zelden gaat vulkanische werkzaamheid gepaard met zulk een plooiingsproces. Het resultaat kan zijn, dat het gedeelte van de randstandige geosynclinaal, dat aan de continentale kust grenst door zulk een reeks van eilanden of door een meer samenhangende strook lands van de diepere zee wordt gescheiden. Het kan daardoor somtijds geheel worden afgesloten en misschien wel eens tijdelijk tot een zoetwatermeer worden gemaakt. Het is duidelijk dat aan het geosynclinale verzamelgebied, dat vóór die plooing zijn sedimenten slechts van één zijde, namelijk van het continent aan welks kust het ontstond, ontving, thans van twee zijden, zoowel van het continent als van de nieuw uit zee opgerezen min of meer samenhangende strook lands, materiaal voor sedimentatie zal worden toegevoerd. Doet zich in die strook vulkanische werkzaamheid levendig gevoelen, dan zullen van dat oogenblik af produkten van vulkanischen oorsprong in de sedimenten, die zich in de geosynclinaal blijven ophoopen, een groote, wellicht een overheerschende rol spelen.

Eindelijk leert de ervaring nog dat de geosynclinaal, die, nu zij smaller is geworden en van twee zijden sedimenten in zich opneemt, haar geheele opvulling bereikt of nadert, ten slotte zelve ook meestal zwak wordt geplooid, wat, zooals bekend is, tot een stand der lagen aanleiding geeft, welke bij de exploitatie van de petroleum van groote beteekenis is.

---

[1]) Met opzet is door het woord „kunnen" hier telkens aangeduid, dat men met een mogelijkheid, niet met een zekerheid te doen heeft. Immers kan het voorkomen, dat in een geosynclinaal of in een gedeelte daarvan gedurende haar ontwikkeling de noodzakelijke voorwaarden voor de vorming van kool, van petroleum of van beiden nimmer voldoende zijn verwezenlijkt; in dat geval blijft zulk een geosynclinaal steriel.

De grootste en meest bekende olievelden der wereld hebben een soortgelijke voorgeschiedenis gehad. Uit talrijke voorbeelden zij hier slechts gewezen op de Pensylvanische en de Argentijnsche petroleumterreinen:

in de Pensylvanische geosynclinaal, die randstandig is aan het toenmalige Noord-Amerikaansche continent, het zuidwaarts reeds uitgegroeide archaeische Canadeesche schild, had de sedimentatie, evenals ook wel de plooiing der Apallachen in haar zeewaarts gelegen deel, tot in laat-carbonen tijd, de slotplooiing in permischen tijd plaats;

de olievelden in het Andiene gedeelte van Argentinië zijn randstandig aan het oude Zuid-Amerikaansche continent, dat met Zuid-Afrika en het zoogenaamde Gondwana-land in geologischen bouw groote overeenkomst vertoont. De sedimentatie had in die geosynclinaal plaats in jurassischen en cretaceïschen tijd en haar plooiing, die vergezeld van sterke vulkanische werkzaamheid zeewaarts de Anden-keten deed ontstaan, werd in tertiairen tijd besloten.

Als een derde voorbeeld zouden de petroleumterreinen van Venezuela mogen genoemd worden.

Beschouwt men zulk een wijze van ontwikkeling als de typische, dan zal men bij een dergelijk petroleumterrein moeten kunnen onderscheiden (zie fig. 1):

1. een geosynclinale strook G, waarin de sedimenten, in welke de petroleum is ontstaan, zijn afgezet. De ligging van deze strook zal ruwweg tevens aangeven de ligging van de oorspronkelijke kustlijn van

2. het continentale gebied L, waaraan de geosynclinaal randstandig is, en waarvan het terrigene materiaal afkomstig is, dat in de geosynclinaal tot bezinking is gekomen. Dit gebied kan ook het oude continentale gebied of het primaire denudatiegebied genoemd worden, omdat het reeds als een landmassa bestond eer dat de geosynclinaal tot ontwikkeling kwam.

3. de zee Z die, van het continent gerekend, aan gene zijde van de geosynclinaal volgt.

In de geosynclinale strook zal men nader kunnen onderscheiden:

a. het landwaarts gelegen gedeelte G_1, bestaande uit sedimenten bezonken in een vlakke zee of op een laag land. De afzettingen bezitten een sterk overheerschend terrigeen karakter (kalksteenen zijn zeldzaam) en bevatten of kool- of petroleumbeddingen of beiden. Zij zijn in het allerlaatste tijdvak van de orogenetische phase, waarmede een groote periode in het leven der geosynclinaal werd afgesloten, geplooid, meestal niet zeer intensief.

b. het zeewaarts gelegen gedeelte G_2, waarin de sedimenten,

veelal mergels en kalksteenen, verder van de kust van het continent zijn bezonken dan in het gedeelte G_1. Het is veelal in

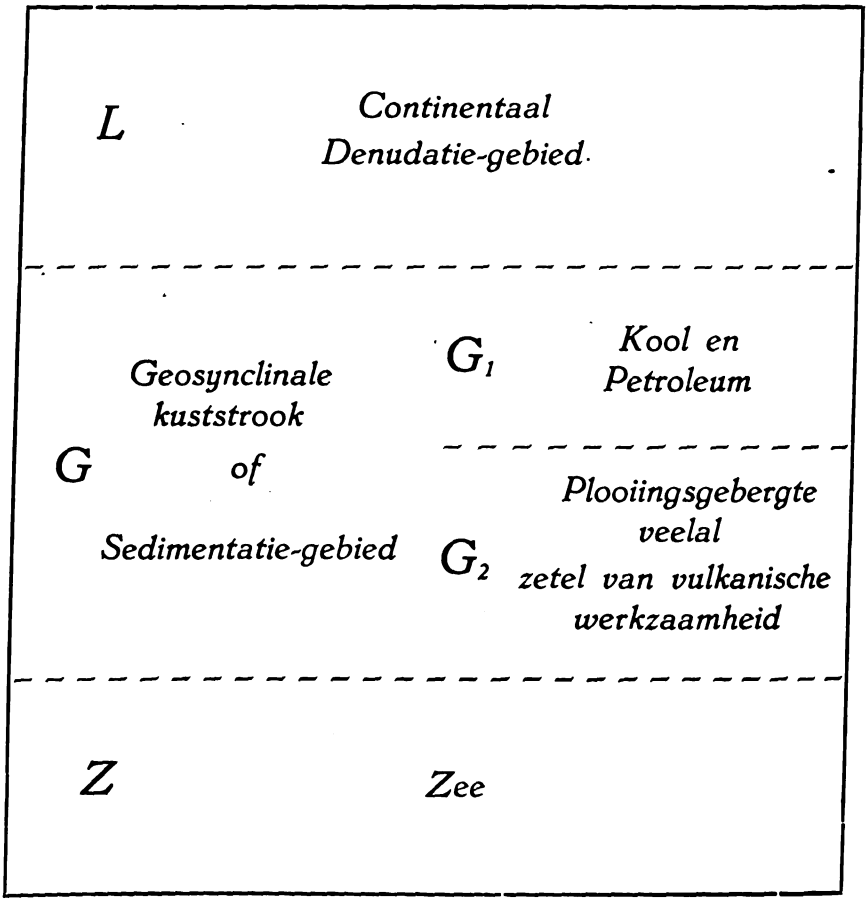


Fig. 1.

een vroeger tijdvak van de orogenetische phase geplooid dan het gedeelte G_1. De anticlinale deelen dier plooien doken in dat geval reeds als reeksen van eilanden of als min of meer samenhangende strooken lands uit de zee op, toen in het gedeelte G_1 de daling van den bodem en de sedimentatie nog voortging. Het gedeelte G_2 is gewoonlijk sterker opgeheven, geplooid en samengeperst dan het gedeelte G_1.

Niet zelden gaat met de plooiing van het gedeelte G_2 vulkanische werkzaamheid gepaard, tengevolge waarvan dit ten slotte grootendeels uit vulkanisch materiaal kan zijn opgebouwd. Men zou dit gebied G_2 in tegenstelling met L ook kunnen noemen het afsluitingsgebied of ook het secundaire denudatiegebied.

Het doel van deze mededeeling is aan te toonen, wat omtrent de

olievelden van Nederlandsch Oost-Indië in verband met de bovenstaande beschouwing valt op te merken.

De ligging der olievelden van Nederlandsch Oost-Indië is op de bijgevoegde schets (Fig. 2) aangegeven [1]). Zij liggen langs de noord-

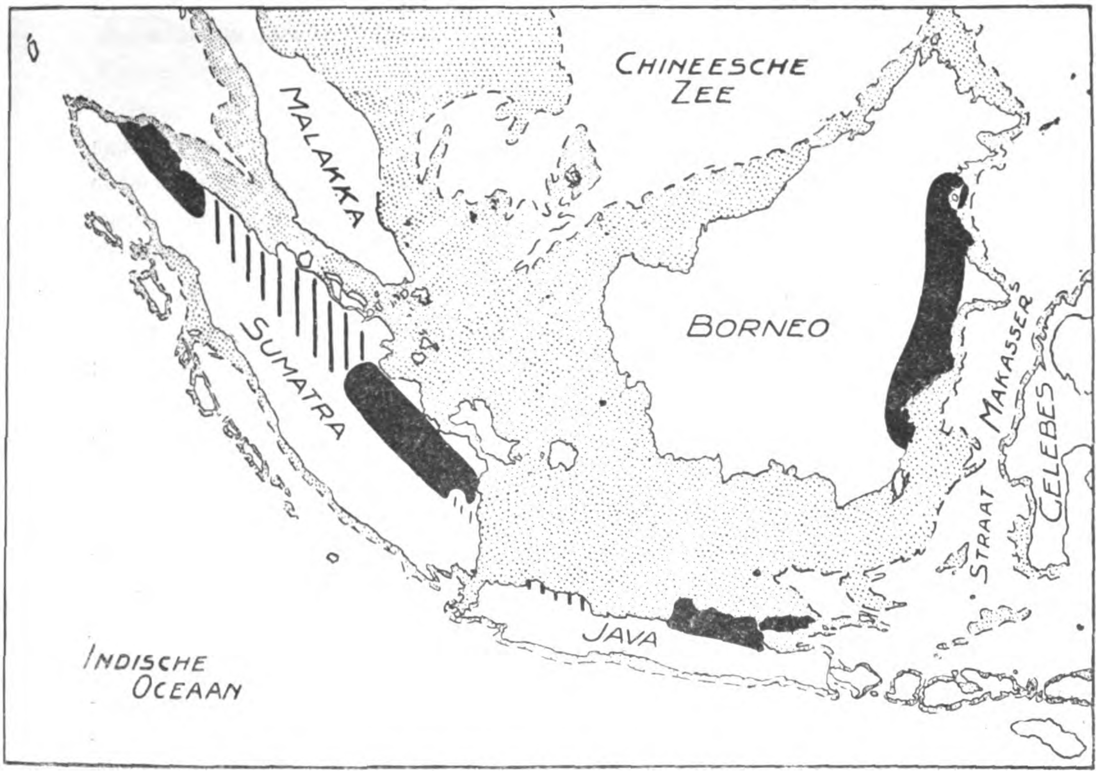


Fig. 2.

Zwart gestreept. Neogene geosynclinale afzettingen, in welke het voorkomen van petroleum nog niet is aangetoond.

Zwart. Petroleumterreinen in neogene geosynclinale afzettingen.

Gestippeld. Het gestippelde Soenda-plat, Malakka, Sumatra, Java en Borneo geven vereenigd het Soendaland bij zijn grootste uitgebreidheid in plistoceenen tijd.

oostkust van Sumatra, langs de noordkust van Java en langs de oostkust van Borneo. De afzettingen dier olieterreinen zijn in geosynclinalen in tertiairen, vooral in neogenen tijd, bezonken. Voorts wordt er nog een olieterrein op het eiland Ceram gevonden, dat waarschijnlijk in mesozoischen tijd is ontstaan, waarvan echter de ouderdom tot nu toe niet met zekerheid is vastgesteld. Geologisch

---

[1]) Bij het samenstellen van deze schetskaart had ik het voorrecht van twee deskundigen, de Heeren KLEIN en RUTTEN, gegevens te verkrijgen.

nauw verbonden met de bovengenoemde tertiaire terreinen is nog een olieterrein in den Oost-Indischen archipel, dat buiten het Nederlandsche gebied ligt. Het is het tertiaire terrein in Britsch Noord-Borneo en Serawak langs de kust van de Chineesche Zee.

De laatste terreinen zullen hier buiten beschouwing blijven en er blijven dus alleen over die van Oost-Borneo, Sumatra en Java.

I. *Oost-Borneo.*

De geosynclinale strook G ligt aan en langs de oostkust van Borneo, grenzend aan de straat van Makasser. Het continentale of primaire denudatiegebied L is Borneo, de zee Z is de straat van Makasser en daartusschen ligt de tertiaire geosynclinale G, die thans geplooid en grootendeels verland is. De gedeelten G_1 en G_2 gaan geleidelijk in elkaar over. De zeewaarts gelegen strook G_2 is rijker aan kalksteen dan de meer landwaarts gelegen strook G_1, zooals RUTTEN heeft aangetoond. In de strook G_2 heeft geen vulkanische werkzaamheid plaats gehad. De afzettingen in de geosynclinaal zijn volgens RUTTEN bij Balik Papan ongeveer 6000 M. dik en omvatten het geheele Mioceen, misschien zelfs nog een deel van het Oligoceen en het Plioceen. Zoowel bruinkoollagen als petroleumbeddingen komen in deze geosynclinaal voor. RUTTEN leidde uit facieswijzigingen in de afzettingen af, dat de N. Z. kustlijn van Koetei reeds in het Oud-Mioceen aanwezig was en reeds toen de straat van Makasser was aangelegd. Het petroleumterrein van Oost-Borneo is dus van het begin tot het einde gevormd in een geosynclinaal, die lag tusschen Borneo, een deel van het Soendaland, als denudatiegebied en de straat van Makasser als diepe zee. Deze opvatting wordt hier als een voorloopige aanvaard en er zij op gewezen, dat de geologische positie van Celebes ten opzichte van deze geosynclinaal en ten opzichte van de straat van Makasser hierbij onverklaard blijft.

II. *Sumatra en Java.*

De geosynclinale strook G, die de bekende petroleumvelden herbergt (zie schets Fig. 2), ligt langs de noordoost- en oostkust van Sumatra en de noordkust van Java, grenzend aan de Java-zee en de Straat Malakka. Zij is van tertiairen, neogenen ouderdom en het gedeelte G_1, dat op vele plaatsen petroleum en bruinkool bevat, is thans zwak geplooid en grootendeels tot land geworden. Hieraan sluit zich het gedeelte G_2, die reeds in eenige groote plooien gelegd was, toen de strook G_1 der geosynclinaal nog steeds daalde en het proces van sedimentatie daar nog voortging. Het bergland van

Sumatra, dat ik hier gezamenlijk het Barissan-gebergte zal noemen, is een geoanticlinaal en de reeks der Mentawei-eilanden is een tweede geoanticlinaal in dit plooiingsgebergte. Daarop volgt dan de zee *Z*, in dit geval de Indische Oceaan. In de strook G_1 heeft zoowel op Sumatra als op Java sterke en lang aanhoudende vulkanische werkzaamheid plaats gehad, die minstens reeds in het Oud-Mioceen een aanvang nam. Reeds in mioceenen tijd verhieven zich vulkanen, vermoedelijk als een reeks van eilanden, boven den zeespiegel, want reeds van af het Mioceen wordt andesietisch materiaal gevonden in de geosynclinale afzettingen der strook G_1. Maar waar lag nu voor deze geosynclinalen van Sumatra en Java het primaire denudatiegebied *L*, waaraan het niet-vulkanische materiaal, dat in den geosynclinalen trog tot bezinking kwam, voor Sumatra ten deele voor Java geheel werd ontleend? waar lag met andere woorden het continentale gebied *L*, waaraan deze geosynclinaal randstandig was?

Dit continentale gebied *L* lag noordoostwaarts; het was het neogene Soenda-land, dat eerst na afloop van den ijstijd grootendeels door de zee werd overstroomd. Het thans overstroomde gedeelte van het Soenda-land is in de schets, afgeleid uit de tegenwoordige isobaath van 40 vaam, door stippels aangeduid. Het gestippelde gedeelte geeft daarvan evenwel niet de uitgestrektheid in neogenen tijd, maar de grootste uitgestrektheid aan, die het eerst in plistoceenen tijd heeft bereikt.

De geosynclinalen, waarin de drie groote petroleumgebieden van Nederlandsch Indië, te weten die van Java, van Sumatra en van Borneo zijn onstaan, waren dus gedurende den tijd van hun ontwikkeling randstandig aan een en hetzelfde continentale denudatiegebied, het Soenda-land. Thans is deze randstandigheid alleen nog maar bij het Koetei-olieveld te zien, omdat van het neogene Soenda-land thans alleen nog maar Borneo als een klein continent boven water uitsteekt. Om de oorspronkelijke verhoudingen tusschen het denudatiegebied en zijn randstandige geosynclinale gebieden zich te kunnen voorstellen moet men het thans overstroomde gedeelte van het neogene Soenda-land, n.l. de Java-Zee en de Zuid-Chineesche Zee, zich weder met Borneo vereenigd als een samenhangend land denken.

Het is aannemelijk, dat oorspronkelijk de geosynclinale afzettingen een geheel of althans grootendeels gesloten gordel om het neogene Soenda-land zullen hebben gevormd. Met de petroleumvelden, die thans bekend zijn, is dit niet het geval. De vier gebieden, het Noord-Sumatra-terrein, het Djambi-Palembang-terrein, het Oost-Java-terrein en het Oost-Borneo-terrein zijn door groote tusschenruimten

gescheiden. In Midden-Sumatra, in de tusschenruimte tusschen de twee eerstgenoemde terreinen zijn de geosynclinale afzettingen ook aanwezig en petroleum komt er allicht ook in voor, maar dan vermoedelijk alleen op groote diepte en bedekt door jongere, post-tertiaire, veelal vulkanische, afzettingen van aanzienlijke dikte. Hetzelfde geldt waarschijnlijk voor de Lampongsche districten in het uiterste Zuid-oosten van Sumatra.

Met evenveel recht mag men de aanwezigheid van petroleum verwachten in afzettingen der neogene geosynclinaal langs de noordkust van Java bewesten het schiereiland Japara, dus in de tusschenruimte tusschen het Oost-Sumatra en het Oost-Java petroleumterrein. Maar daar zullen dan de petroleumhoudende lagen behalve door jongere sedimenten van onbekende dikte nog tot een diepte van hoogstens 50 Meter door de zee bedekt zijn.

Men mag verwachten, dat bij de steeds toenemende volmaking der boortechniek in de toekomst zekerheid zal worden verkregen omtrent de ligging van al wat thans nog aanwezig is van de petroleumterreinen en bruinkoolterreinen, wier oorsprong ligt in het randstandige geosynclinale gebied van het neogene Soenda-land.

CONCLUSIES.

1. De drie groote petroleumterreinen van Sumatra, Java en Oost-Borneo zijn op overeenkomstige wijze in neogenen tijd ontstaan in geosynclinale gebieden, randstandig aan het toenmalige Soenda-land, dat na den plistoceenen tijd voor een groot deel door de zee is overstroomd.

2. Er bestaat reden te verwachten, dat langs de noordkust van West-Java, onderzeesch en tot nog niet bekende diepte door jongere afzettingen bedekt, petroleumbeddingen zullen kunnen voorkomen, die dan op dezelfde wijze zullen zijn ontstaan als de terreinen van Oost-Sumatra en Oost-Java.

3. Het is onwaarschijnlijk, dat in het oostelijk deel van den Oost-Indischen Archipel [1]), met name op de vulkanische Kleine Soenda-eilanden, hoe veel hun geologische bouw ook met die van Java moge overeenkomen, neogene bruinkool- of petroleumafzettingen zullen ontwikkeld zijn, omdat één der voorwaarden voor hun ontstaan, de aanwezigheid van een geosynclinaal afzettingsgebied, randstandig aan een continentaal denudatiegebied, hier niet is vervuld.

4. De meening van RUTTEN, dat de aanleg van de Straat van

---

1) Nieuw-Guinea en aangrenzende eilanden uitgezonderd.

Makasser als een diepe depressie reeds in het Oud-Mioceen een aanvang had genomen, wordt door de wijze van voorkomen der olieterreinen gesteund.

5. Het feit, dat in neogenen tijd een geheel of nagenoeg geheel samenhangend geosynclinaal gebied, waarin later plooiing optrad, zich halfcirkelvormig langs de kust van het continentale Soenda-land uitstrekte, doet er aan twijfelen of het juist is met HAUG en P. SARASIN den Oost-Indischen Archipel als het ontmoetings- of ineenvlechtingsterrein te beschouwen van het Alpine plooiingsgebied en het circum-Pacifische plooiingsgebied, en wijst op de mogelijkheid, dat men met meer juistheid van een ontmoeting of ineenvlechting van een circum-Aziatisch en een Australo-Pacifisch plooiingsgebied zou kunnen spreken.

Scheikunde. — De Heer JAEGER biedt een mededeeling aan over: *„Twee isomere Chloortetra-acetyl-d-Fructosen"*.

§ 1. Voor eenigen tijd werd door Dr. D. H. BRAUNS vastgesteld, dat zich bij de inwerking van fosforpentachloride op in drogen chloroform opgeloste *β-tetra-acetylfructose*, bij lage temperatuur en al naar de gekozen omstandigheden tijdens de proefneming, *twee* derivaten vormen, welke volgens de analyse beide de samenstelling eener *chloor-tetracetyl-fructose* hebben, maar die in eigenschappen aanzienlijk van elkaar verschillen. Het eene isomeer, de *α-chloortetracetyl-d-fructose*, smelt bij 83° C, heeft eene specifieke rotatie van $[\alpha]_D^{20^\circ} = -160^\circ,9$ (maximaal, gemeten in chloroform-oplossing), en vormt zich, wanneer men aan het reactie-mengsel van te voren *aluminiumchloride* als katalysator toevoegt; in tegenstelling van wat men op grond dezer bereidingswijze zou mogen verwachten, is deze α-verbinding merkwaardigerwijze zóó onbestendig, dat zij, bij kamertemperatuur aan de lucht blootgesteld, zich reeds in een etmaal ontleedt, en in onzuiver *β-tetracetylfructose* en eene zuur reageerende vloeistof overgaat. Slechts als zij in het duister, bij eene temperatuur van 0° C. in de ijskast geplaatst wordt, bleek het mogelijk, om, bij uitsluiting van vochtigheid, de stof herhaalde malen uit aether te doen kristalliseeren, hoewel de bovengenoemde ontleding dan tenslotte tòch begint in te treden. In tegenstelling met deze zeer labiele α-verbinding, is de *β-chloortetra-acetyl-d-fructose,* welke onder dezelfde omstandigheden als de α-verbinding ontstaat, — wanneer daarbij namelijk slechts de katalysator wordt weggelaten, — eene zeer bestendige stof, die uit de meeste organische oplosmiddelen zonder eenigszins belangrijke ontleding kan worden omgekristalliseerd. Zij smelt bij 108° C., en vertoont in chloroform-oplossing eene specifieke rotatie van $[\alpha]_D^{20^\circ} = +45^\circ,2$. Terwijl het α-derivaat intensief bitter smaakt, is het β-isomeer slechts zwak bitter en aanzienlijk minder oplosbaar in de meeste oplosmiddelen dan de α-verbinding. Geheel bestendig is ook de β-verbinding niet: bij herhaald omkristalliseeren uit absoluten alkohol, kon de vorming van wat aethylacetaat worden waargenomen; en bij de kristallisatie van oplossingen in benzol bij 18° C., verkregen de gevormde kristallen eene lichtpaarse kleur, terwijl ook de moederloog eene allengs intensievere paars- of bruinkleuring vertoonde. In vergelijking der α-verbinding echter, is ze als „stabiel" te bestempelen;

de beide isomeren kunnen, voorzoover bekend is, *niet* direct in elkaar worden omgezet. Eene 0,1 normaal *NaOH*-oplossing splitst bij 0° C. uit het α-derivaat in vijf uren alle chloor af; de β-verbinding daarentegen verliest onder die omstandigheden haar chloor niet. De koolstof-, waterstof-, en chloor-bepalingen (Carius), alsmede die van het molekulairgewicht, leverden bij beide verbindingen dezelfde resultaten, welke in overeenstemming waren met de samenstelling eener *chloortetracetylfructose*: $C_6H_7O(C_2H_3O_2)_4Cl$.

§ **2**. In verband met de vroeger verrichte metingen aan isomere α- en β-*pentacetyl*-[1]), en *tetracetyl- d-fructosen*[2]), was het van belang, om deze twee isomeren ook van kristallografisch standpunt met elkaar en met de bovengenoemde verbindingen te vergelijken. Daartoe was het, vooral met het oog op de onbestendigheid van het α-derivaat, noodzakelijk, om beide isomeren opnieuw te bereiden, en de onder gunstige omstandigheden eventueel verkregen kristallen, onmiddellijk aan een onderzoek te onderwerpen. Een en ander is mij mogelijk geweest door de welwillendheid van den Heer Brauns, die eene hoeveelheid van het vroeger onderzochte β-*tetracetyl*-derivaat als uitgangsproduct te mijner beschikking stelde, alsmede zijne aanteekeningen omtrent de bereidingswijze der gechloorde derivaten; voor welke hulp ik hem ook bij dezen nogmaals mijn besten dank zeg.

De bereidingswijze, vooral van het α-derivaat, eischt vele voorzorgen, en gaat niet zoo gemakkelijk als men allicht zou meenen. Vooral moet er voor worden zorg gedragen, dat het uitgangsproduct zuurvrij is, dat de gebezigde stoffen geen vocht bevatten, en dat temperatuursverhoogingen zorgvuldig worden vermeden. Snel werken is een verdere eisch: de verdamping der oplossingen door afblazen met lucht, moet daarom met door $CaCl_2$ gedroogde lucht, en onder een glazen, met droog-apparaten verbonden klok plaats hebben. Het omkristalliseeren der α-verbinding kan het best uit drogen aether geschieden, en wel bij 0° C., in de ijskast en in het donker, onder zoo goed mogelijke uitsluiting van vocht. Bij het bereiden van de β-verbinding moet men dezelfde voorzorgen in acht nemen; doch het omkristalliseeren kan op de gewone wijze, en bij kamertemperatuur geschieden. Door herhaalde omkristallisatie uit warmen alkohol kan men de β-verbinding het best zuiveren; om haar in fraaie, meetbare kristallen te verkrijgen, lost men ze het best op in zuivere benzol, of in een mengsel van chloroform en benzol, waaruit zich

---

[1]) F. M. Jaeger Versl. der Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, **26**, 187, (1918).

[2]) F. M. Jaeger. Versl. der Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, **16**, 577, (1908); Zeits. f. Kryst. und Miner., **45**, 539, (1908).

bij langzame verdamping groote, doorzichtige, prismatische kristallen afzetten, die ongeveer denzelfden gemiddelden brekingsindex hebben als de benzolhoudende moederloog, en daarin dus bijna onzichtbaar zijn.

Bereiding van α-Chloortetracetyl-d-fructose.

30 Gram pas omgekristalliseerde en goed gedroogde *β-tetracetylfructose* worden in eene met glazen stop voorziene kolf in 90 ccm. drogen chloroform opgelost, en de oplossing daarna in eene schaal met ijs op 0° C. afgekoeld. Men voegt nu *eerst* 7,5 gram fijngepoederd, droog Al_2Cl_6 toe, en *daarna* 19 gram droog fosforpentachloride. Als alles op 0° C. gekomen is. neemt men de kolf uit het ijs, en laat het reactie-mengsel gedurende 30 minuten bij kamer-temperatuur aan zichzelf over, waarbij men van tijd tot tijd eens omschudt, en het gevormde zoutzuurgas, alsook den chloroformdamp gelegenheid geeft te ontwijken. Daarna plaatst men de kolf nog even in het ijs, brengt den inhoud snel in een scheitrechter, en wascht de vloeistof daarin snel eenige malen met eene door stukjes ijs afgekoelde oplossing van natriumbicarbonaat, droogt haar vervolgens met behulp van goed grof gekorreld anhydrisch $Ca\,Cl_2$, en verdampt de droge vloeistof na filtratie in een wijde kristalliseerschaal onder een met droog-apparaten verbonden glazen klok snel door middel van een krachtigen stroom droge lucht. De overblijvende dikvloeibare oplossing zet ten leste allengs kristalkorsten af, die op een zuigfilter gebracht worden, snel afgezogen, tusschen filtreerpapier afgeperst, en in drogen ether opgelost worden. In de ijskast zetten zich uit de oplossing allengs kleurlooze naaldjes of dikkere prisma's af, die, zoo mogelijk, direct voor het onderzoek gebezigd worden. Bij goed werken kan eene opbrengst van ongeveer 60—65 % van de theoretisch berekende verkregen worden.

Bereiding van β-chloortetracetyl-d fructose. De bereiding geschiedt geheel als boven, alleen wordt *geen* Al_2Cl_6 aan de oplossing toegevoegd. Na verdamping van den chloroform, voegt men een weinig absoluten alkohol toe, waardoor terstond een aggregaat van kleurlooze naalden ontstaat, dat als boven behandeld wordt, en vervolgens herhaaldelijk uit kokenden absoluten alkohol omgekristalliseerd wordt. Meetbare kristallen worden het best uit benzol verkregen; de stof kristalliseert in korte, dikke prisma's, terwijl de α-verbinding (uit aether) in slankere, kleurlooze zuiltjes aanschiet. De opbrengst is in beide gevallen ongeveer dezelfde.

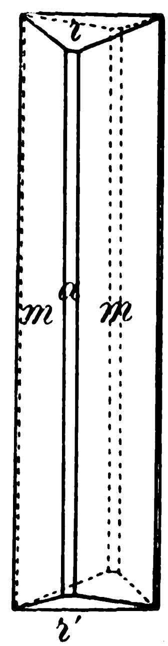


Fig. 1.
α-Chloortetra-acetyl-d-Fructose.

§ 3. **α-Chloortetracetyl-d-fructose** (Smpt. 83° C.) kristalliseert uit drogen aether bij 0° C. in den vorm van kleine kleurlooze en doorzichtige naalden met veelal rudimentair ontwikkelde eindvlakken.

Zij zijn *rhombisch*, zeer waarschijnlijk *bisfenoïdisch*, met de assenverhouding: $a : b : c = 0{,}9759 : 1 : 0{,}3284$.

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, smal, doch breeder dan $b = \{010\}$, welke vorm meestal slechts met een enkel vlak en dan nog uiterst smal, voorhanden is; $m = \{110\}$, breed en glanzend, meestal meervoudige reflexen leverend; $r = \{101\}$, levert zeer scherpe reflexen. In de vertikaal-zône gewoonlijk slingerende

hoekwaarden en meervoudige reflexen; bij zeer dunne naaldjes echter waren nauwkeurige metingen mogelijk. De habitus der kristallen is lang prismatisch volgens de c-as. Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden. Van de prisma-vlakken waren (110) en $(\bar{1}\,\bar{1}\,0)$ veel glanzender en gaven veel scherpere reflexen dan $(1\bar{1}0)$ en $(\bar{1}10)$, die meestal wat gekromd en wat doffer waren.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a:m = (100):(110) =$*	44 18	—
$r:r = (101):(\bar{1}01) =$*	37 12	—
$m:b = (110):(010) =$	45 44	45°42′
$m:m = (110):(\bar{1}10) =$	91 28	91 24
$a:r = (100):(101) =$	71 24 •	71 24
$r:m = (101):(110) =$	77 10	76 $18^{1}/_{3}$
$r:m = (101(:(1\bar{1}0) =$	77 2	76 $18^{1}/_{3}$

De kristallen zijn positief dubbelbrekend. Het optische assenvlak is {001}; op de prisma-vlakken treedt, juist aan den rand van het gezichtsveld, eene optische as uit. De dispersie heeft rhombisch karakter, met $\rho > v$.

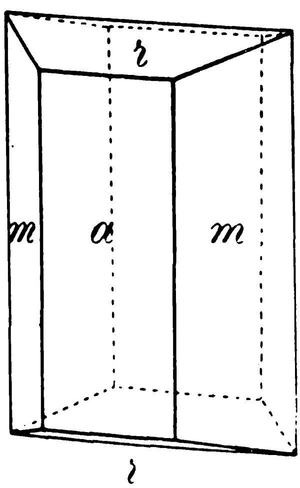


Fig. 2 β-*Chloor-tetracetyl-d-Fructose.*

De habitus der kristallen is zeer analoog aan dien der β-verbinding.

§ 4. **β-Chloortetra-acetyl-d-fructose**, smpt.: 108° C., kristalliseert uit benzol in den vorm van groote, waterheldere, zeer glanzende, kort-prismatische zuilen, die, afgezien van hunne geringere lengte-ontwikkeling, eene onloochenbare overeenkomst in gedaante met de kristallen der α-verbinding vertoonen.

Groote kleurlooze kristallen, die echter veelal meervoudige reflexen leveren en onvolkomen gebouwd zijn.

Rhombisch-bisphenoïdisch.

$$a:b:c = 1{,}7478:1:0{,}7112.$$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, en $m = \{110\}$, goed ontwikkeld en scherpe reflexen gevende; $r = \{101\}$, groot en uitstekend spiegelend; een enkele keer werd een positief bisfenoïed, waarschijnlijk {523}, zeer op den achtergrond tredend en moeilijk meetbaar, waargenomen.

De habitus is kortprismatisch naar de c-as, soms ook naar alle richtingen vrijwel gelijk ontwikkeld.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a : m = (100) : (110) =$*	60° 13½′	—
$a : r = (110) : (101) =$*	67 51½	—
$m : m = (110) : (\bar{1}10) =$	59 33	59° 33′
$r : r = (101) : (\bar{1}01) =$	44 17	44 17
$r : m = (101) : (110) =$	79 10	79 12¾
$o : m = (523) : (110) =$	ca. 50 56	51 51
$o : o = (523) : (\bar{5}\bar{2}\bar{3}) =$	ca. 48 50	49 12½
$o : o = (523) : (5\bar{2}\bar{3}) =$	117 30	117 0

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

§ **5**. Eene vorm-analogie tusschen beide *chloortetracetyl-d-fructosen* is niet in eenigszins uitgesproken wijze voorhanden, in tegenstelling van wat destijds bij de *α-* en *β-pentacetyl-d-fructosen* geconstateerd werd. De substitutie van één *H*-atoom door *chloor*, heeft echter blijkbaar geene verlaging van den symmetrie-graad tengevolge daar alle vier de geacetyleerde producten iso-symmetrisch, nl. *rhombisch-bisfenoidisch* blijken te zijn. Het is echter op grond van de verkregen resultaten voorhands nog niet mogelijk, om eenig nauwer verband tusschen deze *α-* en *β*-derivaten, en de vroeger bestudeerde, aan te toonen.

Laboratorium voor Anorganische en Fysische Chemie der Rijks-Universiteit te Groningen.

Scheikunde. — De Heer F. M. JAEGER biedt een mededeeling aan, getiteld: „*De Kristalvormen van eenige Gesubstitueerde Amiden van het para-Toluolsulfonzuur*".

§ 1. In het volgende worden de resultaten meegedeeld betreffende een onderzoek naar de kristalvormen van eene reeks van gesubstitueerde *amiden*, welke van het *p-toluolsulfonzuur* afgeleid zijn, en die reeds in 1902 door collega P. VAN ROMBURGH bereid werden. Deze verbindingen, welke over het algemeen fraai kristalliseeren, werden mij voor het beoogde doel indertijd door genoemden scheikundige welwillend afgestaan; de resultaten der metingen zijn echter tot dusverre nog niet gepubliceerd. Aan collega VAN ROMBURGH's welwillendheid heb ik bovendien ook enkele nog ontbrekende gegevens omtrent het specifiek gewicht van sommige dezer stoffen te danken. In den tekst is ter gelegener plaatse op enkele regelmatigheden in de kristalvormen van deze tot elkaar in nauw substitutieverband staande derivaten gewezen; een overzicht der numerische gegevens is aan het einde dezer verhandeling toegevoegd. Nauwere betrekkingen in kristalvorm zijn echter bij deze derivaten gebleken niet zeer talrijk te zijn.

§ 2. I. Nitro-p-Toluolsulfonamide.

Deze verbinding, welke bij 141° C. smelt, kristalliseert uit aethylalkohol in groote wijngele, zeer doorzichtige kristallen, welke vaak

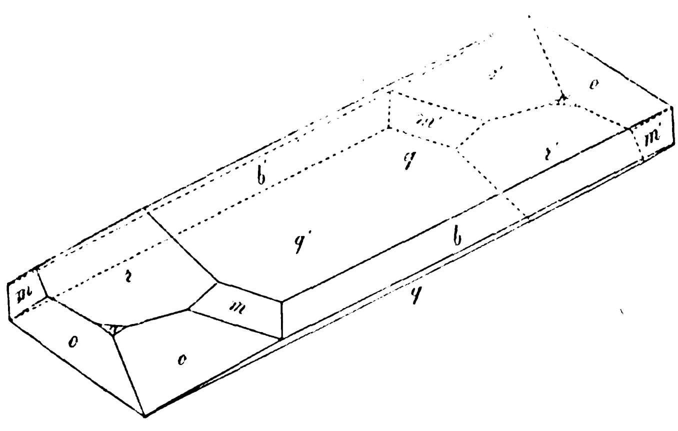


Fig. 1. *Nitro-p-Toluol-Sulfonamide.*

kromme vlakken vertoonen, waardoor de nauwkeurige meting der hoeken bemoeilijkt wordt. Uit aethylacetaat werden ook wel groote, zeshoekig begrensde, plaatvormige individuen verkregen. De beste metingen werden verricht aan zeer kleine, bijna kleurlooze kristalletjes, die zeer konstante hoekwaarden vertoonden.

Ofschoon de kristallen op grond hunner optische eigenschappen tot het monokliene stelsel moeten behooren, zoo is de hellingshoek β niet merkbaar van 90° verschillend.

Monoklien-prismatisch; pseudo-rhombisch.

$a : b : c = 1,2289 : 1 : 1,1812.$

$\beta = 90°.$

Waargenomen vormen: $q = \{012\}$, vóórheerschend, en uitstekende reflexen leverend; $r = \{101\}$, groot en sterk glanzend; $m = \{110\}$, kleiner, doch goed ontwikkeld en zeer scherpe spiegelbeelden gevend; $b = \{010\}$, smal en lichtzwak, ontbreekt dikwijls; $o = \{\bar{2}12\}$, goed ontwikkeld en glanzend; $a = \{100\}$, zeer klein en lichtzwak, doch voldoende meetbaar; tenslotte nog uiterst smal eene pyramide $x = \{711\}$ (?), meestal afwezig, en zeer lichtzwak. De habitus der kristallen is dik prismatisch naar q, met verlenging parallel aan de a-as; doch veelal zijn zij op grillige wijze vervormd. Gewoonlijk is r slechts met een enkel vlak aanwezig.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$q : r = (012) : (101) =$*	51°38⅓′	—
$m : q = (110) : (012) =$*	66 46	—
$q : q = (012) : (0\bar{1}2) =$	61 3	61° 8′
$q : b = (012) : (010) =$	59 29	59 26
$q : a = (012) : (100) =$	90 0	90 0
$o : o = (\bar{2}12) : (2\bar{1}2) =$	46 4½	46 8
$o : q = (\bar{2}12) : (012) =$	39 34½	39 37
$o : q = (\bar{2}12) : (0\bar{1}2) =$	67 59	68 10
$m : o = (\bar{1}10) : (\bar{2}12) =$	45 2	45 4
$o : r = (\bar{2}12) : (101) =$	23 4	23 4
$m : q = (110) : (01\bar{1}) =$	66 50	66 46
$a : x = (\bar{1}00) : (711) =$	18 48	19 3

De kristallen splijten duidelijk parallel aan $\{010\}$.

Alhoewel de hellingshoek β niet van 90° verschilt, zoo bewijzen de optische eigenschappen toch, dat de stof monoklien is: op $\{012\}$ is de uitdooving scheef, circa 23° ten opzichte der a-as. Evenzoo is de uitdoovingshoek op $\{010\}$ circa 42° ten opzichte der a-as. Het optische assenvlak is waarschijnlijk parallel aan $\{010\}$.

Het specifiek gewicht der kristallen bij 15° C. is 1,612; het aequivalent-volume dus: 133,99. De topische assen worden dus: $\chi : \psi : \omega =$ 5,5537 : 4,5194 : 5,3383.

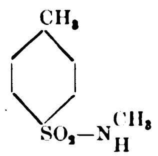
§ 3. Bij vergelijking dezer parameters met die der drie isomere *toluolsulfonamiden* zelve, is hunne vormverwantschap met de hier

Ortho-toluolsulfonamide; smpt: 156°,3 C. Tetragonaal-bipyramidaal. $p = \{110\}$; $v = \{111\}$; $o = \{113\}$; $u = \{313\}$.	$a : a : c = 1{,}000 : 1 : 1{,}0332$; $\beta = 90°$.
Meta-toluolsulfonamide; smpt: 108° C. Monoklien-prismatisch; pseudo-tetragonaal. $a = \{100\}$; $b = \{010\}$; $m = \{210\}$; $o = \{112\}$; $s = \{\bar{1}12\}$; $\omega = \{122\}$; $r = \{102\}$.	$a : b : c = 1{,}0453 : 1 : 1{,}0333$; $\beta = 88°27^{1/2}{}'$.
Para-toluolsulfonamide; smpt: 137°,5 C. Monoklien-prismatisch. $b = \{010\}$; $p = \{011\}$; $o = \{\bar{3}12\}$; $v = \{310\}$; $r = \{302\}$.	$a : b : c = 1{,}2016 : 1 : 0{,}9364$; $\beta = 87°29'$.
Nitro-p-toluolsulfonamide; smpt: 141° C. Monoklien-prismatisch; pseudo-rhombisch. $a = \{100\}$; $b = \{010\}$; $q = \{012\}$; $m = \{110\}$; $r = \{101\}$; $o = \{\bar{2}12\}$.	$a : b : c = 1{,}2289 : 1 : 1{,}1812$; $\beta = 90°$.

bestudeerde verbinding zeer duidelijk, als men de opstelling der verschillende kristallen slechts wat anders kiest, dan in de literatuur geschied is[1]). Daartoe hebben wij, met behoud der notatie van Weibull voor de verschillende combinatie-vormen, daaraan ietwat andere symbolen toegekend, zoodat het overzicht der gegevens dan wordt, zooals in bovenstaande tabel is aangeduid.

§ 4. II. p-Toluolsulfon-methylamide.

Deze verbinding heeft de structuur:



,

en smelt bij 76° C. Zij kristalliseert uit alkohol in de gedaante van zeer dunne, doorzichtige kleurlooze, rechthoekige plaatjes.

---

[1]) M Weibull, Zeit. f. Kryst. u. Miner. **15**, 251. (1889); O. Mügge, Diss. Göttingen, (1879), p. 15; zie ook K. Wallin en P. Klason, Ber. d. d. Chem. Ges. **12**, 1851. (1879). De kristallen waren uit alcohol of uit waterige oplossing verkregen. Over de binaire smeltlijn *o-* en *p- toluolsulfonamide*, zie P. V. Mc. Kie, Journ. Chem. Soc. London, **113**, 799. (1918).

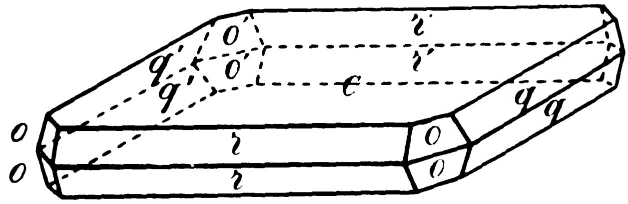


Fig. 2. *p-Toluolsulfonmethylamide.*

Rhombisch-bipyramidaal.

$a : b : c = 1{,}0358 : 1 : 2{,}6074.$

De kristallen zijn blijkbaar pseudo-tetragonale grensvormen; ook optisch blijkt eene toenadering tot tetragonale symmetrie aanwezig te zijn.

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, sterk glanzend, vóórheerschend, en uitstekende reflexen leverende; $r = \{101\}$, en $q = \{011\}$, ongeveer even breed, goed spiegelend; $o = \{121\}$, klein, dof en moeilijk nauwkeurig meetbaar. De habitus der kristallen is dun plaatvormig naar $\{001\}$, veelal met geringe verlenging volgens de b-as.

Hoekwaarden :	*Gemeten :*	*Berekend :*
$c : r = (001) : (101) =$*	68°20′	—
$c : q = (001) : (011) =$*	69 1	—
$r : r = (101) : (101) =$	43 20	43°20′
$q : q = (011) : (011) =$	41 58	41 58
$c : o = (001) : (121) =$	80 25	80 12
$o : o = (121) : (12\bar{1}) =$	18 10	18 36

Splijtbaar volgens $\{001\}$.

Het optische assenvlak is $\{100\}$, met de c-as als 1e bissectrix. De schijnbare assenhoek is zeer klein, zoodat de kristallen ook in dit opzicht tot optische éénassigheid neigen.

Het specifiek gewicht der kristallen bij kamertemperatuur was: $d_{4°} = 1{,}340$; het molekulairvolume is dus: 138,06, en de topische assen worden: $\chi : \psi : \omega = 3{,}8442 : 3{,}7113 : 9{,}6770$.

§ 5. III. Nitro-p-Toluolsulfon-methylamide.

Deze verbinding ontstaat uit de eerste door vervanging van een der H-atomen der amido-groep door CH_3. De verbinding, die uit aethylacetaat in fraaie, licht wijngele prisma's kristalliseert, smelt bij 91° C. De kristallen zijn mat en daardoor moeilijk nauwkeurig te meten.

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 1{,}0522 : 1 : 0{,}3948;$

$\beta = 86°40\tfrac{1}{2}.$

Waargenomen vormen: $m = \{110\}$, het grootst van alle ontwikkeld: $a = \{100\}$, smal en $r = \{101\}$ nog smaller; $o = \{111\}$, klein, goed reflecteerend. De habitus is naaldvormig of prismatisch in de richting der c-as.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$m:a = (110):(100) =^*$	46°24½′	—
$o:o = (111):(1\bar{1}1) =^*$	71 52	—
$m:o = (\bar{1}10):(111) =^*$	78 18	—
$m:o = (110):(111) =$	49 35	49°39½′
$m:m = (110):(1\bar{1}0) =$	87 11	87 11
$c:m = (001):(110) =$	—	87 42½
$r:o = (101):(111) =$	35 58	35 56

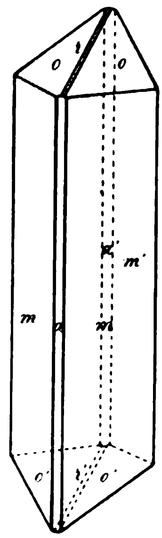


Fig. 3. *Nitro-p-toluolsulfonmethylamide.*

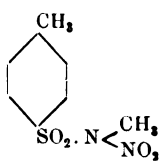
Volkomen splijtbaar naar $\{101\}$.

Steeds waren de kristallen vrij slecht reflecteerend, en veelal kromvlakkig, zoodat een meer nauwkeurig en in bijzonderheden gaand onderzoek vrijwel tot eene illusie gemaakt werd.

Op a rechte, op m scheeve uitdooving ten opzichte der ribbe $a:m$. Het specifiek gewicht der kristallen bedroeg: 1,485 bij 16° C.; het aeq. volume is dus: 154,21, en de topische assen worden: $\chi:\psi:\omega = 7{,}5664:7{,}1910:2{,}8390$.

§ 6. IV. p-Toluolsulfon-methyl-nitramide.

Deze verbinding, welke de structuur:



bezit, en die bij 60° C. smelt, kristalliseert uit een mengsel van ligroïne en aether in bijna kleurlooze, platte naalden, of in dikke, kortprismatische kristallen. Zij zijn goed gebouwd en levere scherpe spiegelbeelden.

Monoklien-prismatisch.
$a:b:c = 1{,}3210:1:0{,}6892$;
$\beta = 78°6'$.

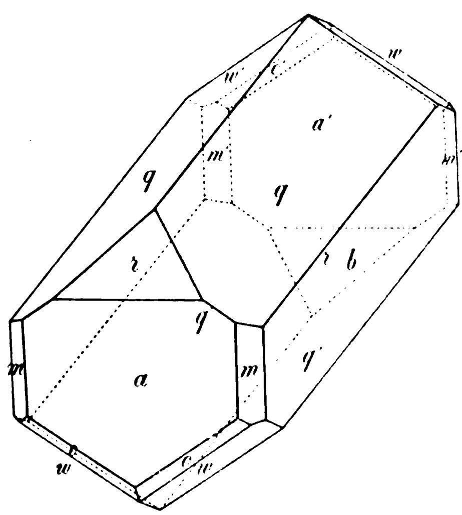


Fig. 4. *p-Toluolsulfon-methyl-nitramide.*

Waargenomen vormen: $q = \{011\}$, breed en sterk glanzend; $a = \{100\}$, groot, meestal met één rudimentair vlak, doch goed spiegelend; $b = \{010\}$, smaller, soms iets gekromd; $r = \{101\}$, groot en glanzend; $m = \{110\}$, uitstekende reflexen leverend; $\omega = \{\bar{1}11\}$, meestal smal, doch bij de naaldvormige individuen even breed als m, terwijl bij deze de vorm r veelal ontbreekt; voorts nog $o = \{\bar{3}11\}$, soms vrij goed ontwikkeld. De habitus is dikprismatisch met geringe strekking parallel aan de a-as, of ook wel dunprismatisch paralel die as.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) =$*	67°59½′	—
$q : a = (011) : (100) =$*	80 9	—
$a : m = (100) : (110) =$*	52 14½	—
$q : b = (011) : (010) =$	56 0	56° 0′
$a : r = (100) : (101) =$	53 14	53 21
$q : r = (011) : (101) =$	41 14	41 9
$b : m = (010) : (110) =$	37 44	37 45½
$a : w = (100) : (\bar{1}11) =$	74 49	75 2
$w : q = (111) : (011) =$	25 1	24 49
$a : o = (100) : (\bar{3}11) =$	40 50	40 58
$o : q = (\bar{3}11) : (011) =$	59 1	58 53

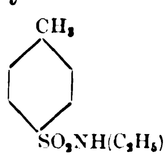
Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

De uitdoovingsrichting op $\{010\}$ maakt ca. 31° met de richting der a-as.

Het spec. gewicht der kristallen bedraagt: 1.454 bij kamertemperatuur; het aeq. volume is dus: 165,06, en de topische assen worden: $\chi : \psi : \omega = 7{,}5309 : 5{,}7009 : 3{,}9291$.

§ 7. V. p-Toluolsulfon-aethylamide.

Deze verbinding, welke bij 64° C. smelt, heeft de structuur:



Zij kristalliseert uit een mengsel van absoluten alkohol en aether in kleurlooze, parallelogramvormige dunne plaatjes of in prismatische kristalletjes; de oplossingen hebben groote neiging tot oververzadiging.

Triklien-pediaal

$a : b : c = 0{,}6481 : 1 : 0{,}4136$;

$\alpha = 77°39\tfrac{1}{2}$; $\quad A = 77°37\tfrac{1}{3}$

$\beta = 88°6'$; $\quad B = 88°21\tfrac{1}{2}'$.

$\gamma = 102°55\tfrac{1}{2}$; $\quad C = 102°53\tfrac{1}{2}$.

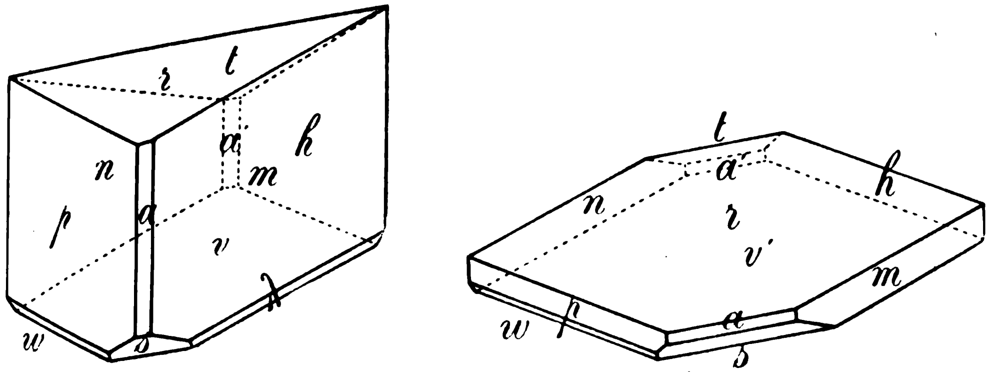


Fig. 5. *p-Toluolsulfon-aethylamide.*

Waargenomen vormen: $r = \{101\}$ en $v = \{\bar{1}0\bar{1}\}$, groot en sterk glanzend, veelal voorheerschend, zoodat de kristallen naar deze twee vormen plaatvormig zijn; $t = \{\bar{1}01\}$, eveneens glanzend, ietwat kleiner dan r en v; $s = \{10\bar{1}\}$, kleiner dan t, meestal fijn gestreept parallel de ribbe $s:v$; $a = \{100\}$ en $a' = \{\bar{1}00\}$, small, doch goed spiegelend; $m = \{110\}$, breed, steeds parallel de ribbe $r:m$ gestreept; $p = \{1\bar{1}0\}$, $n = \{\bar{1}\,\bar{1}\,0\}$, en $h = \{\bar{1}10\}$, groot en zeer glanzend; $\omega = \{1\,\bar{2}\,\bar{1}\}$ en $\lambda = \{12\bar{1}\}$, zeer smal en slecht meetbaar, λ meestal parallel de ribbe $m:v$ gestreept; waarschijnlijk nog $q = \{0\bar{1}1\}$, zeer klein en meestal niet meetbaar. De habitus is plaatvormig naar r, of dikprismatisch naar de c-as. Splijtbaar volgens $\{101\}$.

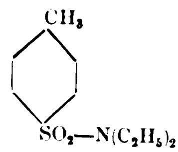
Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a:r = (100):(101) =$*	58°34′	—
$a:s = (100):(10\bar{1}) =$*	56 14	—
$a:p = (100):(1\bar{1}0) =$*	37 11	—
$a:m = (100):(110) =$*	29 23	—
$r:p = (101):(1\bar{1}0) =$*	58 17	—
$r:t = (101):(\bar{1}01) =$	65 18	65°12′
$s:v = (10\bar{1}):(\bar{1}0\bar{1}) =$	65 10	65 12
$s:p = (10\bar{1}):(1\bar{1}0) =$	70 40	70 24
$s:m = (10\bar{1}):(110) =$	56 39	56 37
$r:m = (101):(110) =$	68 24	68 35½
$w:p = (1\bar{2}\bar{1}):(1\bar{1}0) =$	51 2	51 13

Op alle vlakken is de uitdooving scheef georienteerd ten opzichte der begrenzende ribben: op r ca. 46° ten opzichte van de ribbe $r:p$; op p ca. 36°, op a ca. 43°, op m ca. 34° ten opzichte van de richting der c-as. Op r en p is de uittreding eener optische as zichtbaar, excentrisch in het gezichtsveld.

Het specifiek gewicht der kristallen is 1,307; het aequivalent-volume dus: 152,26, en de topische assen worden: $\chi : \psi : \omega = 4,6805 : : 8,4202 : 3,4825$.

§ 8. VI. p-Toluolsulfon-diaethylamide.

Deze verbinding, welke de structuur:



bezit, en bij 59° C. smelt, kristalliseert uit absoluten alkohol + aethylacetaat in den vorm van dunne, kleurlooze, hexagonaal begrensde plaatjes, of ietwat dikkere, platte, en veelal ondoorzichtige kristallen.

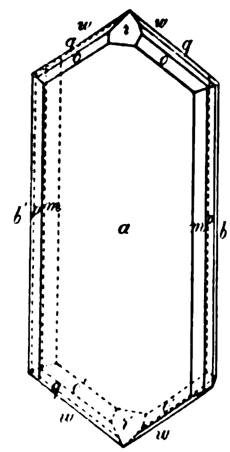


Fig. 6. *p-Toluolsulfon-diaethylamide.*

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 1,0149 : 1 : 0,6762$;

$\beta = 72°1'$.

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, vóórheerschend en sterk glanzend: $o = \{111\}$, $q = \{011\}$, $m = \{110\}$, $p = \{120\}$, alle ongeveer even breed ontwikkeld, en uitstekende reflexen leverend; $r = \{101\}$, sterk glanzend, goed ontwikkeld; $\omega = \{\bar{1}11\}$, wat smaller dan o, doch eveneens scherpe spiegelbeelden gevend; $n = \{210\}$ en $b = \{010\}$, uiterst smal, veelal ontbrekend en lichtzwak. De kristallen zijn goed gebouwd, en maken nauwkeurige metingen mogelijk. De habitus is afgeplat volgens a of dikprismatisch, en gestrekt in de richting der c-as. De kristallen zijn zeer broos.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a : o = (100) : (111) =$*	49°40′	—
$a : q = (100) : (011) =$*	74 57	—
$a : r = (100) : (101) =$*	44 17½	—
$o : q = (111) : (011) =$	25 17	25°17′
$q : \omega = (011) : (\bar{1}11) =$	32 18	32 20½
$\omega : a = (\bar{1}11) : (\bar{1}00) =$	72 45	72 42½
$o : r = (111) : (101) =$	25 15	25 17
$b : o = (010) : (111) =$	64 45	64 43
$a : m = (100) : (110) =$	43 58½	43 59½
$m : p = (110) : (120) =$	18 34	18 32½

Hoekwaarden :	*Gemeten :*	*Berekend:*
$p : b = (120) : (010) =$	27 23	27 23
$b : m = (010) : (110) =$	46 2	46 0½
$a : n = (100) : (210) =$	26 9	25 46
$n : m = (210) : (110) =$	17 59	18 13½
$a : p = (100) : (120) =$	62 31	62 37

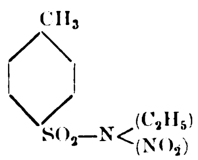
Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet geconstateerd.

Het optische assenvlak is {010}. Zeer sterke, geneigde dispersie, met $\varrho > v$; op {100} is de uittreding van ééne as, excentrisch in het gezichtsveld, waarneembaar.

Het specifiek gewicht der kristallen bij 15° C. was: 1,230; het aequivalent-volume is dus: 184,55, en de topische parameters worden: $\chi : \psi : \omega = 6,6611 : 6,5633 : 4,4381$.

§ 9. VII. p-Toluolsulfon-aethylnitramide.

Deze verbinding, welke de structuur:



bezit, kristalliseert uit aether in groote, kleurlooze, doorzichtige kristallen, of in dunne, zeshoekig begrensde plaatjes. Zij smelt bij 69° C.

Monoklien-prismatisch.
$a : b : c = 1,0178 : 1 : 1,1005$;
$\beta = 88°11'$.

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, sterk overwegend en goed spiegelend; $a = \{100\}$ somtijds groot, veelal ook smaller, doch steeds uiterst scherpe reflexen leverende; $m = \{130\}$, goed ontwikkeld, doch dikwijls met kromme vlakken, en wat mat; $r = \{\bar{2}03\}$, goed spiegelend, vaak afwezig; $\omega = \{\bar{1}33\}$, uiterst smal, meestal ontbrekend, en slechts bij benadering meetbaar. De habitus is òf kort prismatisch, met strekking parallel aan de b-as, of dun-plaatvormig parallel aan {001}.

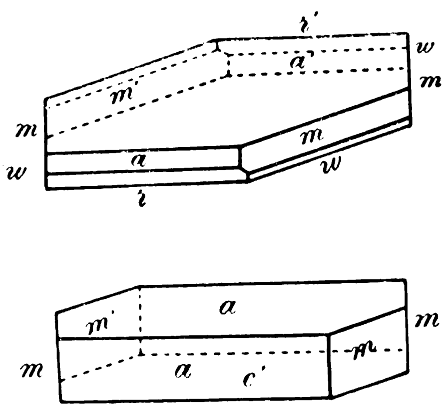


Fig. 7. *p-Toluolsulfaethylnitramide.*

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a:c = (100):(001) =$*	88°11′	—
$a:m = (100):(130) =$*	71 51½	—
$a:r = (100):(20\bar{3}) =$*	55 25	—
$c:r = (001):(\bar{2}03) =$	36 24	36 24
$m:m = (130):(1\bar{3}0) =$	36 27	36 17
$c:w = (001):(\bar{1}33) =$	50 8	49 29
$m:w = (\bar{1}30):(133) =$	40 58	41 5
$c:m = (001):(130) =$	89 24	89 26

Zeer volkomen splijtbaar parallel {001}.

Op *a* en *c* georienteerde uitdooving, vaak echter undulatorisch, als gevolg van geometrische anomalieën in den bouw der kristallen. Het specifiek gewicht der kristallen was 1,450; het aeq. volume dus: 168,27, en de topische parameters worden: $\chi:\psi:\omega = 5,4115:$ $: 5,3169 : 5,8513$.

§ 10. VIII. Nitro-p-Toluolsulfon-aethylnitramide.

Deze verbinding, welke bij 76° C. smelt, is moeilijk in goede kristallen te verkrijgen. De hier gemeten kristallen werden verkregen door zeer langzame verdamping eener heet-verzadigde oplossing in tetrachloorkoolstof.

Dunne, lichtgele, sterk glanzende plaatjes, die meestal hemimorf ontwikkeld zijn (fig. 8).

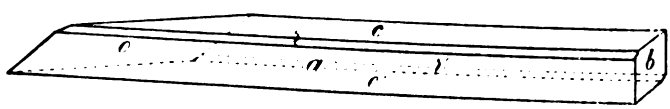


Fig. 8. *Nitro-p-Toluolsulfon-aethylnitramide.*

Monoklien, wellicht *sfenoïdisch.*

$a:b:c = 0,4812 : 1 : 0.8766;$

$\beta = 85°5'.$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, vóórheerschend, sterk glanzend; $o = \{\bar{1}\,\bar{1}\,1\}$, uitstekende spiegelbeelden leverend, meestal met slechts één enkel vlak; $a = \{100\}$, goede reflexen gevend; $b = \{010\}$, veelal afwezig, doch anders goed spiegelend; $r = \{705\}$, zeer smal, vaak ontbrekend. De kristallen vertoonen, vooral in de orthodiagonaalzône, vaak slingerende hoekwaarden en meervoudige reflexen. De habitus is afgeplat naar {001}, en langgestrekt in de richting der *b*-as.

Hoekwaarden:	*Waargenomen:*	*Berekend:*
$c:a = (001):(100) =$*	85° 5′	—
$c:o = (001):(\bar{1}\bar{1}1) =$*	67 16	—
$a:o = (\bar{1}00):(1\bar{1}\bar{1}) =$*	37 21	—
$c:r = (001):(705) =$	64 42	64°23′
$r:a = (705):(100) =$	20 16	20 42
$c:b = (001):(010) =$	89 52	90 0
$o:r = (\bar{1}\bar{1}1):(705) =$	54 23	54 24

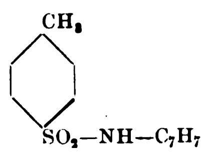
Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Het optisch assenvlak is {010}; op c en a treedt eene as excentrisch uit.

Het specifiek gewicht der kristallen is: 1,555; het aequivalent-volume dus: 156,91, en de topische assen worden: $\chi:\psi:\omega =$ 3,4652 : 7,2001 : 6,3119.

§ 11. IX. p-Toluolsulfon-benzylamide.

Structuur:



De verbinding kristalliseert uit een mengsel van aether en alkohol in groote, kleurlooze kristallen, wier habitus nog al sterk wisselt. De stof smelt bij 113° C. De kristallen zijn goed gevormd, en maken nauwkeurige metingen mogelijk.

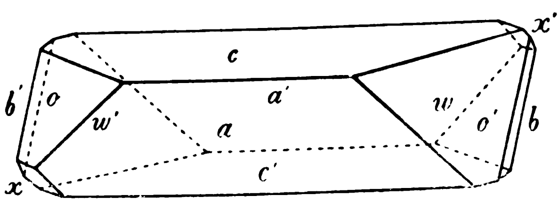


Fig. 9. *p-Toluolsulfon-benzylamide.*

Triklien-pinakoïdaal.

$a:b:c = 0{,}9778:1:0{,}8991.$

$A = 83°32′ \quad . \quad \alpha = 83°24\tfrac{1}{2}′.$

$B = 90°56′ \quad . \quad \beta = 91°33′.$

$C = 95°15\tfrac{1}{2} \quad . \quad \gamma = 95°96′.$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, en $c = \{001\}$, groot en sterk glanzend; meestal is a wat breeder dan c; $\omega = \{111\}$ en $o = \{\bar{1}\bar{1}1\}$,

groot, glanzend, en ongeveer even sterk ontwikkeld; $b = \{010\}$, smal, wat mat reflecteerend, gewoonlijk maar met één vlak aanwezig, en veelal geheel ontbrekend; $x = \{1\bar{1}1\}$, klein, lichtzwak, doch goed meetbaar. De habitus der kristallen is gewoonlijk prismatisch naar de b-as.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a : c = (100) : (001) =$*	89° 4′	—
$c : o = (001) : (1\bar{1}1) =$*	47 33	—
$c : w = (001) : (111) =$*	55 47	—
$a : o = (100) : (111) =$*	59 4	—
$a : w = (100) : (111) =$*	51 12½	—
$o : w = (111) : (111) =$	66 45½	66°50½′
$o : b = (111) : (010) =$	55 38½	55 46
$b : w = (010) : (111) =$	57 33½	57 23½
$x : a = (1\bar{1}\bar{1}) : (100) =$	57 38	57 38
$b : x = (0\bar{1}0) : (1\bar{1}1) =$	62 50	62 42½
$o : x = (1\bar{1}1) : (1\bar{1}1) =$	77 52	77 53
$x : c = (11\bar{1}) : (00\bar{1}) =$	54 24½	54 34

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

De uitdooving op a en c was scheef georienteerd ten opzichte der ribbe $a : c$.

Het specifiek gewicht der kristallen is: **1,313** bij 17° C.; het aeq.-volume dus: 198,78, en de topische parameters worden: $\chi : \psi : \omega = 5{,}9793 : 6{,}1150 : 5{,}4981$.

§ 12. X. Nitro-p-Toluolsulfon-benzylnitramide.

Deze verbinding, die bij 153° C. smelt, kristalliseert uit aethylacetaat in kleine, zeer sterk glanzende, kleurlooze kristallen. Zij vertoonen vaak wat slingerende hoekwaarden, en ook de vlakken van $\{001\}$ zijn somtijds gebogen. Nochtans waren goede metingen mogelijk.

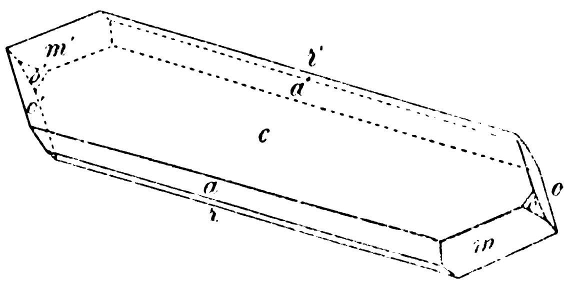


Fig. 10. *Nitro-p-Toluolsulfon-benzylnitramide.*
Triklien-pinakoïdaal,

$$a : b : c = 1{,}8095 : 1 : 1{,}3139.$$

$$\begin{array}{llll} A = & 95°34' & . & \alpha = 100°50' \\ B = & 101°22' & . & \beta = 104°43' \\ C = & 67°20' & . & \gamma = 65°33'. \end{array}$$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, groot en glanzend, soms iets gekromd; $a = \{100\}$, smaller, doch sterk glanzend; $m = \{110\}$, en $o = \{\bar{1}11\}$, ongeveer even goed ontwikkeld, en goede reflexen leverend; $s = \{011\}$, klein, doch goed meetbaar; deze vorm ontbreekt vaak. Verder eene enkele maal nog: $r = \{101\}$, zeer smal. De habitus der kristallen is die van dunne blaadjes, parallel $\{001\}$ ontwikkeld, en met verlenging in de richting der b-as.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a : c = (100) : (001) =$*	78°38′	—
$c : o = (001) : (\bar{1}11) =$*	62 28½	—
$a : m = (100) : (110) =$*	79 13	—
$c : m = (001) : (110) =$*	77 25	—
$o : m = (\bar{1}11) : (110) =$*	54 10½	—
$a : o = (100) : (1\bar{1}\bar{1}) =$	56 48½	56°47′
$o : s = (1\bar{1}\bar{1}) : (0\bar{1}\bar{1}) =$	44 19½	44 10
$s : a = (0\bar{1}\bar{1}) : (100) =$	79 3	79 1¾
$a : r = (100) : (\bar{1}01) =$	59 16	59 7
$r : c = (\bar{1}01) : (001) =$	42 6	42 15
$s : c = (011) : (001) =$	—	50 52

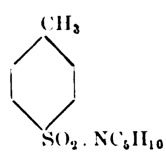
Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Op $\{001\}$ is de uitdoovingshoek 8° ten opzichte der ribbe $a : c$. In convergent gepolariseerd licht is ééne hyperbool aan den rand van het gezichtsveld zichtbaar.

Het specifiek gewicht der kristallen bedraagt: 1,530 bij 17° C.; het aequiv.-volume is dus: 229,54, en de topische parameters worden: $\chi : \psi : \omega = 8{,}6739 : 4{,}7934 : 6{,}2983$.

§ 13. XI. p-Toluolsulfon-piperidide.

Structuur:



Deze stof, die bij 98° C. smelt, werd uit aether verkregen in den vorm van groote, platte, kleurlooze, en sterk glanzende kristallen

van rechthoekigen habitus. Zij zijn zeer goed gebouwd, fraai doorzichtig, en maken nauwkeurige metingen mogelijk.

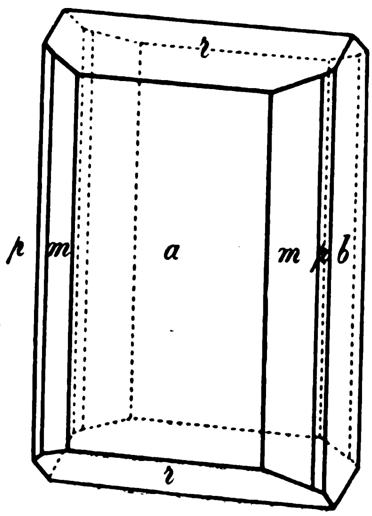


Fig. 11. *p-Toluolsulfon-piperidide.*
Rhombisch-bipyramidaal.
$a : b : c = 0{,}7474 : 1 : 0.3790.$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, vóórheerschend en goede reflexen leverend; $m = \{110\}$, en $b = \{010\}$, breed en sterk glanzend; $p = \{120\}$, zeer smal; $r = \{101\}$, breed, en goede spiegelbeelden gevende.

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a : m = (100) : (110) =$*	36°46½′	—
$a : r = (100) : (101) =$*	63 6½	—
$m : p = (110) : (120) =$	19 23½	19°26½′
$p : b = (120) : (010) =$	33 50	33 47
$r : r = (101) : (\bar{1}01) =$	53 46½	53 46⅔

Geen duidelijke splijtbaarheid werd gevonden.

Het optische assenvlak is $\{001\}$, met de b-as als eerste bissectrix; de dispersie, die met het rhombisch karakter der kristallen in overeenstemming is, heeft eene groote waarde: $\rho < v$. De schijnbare assenhoek is klein.

Het specifiek gewicht der kristallen bedroeg: 1,281 bij 15° C.; het aeq.-volume is dus: 186,57, en de topische assen worden berekend op: $\chi : \psi : \omega = 6{,}5029 : 8{,}7005 : 3{,}2976.$

§ 14. XII. Nitro-p-Toluolsulfon-piperidide.

De verbinding smelt bij 108° C., en kristalliseert uit aethylacetaat in prachtige, groote, ietwat wijngele, doorzichtige en sterk glan-

zende kristallen. Zij zijn goed gebouwd, en maken nauwkeurige metingen mogelijk.

Monoklien-prismatisch.

$a : b : c = 0{,}7466 : 1 : 1{,}5713.$

$\beta = 78^\circ 39'.$

Waargenomen vormen: $c = \{001\}$, vóórheerschend; $m = \{110\}$, breed en glanzend, vertoont soms eene fijne streeping parallel de ribben $m : c$; $o = \{111\}$, en $\omega = \{\bar{1}11\}$, ongeveer even sterk ontwikkeld, en iets smaller dan m; $r = \{101\}$, goed reflecteerend; $s = \{\bar{1}01\}$, iets kleiner dan r, doch ontbreekt vaak; $t = \{\bar{h}\,o\,k\}$, uiterst smal, en niet meetbaar, zelden; $b = \{010\}$, klein en smal, levert wat mattere reflexen; $q = \{011\}$, duidelijk ontwikkeld, en goede reflexen leverende. De habitus is veelal isometrisch, of zwak afgeplat parallel aan $\{001\}$.

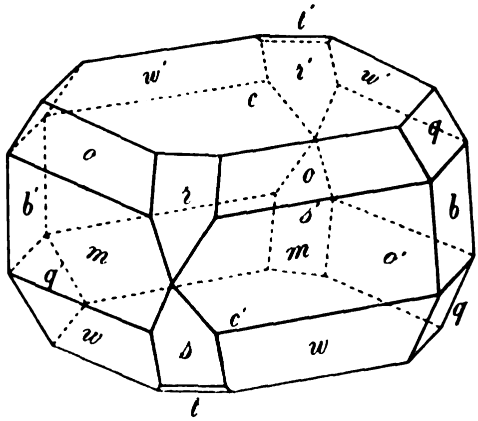


Fig. 12. *Nitro-p-Toluolsulfon-piperidide.*

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$c : \omega = (001) : (\bar{1}11) =^*$	77°11′	—
$\omega : \omega = (\bar{1}11) : (\bar{1}\bar{1}1) =^*$	71 $22^1/_2$	—
$m : c = (110) : (001) =^*$	80 52	—
$c : r = (001) : (101) =$	55 28	55°$34^2/_3$′
$r : s = (101) : (10\bar{1}) =$	50 $13^1/_2$	50 $16^1/_3$
$s : c = (\bar{1}01) : (001) =$	74 11	74 9
$c : q = (001) : (011) =$	56 57	57 $0^2/_3$
$b : q = (010) : (011) =$	33 3	32 $59^1/_3$
$\omega : s = (\bar{1}11) : (\bar{1}01) =$	35 41	35 $41^1/_4$
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) =$	72 22	72 $24^1/_2$
$c : o = (001) : (111) =$	61 20	61 $13^1/_2$
$o : m = (111) : (110) =$	19 30	19 8
$m : \omega = (110) : (11\bar{1}) =$	21 $57^1/_2$	21 57
$m : b = (110) : (010) =$	53 49	53 $47^3/_4$

Zeer volkomen splijtbaar parallel $\{001\}$, duidelijk volgens $\{110\}$. Op $\{001\}$ is de uitdooving diagonaalsgewijze.

Het specifiek gewicht der kristallen bij 15° C. was: 1,384; het aeq.-volume is dus: 205,20, en de topische parameters worden:

$$\chi : \psi : \omega = 4{,}2031 : 5{,}6295 : 8{,}8455.$$

§ 15.

Overzicht der Kristallografische Betrekkingen tusschen de hier onderzochte Derivaten van het p-Toluolsulfonzuuramide.

Naam der Verbinding:	Smelt-punt:	Symmetrie:	Assenverhouding:	Spec. Volume:	Topische parameters:
p-Toluolsulfonamide	137°,5 C.	Mon. prism.	1,2016 : 1 : 0,9364 $\beta = 87°29'$		
Nitro-*p*-toluolsulfonamide	141°	Mon. prism. (pseudo-rhomb.)	1, 2289 : 1 : 1,1812 $\beta = 90°$	133,99	5,5537 : 4,5194 : 5,3383
p-Toluolsulfonmethylamide	76°	Rhomb. bipyr.	1,0358 : 1 : 2,6074	138,06	3,8442 : 3,7113 : 9,6770
Nitro-*p*-toluolsulfonmethylamide	91°	Mon. prism.	1,0522 : 1 : 0,3948 $\beta = 86°40\frac{1}{2}'$	154,21	7,5664 : 7,1910 : 2,8390
p-Toluolsulfonmethylnitramide	60°	Mon. prism.	1,3210 : 1 : 0,6892 $\beta = 78°6'$	165,06	7,5309 : 5,7009 : 3,9291
p-Toluolsulfonaethylamide	64°	Trikl. (pediaal)	0.6481 : 1 : 0.4136 $\alpha = 77°39'$; $\beta = 88°6'$; $\gamma = 102°55'$	152,26	4,6805 : 8,4202 : 3,4825
p-Toluolsulfondiaethylamide	59°	Mon. prism.	1,0149 : 1 : 0,6762 $\beta = 72°1'$	184,55	6,6611 : 6,5633 : 4,4381
p-Toluolsulfonaethylnitramide	69°	Mon. prism.	1,0178 : 1 : 1,1005 $\beta = 88°11'$	168,27	5,4115 : 5,3169 : 5,8513
Nitro-*p*-Toluolsulfonaethylnitramide	76°	Mon. (sfenoïd.)	0,4812 : 1 : 0,8766 $\beta = 85°5'$	156,91	3,4652 : 7,2001 : 6,3119
p-Toluolsulfonbenzylamide	113°	Trikl. pinak.	0,9778 : 1 : 0,8991 $\alpha = 83°24\frac{1}{2}'$; $\beta = 91°33'$; $\gamma = 95°26'$	198,78	5,9793 : 6,1150 : 5,4981
Nitro-*p*-toluolsulfonbenzylnitramide	153°	Trikl. pinak.	1,8095 : 1 : 1,3139 $\alpha = 100°50'$; $\beta = 104°43'$; $\gamma = 65°33'$	229.54	8,6739 : 4,7934 : 6,2983
p-Toluolsulfonpiperidide	98°	Rhomb. bipyr.	0,7474 : 1 : 0,3790	186,57	6,5029 : 8,7005 : 3,2976
Nitro-*p*-toluolsulfonpiperidide	108°	Mon. prism.	0,7466 : 1 : 1.5713 $\beta = 78°39'$	205,20	4,2031 : 5,6295 : 8,8455

Groningen, Juni 1920.

Anorganisch en Fysisch-chemisch Laboratorium der Rijks-Universiteit.

Wiskunde. De heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer J. WOLFF: „*Over de Stelling van Picard.*"

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

De stelling van PICARD over het gedrag van een eenwaardige analytische functie in de omgeving van een gëisoleerd essentieel singulier punt is door BOREL in 1896 bewezen zonder gebruik van de modulaire functie [1]). Hiermede werd een rij van elementaire bewijzen voor het beroemde theorema geopend. SCHOTTKY verscherpte in 1904 BOREL's bewijsvoering in aanzienlijke mate [2]). Een belangrijke stelling over holomorfe en meromorfe functies die nergens nul en nergens 1 zijn, werd daarbij door hem gevonden en daarop liet hij zijn elementair bewijs voor het theorema van PICARD steunen [3]). Daarna wist LANDAU een uitbreiding van de door SCHOTTKY gebruikte stelling te ontdekken [4]). Het merkwaardige resultaat luidt als volgt: *als* $f(z)$ *holomorf is voor* $|z| < R$, *daar nergens nul of* 1 *is, als verder* $|f(0)| \leq \mu$, *dan is voor* $|z| \leq \theta R$, *waarin* $\theta < 1$, *overigens willekeurig,* $|f(z)| \leq \Phi(\mu, \theta)$, *waarin* Φ *alleen van* θ *en* μ *afhangt.* Daar SCHOTTKY deze stelling niet bezat, is zijn redeneering hier en daar subtiel. Fraaie bewijzen van de stelling van PICARD zijn in 1912 en 1913 door MONTEL gegeven, zij berusten echter op de beschouwing van zoogenaamde *normale families van functies* [5]). BERNAYS, die in 1911 de stelling van LANDAU heel eenvoudig uit die van SCHOTTKY te voorschijn haalde [6]) gaf in 1913 nieuwe afleidingen van LANDAU's stelling en onderzocht daarbij tevens de functie $\varphi(a)$, bovenste grens voor den straal van een cirkel waarin de reeks

---

1) Comptes rendus, 11 Mei 1896, deel 122, p. 1045—1048.

2) Sitzungsber. der K. Pr. Ak. d. Wiss., 1904, p. 1244—1262.

3) l. c. pag. 1255 e.v.

4) Göttinger Nachrichten 1910, p. 309—312.

5) Annales de l'école normale, deel 29 (1912), p. 512 en dl 33 (1916) p. 251. MONTEL geeft hier tevens een eenvoudig bewijs van de stelling van LANDAU (dl. 33 (1916) pag. 517.)

6) Zie b.v. Sitz. ber. der K. Pr. Ak. d. Wiss. 1911, pag. 597.
LEVY vereenvoudigde deze afleiding nog in het Bulletin de la Soc. Math. de Fr., deel 40 (1912) p. 25—39. Vermeld dient nog, dat SCHOTTKY in 1907 (Sitz. Ber. der K. Pr. Ak. d. Wiss. p. 823—840 twee nieuwe bewijzen van de stelling van PICARD gaf. Zij zijn echter evenmin eenvoudig als dat van 1904.

$f = a + z + a_2 z^2 + \ldots$ convergeert en nergens nul of 1 voorstelt [1]).

Hier moge een bewijs voor de stelling van PICARD volgen, dat berust op die van LANDAU en verder elementair loopt.

1. Zij $f(z)$ holomorf voor $|z| < R$, daar nergens 0 of 1, terwijl $\frac{1}{\mu} \leq |f(0)| \leq \mu$. Dan is op grond van de stelling van LANDAU:

$$\{\varphi(\mu)\}^{-1} \leq |f(z)| \leq \varphi(\mu), \text{ voor } |z| \leq \tfrac{1}{2} R.$$

Onder $\varphi(\mu)$ kunnen wij verstaan de bovenste grens van $|f(z)|$ als $|z| \leq \frac{1}{2} R$, voor de functies die aan de genoemde voorwaarden voldoen. Dan is $\varphi(\mu)$ een monotoon toenemende functie van μ. Wij zullen bewijzen *dat $\varphi(\mu)$ minder snel toeneemt dan een bepaalde macht van μ*. Laat vooreerst $\mu = e^{2k\pi}$ zijn, waarin k een natuurlijk getal, en beschouw de functie

$$\lambda(z) = \frac{Log\, f(z)}{(2k+2)\pi i},$$

waarin de teller voor $z = o$ gelijk moge zijn aan de hoofdwaarde van $Log\, f(o)$. $\lambda(z)$ is eenwaardig en holomorf voor $|z| < R$, en daar nergens nul of 1, wegens $f(z) \neq 0$ en $\neq 1$. Verder is

$$|\lambda(0)| \leq \frac{|Log\, |f(0)|| + \pi}{(2k+2)\pi}.$$

Uit $e^{-2k\pi} \leq |f(0)| \leq e^{2k\pi}$ volgt $|Log\, |f(0)|| \leq 2k\pi$, zoodat $|\lambda(0)| < 1$.

De stelling van LANDAU levert nu

$$|\lambda(z)| \leq \varphi(1, \tfrac{1}{2}) = p, \text{ voor } |z| \leq \frac{R}{2},$$

zoodat

$$|Log\, f(z)| < (2k+2)\pi p, \text{ voor } |z| \leq \frac{R}{2},$$

en

$$e^{-(2k+2)\pi p} < |f(z)| < e^{(2k+2)\pi p}.$$

We hebben derhalve:

$$\varphi(e^{2k\pi}) < e^{(2k+2)\pi p} \text{ voor } k = \text{een natuurlijk getal.}$$

Is nu μ een willekeurig getal, grooter dan 1, dan kan men een natuurlijk getal k vinden waarvoor

$$e^{2(k-1)\pi} < \mu \leq e^{2k\pi}.$$

Dan is

$$\varphi(\mu) \leq \varphi(e^{2k\pi}) < e^{(2k+2)\pi p} < e^{4\pi p} \mu^p.$$

Voor $\mu > 1$ is derhalve

$$\varphi(\mu) < a\mu^p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin $a = e^{4\pi p}$ en $p = \varphi(1, \frac{1}{2})$.

---

[1]) Vierteljahrschrift der Naturf. Ges., Zürich, jaargang 58 (1914), deel 3, p. 203—238.

2. Beschouwen we nu een functie $F(z)$, holomorf in een zekere omgeving Ω van $O\,(z=0)$, met uitzondering van O. Laat er een omgeving $\Omega' < \Omega$ van O bestaan waarin $F(z) \neq 0$ en $\neq 1$. Wij beschrijven een cirkel binnen Ω', met $2\,\varrho$ tot straal.

Voor $|z| = \varrho$ heeft men dan een zeker getal μ waarvoor

$$\frac{1}{\mu} \leq |F(z)| \leq \mu,$$

waarin $\mu > 1$ mag verondersteld worden.

Door toepassing van de formule (1) op $F(z)$ in de cirkels die de verschillende punten van den cirkelomtrek $|z| = \varrho$ tot middelpunt en ϱ tot straal hebben, krijgen we:

$$|F(z)| \text{ en } |F(z)|^{-1} < a\mu^p \text{ voor } |z| = \frac{\varrho}{2}.$$

Door toepassing in de cirkels die de verschillende punten van den cirkelomtrek $|z| = \frac{\varrho}{2}$ tot middelpunt en $\frac{\varrho}{2}$ tot straal hebben, komt

$$|F(z)| \text{ en } |F(z)|^{-1} < a\,(a\mu^p)^p = a^{p+1}\mu^{p^2} \text{ voor } |z| = \frac{\varrho}{2^2}.$$

Zoo voortgaande vinden we

$$|F(z)| \text{ en } |F(z)|^{-1} < a^{p^{\nu-1}+p^{\nu-2}+\ldots+p+1}\,\mu^{p^\nu} =$$

$$= a^{\frac{p^\nu-1}{p-1}}\,\mu^{p^\nu} < \left(a^{\frac{1}{p-1}}\,.\,\mu\right)^{p^\nu} \quad \text{voor } |z| = \frac{\varrho}{2^\nu}.$$

We hebben derhalve

$$|F(z)| \text{ en } |F(z)|^{-1} < e^{gp^\nu} \text{ voor } |z| = \frac{\varrho}{2^\nu} \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin

$$g = Log\left(a^{\frac{1}{p-1}}\mu\right).$$

3. $Log\,|F(z)|$ is harmonisch in Ω, met uitzondering van O. Voor $0 < |z| \leq \varrho$ is derhalve, als we stellen $z = r\,e^{\theta i}$:

$$Log\,|F(z)| = A\,Log\,r + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\,r^n.$$

Hierin is

$$a_n r^n + a_{-n} r^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta\,.\,Log\,|F(re^{\theta i})|\,d\theta$$

en

$$b_n r^n + b_{-n} r^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\,\theta.\,Log\,|F(re^{\theta i})|\,d\theta \quad , \quad n = \pm 1, \quad \pm 2, \ldots,$$

waarbij $0 < r \leq \varrho$, r overigens willekeurig is.

Nu volgt uit (2), als we $r = \frac{\varrho}{2^\nu}$ stellen:

$$\left| a_{-n} + a_n \frac{\varrho^{2n}}{2^{2n\nu}} \right| \text{ en } \left| b_{-n} + b_n \frac{\varrho^{2n}}{2^{2n\nu}} \right| < \frac{2 \cdot g p^\nu \varrho^n}{2^{n\nu}} \quad . \; . \; . \quad (3)$$

Deze ongelijkheden gelden als men voor ν en n willekeurige natuurlijke getallen kiest. Neemt men voor n een vast getal, zoodanig dat $2^n > p$, dan volgt uit (3) dat $|a_{-n}|$ en $|b_{-n}|$ kleiner zijn dan ieder positief bedrag. Hieruit volgt:

$$a_{-n} = b_{-n} = 0, \quad \text{als} \quad 2^n > p.$$

De reeksontwikkeling voor $Log\,|F(z)|$ bevat dus hoogstens een eindig aantal termen met negatieve machten van r. Dit geldt evenzeer voor de reeksontwikkeling van de toegevoegde harmonische functie

$$Arg.\, F(z) = A\theta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-\, b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta)\, r^n.$$

Voor $0 < |z| < \varrho$ besluiten we nu dat

$$F(z) = z^A e^{\psi(z)}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waarin $\psi(z)$ het punt O niet tot essentieel singulier punt heeft, dus daar òf een pool, òf een opliefbaar singulier punt bezit.

Uit (4) volgt

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{A}{z} + \psi'(z), \quad 0 < |z| < \varrho \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

De functie $1 - F(z)$ voldoet aan de zelfde voorwaarden als $F(z)$. Ze is holomorf in Ω, behalve in O, en voor $|z| < 2\varrho$ van nul en 1 verschillend. Derhalve is

$$\frac{F'(z)}{F(z) - 1} = \frac{B}{z} + \chi'(z), \quad 0 < |z| < \varrho \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

waarin $\chi(z)$ het punt O òf tot pool, òf tot opliefbaar singulier punt heeft.

Uit (5) en (6) volgt dat $\frac{F(z) - 1}{F(z)}$ het punt O òf tot pool, òf tot opliefbaar singulier punt heeft, zoodat dit voor $F(z)$ eveneens geldt, waarmee de stelling van PICARD bewezen is.

4. De niet essentieele uitbreiding van het theorema, die als volgt luidt: „Als $F(z)$ in een omgeving Ω van O, met uitzondering van O meromorf is en in een omgeving $\Omega' < \Omega$ van O drie waarden a, b en c niet aanneemt, dan is $F(z)$ meromorf in Ω" volgt onmiddellijk, daar de functie

$$F^*(z) = \frac{F(z) - a}{F(z) - b} \cdot \frac{c - b}{c - a}$$

aan dezelfde voorwaarden voldoet als $F(z)$ boven.

Groningen, 18 April 1920.

Physiologie. — De Heer MAGNUS biedt een mededeeling aan van de Heeren W. STORM v. LEEUWEN en J. ZEIJDNER: *„Over adsorptie van vergiften aan bestanddeelen van het dierlijk lichaam. II. Het bindend vermogen van konijneserum voor atropine".*

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

In vroegere mededeelingen hebben STORM VAN LEEUWEN [1]) en EERLAND en STORM VAN LEEUWEN [2]) aangetoond, dat in het serum en in de weefsels van verschillende dieren stoffen voorkomen, die in staat zijn de werking van alcaloiden te remmen en tevens kon daarbij worden aangetoond, dat dit onwerkzaam maken van het alcaloid niet geschiedt door chemische destructie, maar doordat het alcaloid physisch gebonden wordt aan bepaalde bestanddeelen van het serum of aan lichaamsbestanddeelen. In deze vroegere mededeelingen is reeds de waarschijnlijkheid geuit, dat ook voor het geval van het onwerkzaam maken van atropine door konijneserum niet in hoofdzaak een chemische destructie, maar waarschijnlijk ook wel een physische binding in het spel zou zijn. Het doel van het onderzoek, waarover thans verslag wordt uitgebracht, was om na te gaan in hoeverre deze veronderstelling juist was.

De natuurlijke ongevoeligheid van konijnen voor atropine is al herhaaldelijk aanleiding tot experimenteel onderzoek geweest.

HECKEL [3]) voerde konijnen uitsluitend met atropine-bevattende solaneeën, zonder dat mydriase bij de dieren optrad; zij bleven volmaakt gezond en verwekten zelfs een talrijk nakroost, dat tenslotte alle andere voedsel liet staan voor solaneeën. Noch in de urine, noch in de faeces van de proefdieren vond hij met chemische of physiologische methoden (indruppelen in het konijnenoog) atropine terug. Wanneer hij zijn konijnen, die op deze wijze gevoerd waren, doodde en met het vleesch van die dieren katten en honden voerde, vertoonden die daarop geen

---

[1]) W. STORM VAN LEEUWEN. Sur l'existence dans le corps des animaux de substances fixant les alcaloides. Arch. Néerl. de Physiol. Tome 2 p. 650, 1918.

[2]) L. EERLAND en W. STORM VAN LEEUWEN. Adsorptie van vergiften aan bestanddeelen van het dierlijk lichaam. I. Het bindend vermogen van serum en hersensubstantie voor cocaïne. Verslag v. d. gewone vergadering der Wis- en Natuurkundige afd. van 31 Jan. 1920. Deel XXVIII.

[3]) HECKEL. De l'influence des solanées vireuses en géneral et de la Belladonna en particulier. C. R. Acad. de Paris 80. 1875. p. 1608.

verschijnselen van atropine-vergiftiging. Hieruit besloot hij, dat het vergift in de bloedbaan van de konijnen was ontleed.

Later toonde HERMANN nog aan, dat de ongevoeligheid van konijnen voor atropine niet kon berusten op een vermeerderde uitscheiding van het vergift, omdat het bleek dat na onderbinding van de arteria renalis, de atropine-resistentie van de konijnen niet verminderde.

WILLBERG [1]) onderzocht de resistentie van verschillende diersoorten tegen atropine en berekende hoeveel maal ongevoeliger zij waren dan de mensch.

Eenige getallen mogen volgen:

Kip	404	maal.
Konijn	242	„
Witte Muis . . .	162	„
Jonge Hond . .	124	„
Volwassen Hond	194	„
Kat	75	„

Hieruit blijkt eveneens dat de resistentie niet hoofdzakelijk afhankelijk is van de intensiteit der stofwisseling der dieren, daar het kleinst onderzochte dier, de muis, minder resistent is dan een konijn of een kip.

Volgens sommigen zou de leeftijd van de dieren van invloed zijn op de resistentie. Een jong individu zou dan minder gevoelig zijn dan een volwassen. WILLBERG toonde dit aan bij honden. Ook bij den mensch schijnt hetzelfde voor te komen; voor een volwassen man zijn 50 bessen van atropa belladonna niet doodelijk, 40 bessen voor een oude man wèl. De letale dosis voor een volwassenen. is 0.01 — 0.06 gr. sulf. atropini; een zuigeling schijnt te verdragen 0 14 gr BARBIER [2]).

KRASNAGORSKI [3]) gaf zuigelingen met exsudatieve diathese gedurende een maand lang 0.85 gr. — 2.5 mgr. sulf. atropini per dag zonder mydriase of polsversnelling te kunnen constateeren. Hij verklaart de grootere resistentie door een verhoogde vagotonie bij jonge individuën.

CALMETTE [4]) spoot een konijn 200 mgr. sulf. atr. intraveneus in, zonder eenige toxische atropinewerking te bespeuren Daarentegen leidde 2 mgr. intracerebraal geinjiceerd onder krampen en verlamming tot den dood.

Hieruit blijkt, dat bij de gewone wijze van toedienen het vergift, voor het de hersenen bereikt, onschadelijk wordt gemaakt, hetgeen CALMETTE toeschreef aan phagocytose. Verschillende onderzoekers toonden echter aan, dat in dit opzicht zijn proeven onjuist waren en den witten bloedlichaampjes in dit opzicht geen werkzame rol mag worden toegeschreven.

FLEISCHMANN [5]) kon de ontgiftigende kracht van het konijnebloed in vivo ook voor het serum in vitro aantoonen, waarbij hij zag dat individueele resistentie-verschillen evenredig waren met de „Zerstörungs"-mogelijkheid van het serum. Ook bij menschen zou dit te zien zijn. Dat kinderen, idiooten en imbecillen meer

---

[1]) WILLBERG. Die nat. Resistenz einiger Tiere dem Atropin gegenüber. Zeitschr. f. Bioch. 66. p. 398, 1914.

[2]) BARBIER. Sur deux cas d'intoxication par l'atropine. (Thèse de Bordeaux 1910).

[3]) KRASNAGORSKI. Exsudat. Diath. u. Vagotonie M. S. Kind. XII 1913, p. 138.

[4]) CALMETTE. Sur le mécanisme de l'immunité contre les alcaloïdes. Soc. Biol. Jub. band 1899.

[5]) FLEISCHMANN. Atropine-Entgiftung durch Blut. Arch. f. exp. Path. 62, 1910, p. 518.

atropine verdragen en hysterici zeer weinig is volgens FLEISCHMANN ook aan hun serum te constateeren. Hij bemerkte dat er konijnen waren, die zeer gevoelig waren voor intraveneuze injectie van sulfas atropini en dat hun serum in vitro ook geen verzwakkende werking bezat. Dit waren konijnen uit Bern met struma. Dus zou de resistentie in verband staan met de schildklier. Hier kwam METZNER[1]) tegen op, die dit verband ontkende. Wel vond hij verschillende konijnen, wier bloed atropine in het geheel niet „zerstörte", maar zij hadden zoowel macro- als microscopisch onderzocht sterk verschillende schildklieren van zeer groot tot zeer klein toe. Van meer belang schijnt de plaats vanwaar zij stammen. Elzasser en Leipziger konijnen zijn zeer resistent, de proefdieren van METZNER uit Bazel en Bern zeer weinig. FLEISCHMANN[2]) nam voor een deel zijn bewering terug, maar wil toch niet alle verband tusschen schildklier en resistentie loochenen. Bij patienten met morbus Basedowi vond hij in 30 % der onderzochte gevallen sterker „zerstörend" serum.

Het stond dus vast, dat het konijnebloed groote hoeveelheden atropine onschadelijk kon maken, maar onzekerheid bestond omtrent de vraag, waarop deze werking berust. De meeste onderzoekers nemen aan, dat het alcoloid verzeept wordt en uiteenvalt in zijn componenten tropine en tropazuur, een eenvoudige chemische splitsing dus; METZNER[3]) denkt aan een enzym dat de atropine splitst. DÖBLIN en FLEISCHMANN[4]) achten dit ook niet onwaarschijnlijk. HEFFTER en FICKEWIRTH[5]) vonden in de urine der proefdieren steeds tropine, maar konden dit in het serum en de lever nooit aantoonen.

DIXON, RANSOM en HAMILL[6]) deelen mede, dat zij een destructie der alcaloiden in het lichaam niet aannemen, maar dat het alcaloid (i. d. g. strychnine) geadsorbeerd wordt en met alcaloid-oplossende middelen weer gemakkelijk terug te winnen is. Des te intensiever zou de binding zijn naarmate de adsorbeerende stof meer van „colloidalen aard" is. Voor deze bewering geven zij — voor zoover wij dat konden vinden — geen bewijzen; toch hebben zij — zooals later blijken zal — gelijk. Zoo eenvoudig als zij zich de zaak voorstellen kan deze intusschen niet zijn, want alleen door de meerdere

[1]) METZNER. Mitteilungen über Wirkung nnd Verhalten des Atropins im Organismus. Arch. f. exp. Path. 68, 1912, p. 11—99. M. und HEDINGER ueber die Beziehungen der Schilddr. zur Atropin-zerstörenden Kraft des Bl. Hetzelfde 69, 1913, p. 272.

[2]) FLEISCHMANN. DÖBLIN und FL. Zum Mechanismus der A. Entgift. durch Bl. etc. Z.schr. f. Klin. Med. Bd. 77, p. 145, 1913.

[3]) METZNER. l. c. p. 155.

[4]) DÖBLIN u. FLEISCHMANN. l.c. p. 149.

[5]) HEFFTER u. FICKEWIRTH. Ueber das Verhalten des A. im Organismus d. Kaninchens. Biochem. Z schr. 40, p. 45, 1912.

[6]) DIXON und RANSOM. Die elektive Wirkung v. Arzneien auf d. peripheren Nervensystem-Ergeb. der Physiol. 12, p. 773.

DIXON und HAMILL. Secretion and action of drugs. Journ. of physiol. 38, p. 314, 1909.

of mindere „colloidal nature” kan men vermoedelijk niet verklaren, waarom konijne-serum zoo sterk adsorbeert en honde-serum niet.

Wanneer een dier bij intraveneuze injectie zeer weinig gevoelig is voor een vergift, kan de oorzaak voor deze ongevoeligheid in hoofdzaak van drieërlei aard zijn:

Ten eerste: het kan zijn dat de organen van het dier niet gevoelig voor het vergift zijn (zooals STRAUB [1]) kort geleden aantoonde berust hierop de ongevoeligheid van de rat voor strophantine).

Ten tweede: het kan zijn dat het vergift in het lichaam chemisch wordt ontleed.

Ten derde: het vergift kan in het lichaam van het dier op andere wijze worden gebonden.

De eerste veronderstelling is voor het onderhavige geval zeer onwaarschijnlijk, want hoewel het konijn zeer ongevoelig is voor atropine, zijn de organen van dit dier zeer gevoelig voor dit vergift. Uit een onderzoek van VAN LIDTH DE JEUDE [2]) is o.a. gebleken dat atropine op den overlevenden dundarm van een konijn circa tienmaal meer werkzaam is dan op den kattedarm. Bovendien is reeds vermeld, dat CALMETTE aantoonde dat een injectie van twee mgr. atropine intracerebraal bij een konijn onmiddellijk den dood veroorzaakte.

De tweede veronderstelling is, zooals uit de onderzoekingen van FLEISCHMANN, METZNER en anderen is gebleken, ongetwijfeld verwezenlijkt. Konijnebloed kan in vitro atropine ontleden, alleen, deze ontleding gaat betrekkelijk langzaam en geschiedt dus niet op zulk een groote schaal dat men daaruit zou kunnen verklaren de ongevoeligheid van het konijn voor atropine, wanneer dit vergift direct in de bloedbaan wordt gebracht.

De derde onderstelling wint door deze overwegingen zeer aan waarschijnlijkheid en in de proeven, die thans zullen worden beschreven, hebben wij inderdaad kunnen aantoonen dat konijneserum in hooge mate de eigenschap bezit atropine te binden, zonder het tevens te ontleden.

Om in deze experimenten de remmende werking van konijneserum te kunnen demonstreeren, was het noodig een nauwkeurige methode te vinden voor een physiologische waardebepaling van atropine-oplossingen. Wij gebruikten de methode die door STORM VAN

[1]) W. STRAUB. Ueber die Resistenz der Ratten gegen K-strophanten. Arch. f. exp. Path. und Pharmak. Bd 84, p. 223, 1918.

[2]) v. LIDTH DE JEUDE. Quantitatieve onderzoekingen over het antagonisme van sulfas atropini tegenover hydrochloras pilocarpini, salicylas physostigmini en hydrochloras muscarini op overlevende darmen van zoogdieren. Dissertatie Utrecht 1916.

Leeuwen en van den Broeke in een vorige publicatie is medegedeeld [1]). Hierbij wordt aan een overlevend stuk kattedarm een bepaalde hoeveelheid pilocarpine toegevoegd en vervolgens wordt nagegaan hoeveel atropine noodig is, om de door de pilocarpine veroorzaakte contractie van den darm weer bijna geheel op te heffen. Deze methode geeft goede resultaten, wanneer een aantal voorzorgen worden in acht genomen die in de geciteerde mededeeling uitvoerig zijn besproken.

Met gebruikmaking van deze methode werden de volgende proeven verricht: (Zie figuur 1).

Aan de vloeistof, waarin zich een overlevende darm bevindt, (75 c.M. tyrode vloeistof) wordt toegevoegd 0.1 m.gr. pilocarpine, na drie minuten wordt aan de vloeistof toegevoegd 0,0004 m.gr. atropine en zooals uit figuur 1a blijkt is deze dosis atropine niet voldoende om de contractie van 0,1 m.gr. pilocarpine geheel op te heffen. Nadat atropine en pilocarpine zijn uitgewasschen en de darm weer een half uur in versche Tyrode vloeistof zich heeft bevonden wordt opnieuw toegediend 0,1 m.gr. pilocarpine en drie minuten later 0,024 m.gr. atropine, dus zestig maal zooveel als in de vorige proef. Deze atropine was 50 minuten in aanraking geweest met versch konijne-serum. Men ziet dat deze hoeveelheid atropine wel in staat is de pilocarpine-werking op te heffen, zoodat deze dosis dus sterker werkt dan de vorige, (figuur 1b).

In figuur 1c is gegeven eerst 0,1 m.gr. pilocarpine, daarna 0,012 m.gr. atropine, dus dertig maal zooveel als in de eerste proef en men ziet dat deze atropinewerking overeenkomt met die uit figuur 1a. Ook in dit geval was de atropine van tevoren in aanraking geweest met konijne-serum en wel was aan 5 c.c. versch konijne-serum toegevoegd 1 m.gr. atropine. Uit deze proeven blijkt dus dat, door het in aanraking zijn met konijne-serum de werking van de atropine zoodanig was verminderd, dat nog slechts het dertigste deel van de werking aanwezig is.

In figuur 1d. is weer aan den darm toegevoegd 0,1 m.g. pilocarpine en daarna is na drie minuten gegeven 0,016 m.gr. atropine. Ook deze atropine is van tevoren in aanraking geweest met serum, de werking hiervan is sterker dan die van 0,0004 atropine in figuur 1a. In figuur 1e. is opnieuw gegeven 0,1 m.gr. pilocarpine en daarna weer de dosis van 0,0004 m.gr. atropine, die ook in figuur 1a.

[1]) Storm van Leeuwen en Van den Broeke. Experimenteele beïnvloeding van de gevoeligheid van verschillende dieren en overlevende organen voor vergiften. 1e mededeeling. Verslag v. d. gewone vergadering der Wis- en Natuurk. afd. van 31 Jan. 1920, deel XXVIII.

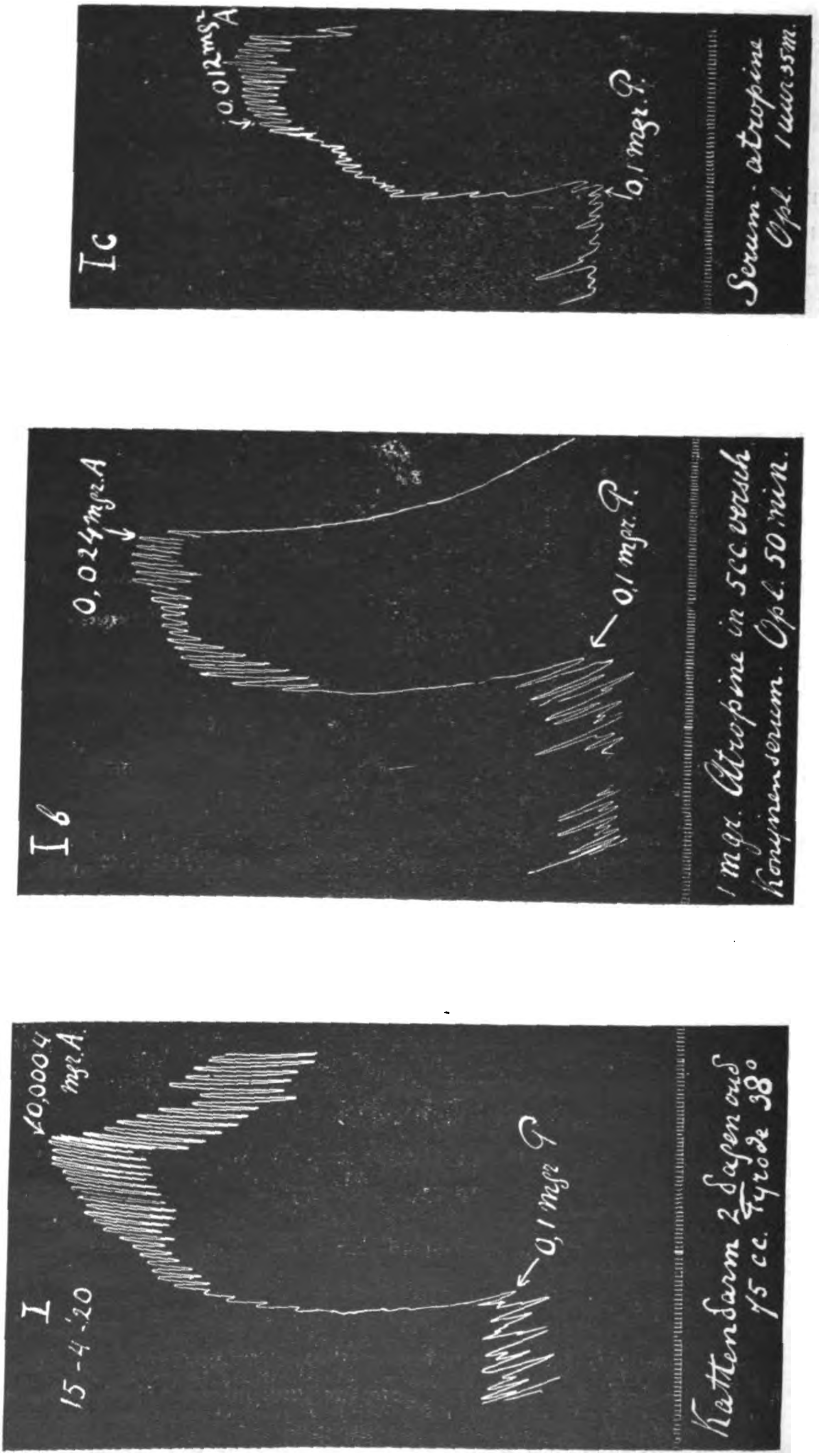
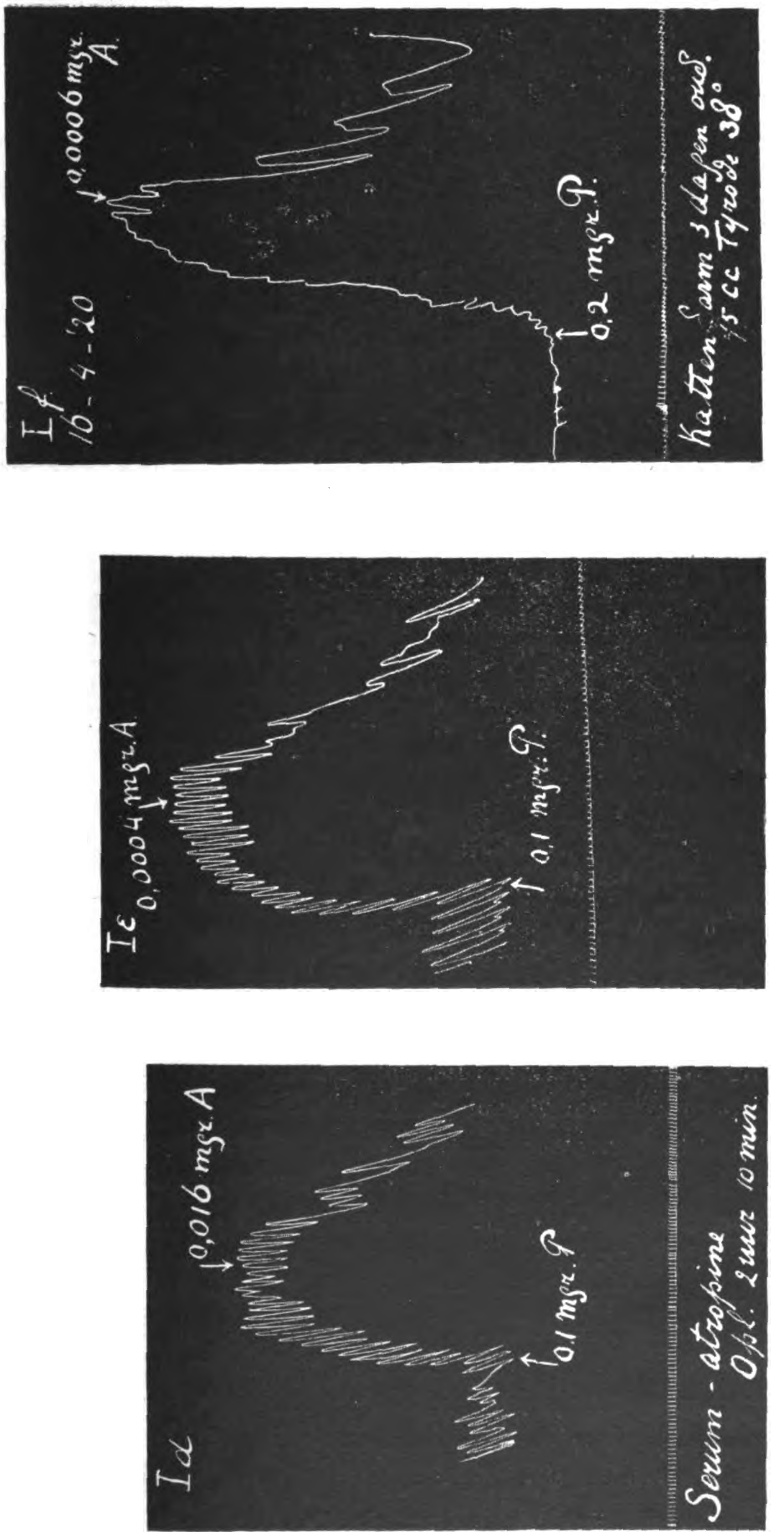

I
15-4-'20
0,0004 mgr. A.
0,1 mgr P
Kattendarm 2 dagen oud
75 cc. Tyrode 38°
I b
0,024 mgr. A
0,1 mgr. P.
1 mgr. Atropine in 5 cc. versch
Konijnenserum. Opl. 50 min.
I c
0,012 mgr A
0,1 mgr. P.
Serum · atropine
Opl. 1 uur 35 m.

Fig. Ia, Ib, Ic.



I f 16-4-'20
0,0006 mgr. A.
0.2 mgr. P.
Katten Serum 3 dagen oud 75 cc Tyrode 38°
Iε 0,0004 mgr. A
0,1 mgr. P.
Id
0,016 mgr. A
0.1 mgr. P
Serum-atropine Opl. 2 uur 10 min.

Fig. Id, Ie, If.

reeds was toegediend. Deze proef dient om te bewijzen, dat de gevoeligheid van den darm niet in aanzienlijke mate is veranderd. Zooals men ziet is de werking van 0,0004 m.gr. atropine thans iets

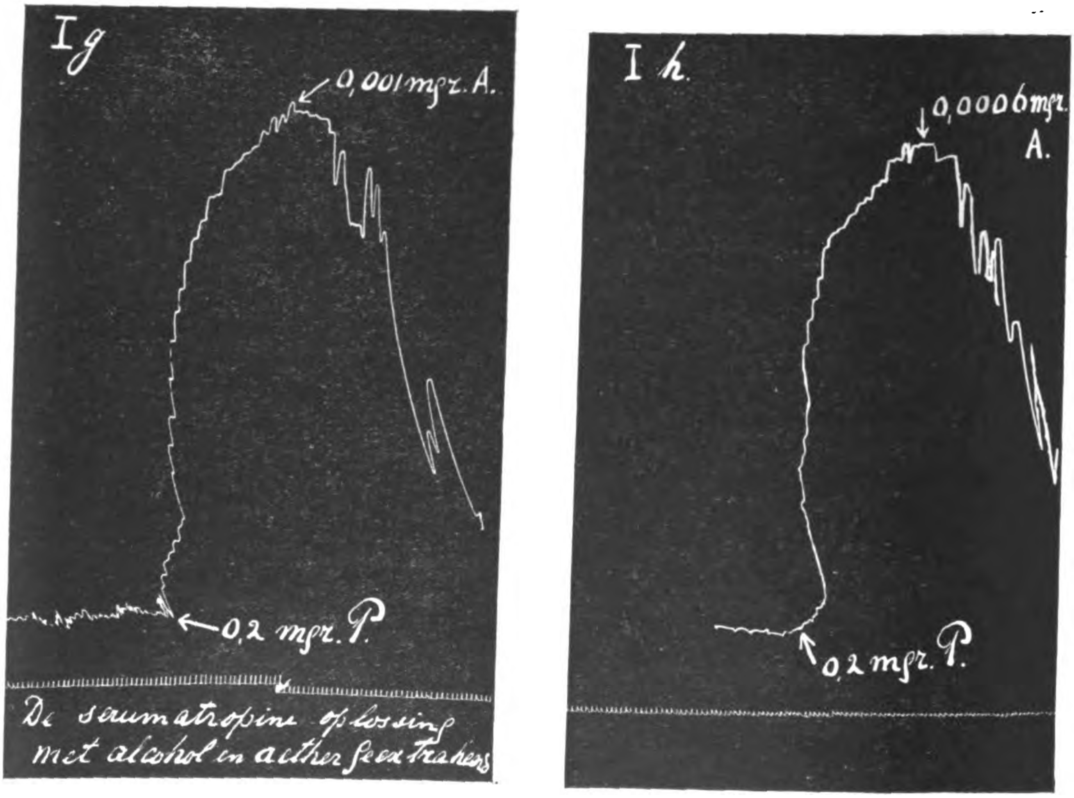


Fig. I*g*, I*h*.

grooter dan in figuur 1a; men kan dus uit deze proeven concludeeren dat — zie figuur 1d — door het in aanraking zijn van atropine met konijne-serum de werking daarvan zeker tot op één dertigste en bijna tot op één veertigste is verminderd.

Om nu te bewijzen, dat deze binding van atropine aan konijneserum niet is een chemische destructie, maar waarschijnlijk een physisch proces, werd als volgt te werk gegaan: de atropine-oplossing, die door in aanraking zijn met konijne-serum het grootste gedeelte van zijn werkzaamheid had verloren, werd behandeld met zoutzuur en alcohol, zooals dat in de vorige mededeeling voor de adsorptie van cocaine aan serum reeds is beschreven [1]). De alcohol werd nu verdampt, de vloeistof geneutraliseerd en weer gebracht op het oude volume. In deze vloeistof werd nu onderzocht hoeveel atropine in werkzamen vorm aanwezig was; het resultaat daarvan ziet men in

[1]) L. EERLAND en W. STORM VAN LEEUWEN. l. c.

figuur 1f—h. In figuur 1 f en 1h is telkens 0,2 m.g. pilocarpine aan den darm toegevoegd en daarna 0,0006 m.gr. atropine [1]). Zooals uit de figuur blijkt is na drie minuten bijna de geheele pilocarpine-werking door de atropine opgeheven. In figuur 1g is weer gegeven 0,2 m.gr. pilocarpine en daaraan is na drie minuten toegevoegd zooveel van de atropine-houdende vloeistof, (serum + atropine behandeld met alcohol en zoutzuur) dat wanneer alle atropine nu weer in werkzamen vorm aanwezig ware 0,001 m.gr. van dat vergift is toegediend; men ziet dat de werking daarvan ook iets grooter is dan die van 0,0006 m.gr. atropine, waaruit men dus besluiten mag, dat door de bewerking met alcohol, zooal niet alle, dan toch bijna alle atropine weer in werkzamen vorm is teruggekregen.

Wij hebben er geen prijs op gesteld om aan te toonen, dat *alle* atropine teruggekregen wordt, omdat — vergelijk boven — het in hooge mate waarschijnlijk is, dat reeds gedurende de korte aanraking van de atropine met konijneserum een klein gedeelte van de atropine chemisch is gedestrueerd. Wij konden dus met onze methode er niet op rekenen alle atropine terug te vinden, maar konden wel aantoonen, dat het grootste gedeelte van de atropine in werkzamen vorm was terug te krijgen.

In deze proef vindt men tevens een verklaring voor het verschijnsel, dat CLOETTA [2]) en SCHINZ [3]) waarnamen, n.l., dat zij bij chemische bepalingen meer atropine vonden dan physiologisch was aan te toonen. Nu bestaat de chemische reactie (Vitali) o.a. uit extraheeren met alcohol en schudden met chloroform. SCHINZ trachtte het zoo te verklaren, dat het atropine-molecuul in zooverre was gedestrueerd dat het niet meer biologisch, maar nog juist chemisch kon reageeren.

Het hier beschreven onderzoek werd in verschillende andere proeven herhaald, steeds met hetzelfde resultaat.

In een volgende proef hebben wij nagegaan of wij iets meer konden te weten komen omtrent de quantitatieve verhoudingen bij de binding van atropine aan konijneserum. Hiertoe werd (zie fig. 2*a*) eerst gegeven 0,1 mgr. pilocarpine en na drie minuten 0,0002 mgr. atropine, dit kon de pilocarpine-werking bijna geheel opheffen. In figuur 1 *b* is gegeven 0,1 mgr. pilocarpine en daarna 0,008 mgr. atropine, die van te voren in aanraking was geweest met konijneserum; men ziet dat de werking daarvan geringer is dan van te voren die van 0,0002 mgr. atropine, zoodat blijkbaar door het serum de werking van de atropine zeker tot op $^1/_{40}$ was gereduceerd. In fig. 1 *c* is weer toegediend een 0,1 mgr. pilocarpine, vervolgens 0,0002 atropine, dit kon de werking van de pilocarpine

---

[1]) Hierbij is een ander stuk darm gebruikt als in fig. 1*a*—*e*.

[2]) CLOETTA. Ueber Angewöhnung an Atropin. Arch. für exp. Path. 64, p. 432, 1911.

[3]) SCHINZ. Zur angeborenen und erworbenen Atropin-Resistenz des Kaninchens. Arch. für exp. Path. 81 pg. 206. 1917.

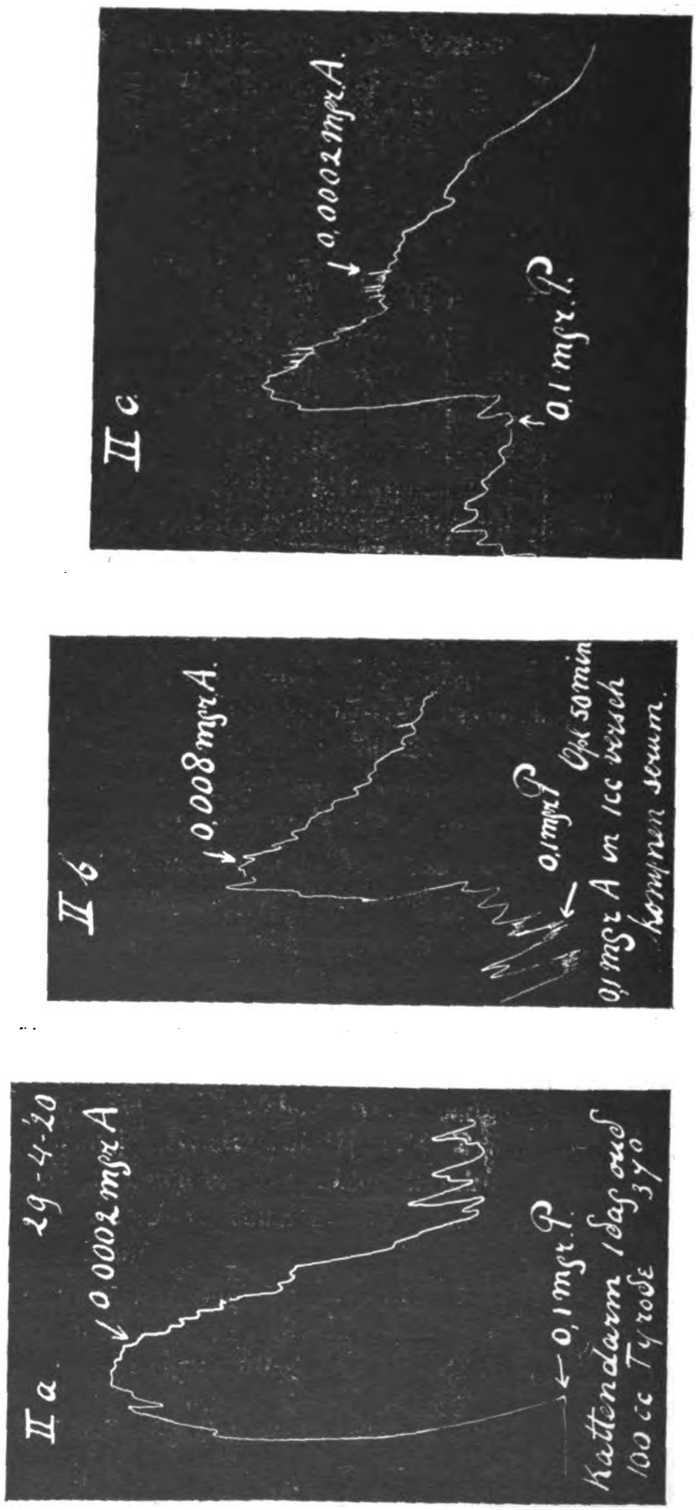


Fig. IIa, IIb, IIc.

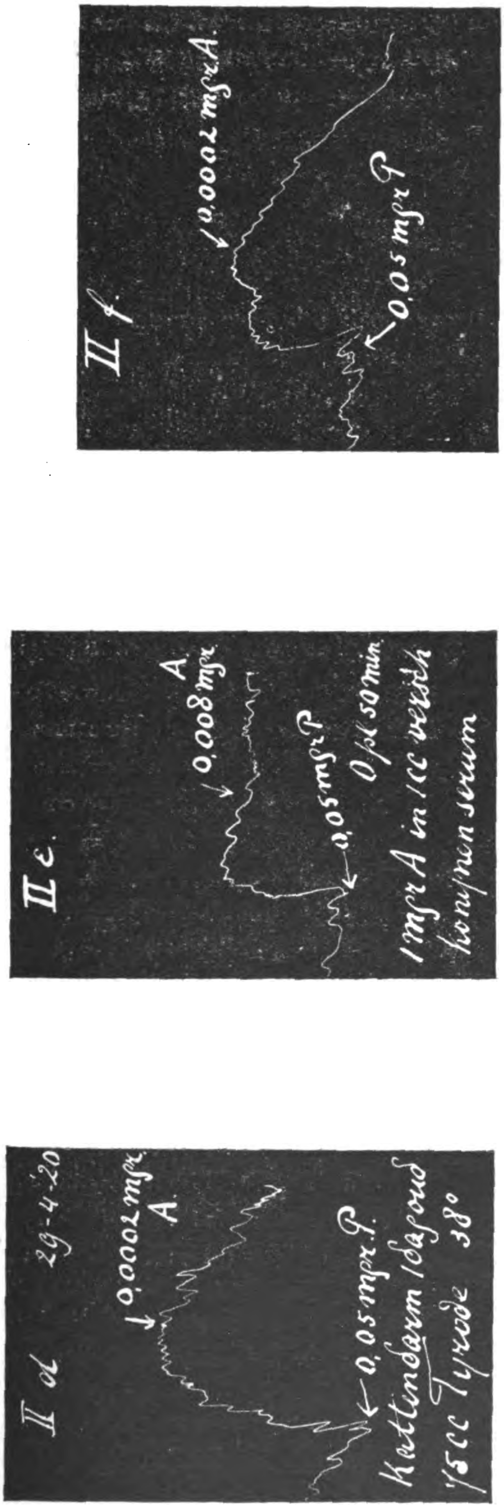


Fig. IId, IIe, IIf.

geheel opheffen, waaruit dus blijkt, dat de gevoeligheid van den darm voor atropine gedurende de proef zeker niet minder is geworden. De atropine, die in fig. 2 *b* was gegeven, was genomen van een vloeistof, die bevatte 0,1 mgr. atropine op 1 c.c. versch konijneserum.

In fig. 2*d* werd aan een ander stuk darm gegeven 0,05 mgr. pilocarpine, de werking daarvan kon, zooals uit de fig. blijkt, door 0,0002 mgr. atropine bijna geheel worden opgeheven. In de fig. 2*e* werd gegeven 0,05 mgr. pilocarpine en daarna 0,008 mgr. atropine; deze atropine was genomen uit een vloeistof die per cc. versch konijneserum bevatte 1 *mgr. atropine,* dus tien maal zooveel als in het vorige geval. In figuur 2 *f* werd vervolgens weer gegeven 0,0002 mgr. atropine van de gewone waterige oplossing. Uit deze proef blijkt dus, dat ook wanneer een geheele mgr. atropine aan 1cc. konijneserum wordt toegevoegd, de werking van de atropine tot op $^1/_{40}$ ongeveer wordt gereduceerd.

Het zou natuurlijk wenschelijk zijn om voor een groot aantal concentraties van atropine in konijneserum de binding quantitatief na te gaan; dit is echter, ook wegens de tijdroovende techniek, die hierbij noodig is, practisch zeer slecht uit te voeren; uit de enkele hier aangehaalde proef kan in ieder geval blijken — en andere proeven leidden tot hetzelfde resultaat — dat waarschijnlijk bij de binding van atropine aan serum dezelfde verhoudingen gelden, als bij de binding van pilocarpine aan konijneserum, zooals in een vroegere mededeeling door een van ons is besproken [1]).

Wij vonden daar n. l. dat, zoolang nog betrekkelijk kleine hoeveelheden van het alcaloid in aanmerking kwamen, steeds bijna al het vergift werd gebonden; eerst wanneer meer pilocarpine werd gegeven, veranderde dit.

Werd n.l. in dat onderzoek aan 5 c.cM. konijne-serum toegevoegd 10 mgr. pilocarpine, dan werd daarvan gebonden 9,5 mgr., zoodat slechts 0,5 mgr. in de vloeistof overbleef; werd toegevoegd 20 mgr. pilocarpine dan werd gebonden 18,75 mgr. pilocarpine, zoodat slechts 1,25 mgr. overbleef. Eerst wanneer groote dosen werden toegevoegd, bijv. 100 mgr. dan werd gebonden 28.5, zoodat 71,5 mgr. in de vloeistof overbleef. Zooals vermeld, een dergelijk onderzoek geheel quantitatief door te voeren, is voor atropine te zeer tijdroovend en haast onmogelijk, maar de hier medegedeelde proef wijst er toch op, dat vermoedelijk daarbij dezelfde quantitatieve verhoudingen bestaan als in het geval van de pilocarpine.

In het verloop van deze proeven deden wij een waarneming, die

[1]) W. Storm van Leeuwen. l. c.

het noodig maakte ons onderzoek eenigszins uit te breiden. Het was nl. toevallig gebleken, dat het serum van een konijn, waarbij voor den dood ingespoten was eenige c.c. van een peptonoplossing, weinig of geen bindend vermogen had, en eveneens bleek dat konijnebloed, dat opgevangen was in citras natricus — om stolling te voorkomen — eveneens een zeer geringe bindende werking had.

Het zou mogelijk geweest zijn om hieruit te besluiten, dat de stof uit konijne-serum, die atropine kan binden niet als zoodanig aanwezig is, maar eerst bij de stolling ontstaat, zoodat wanneer de stolling voorkomen wordt, geen binding aanwezig is. Bij het doorzien van de literatuur, bleek nu reeds, dat deze veronderstelling niet waarschijnlijk was, omdat METZNER [1]) zijn proeven deed met konijnebloed, waaraan hirudine was toegevoegd en niet vermeld, dat daardoor het bindend vermogen zou verminderen.

Ook een waarneming van DOYON en SARVONAT [2]) die vonden dat atropine juist een nucleoproteïde in het bloed doet ontstaan, dat stolling tegengaat en bovendien waarnamen, dat de bindende kracht van het serum in vitro parallel gaat met de resistentie van het dier voor intraveneuse injecties in vivo, pleiten er tegen. Dit zou toch moeilijk te verklaren zijn, als de bindende stof eerst bij stolling ontstond.

Een andere mogelijkheid was, dat de aanwezigheid van pepton of citraat wellicht de binding van de atropine aan het konijne-serum zou verhinderen of — indien die reeds tot stand gekomen was — weder zou opheffen en er was reden om hieraan te denken omdat GENGOU [3]) heeft medegedeeld, dat bepaalde colloidale oplossingen, verschillende sera, albumosen en ook citraten sommige adsorpties kunnen tegengaan.

Citraten kunnen b.v. adsorptie van kleurstoffen aan dierlijke kool tegengaan, ja kunnen zelfs voor bepaalde adsorpties hun eigen adsorptie substitueeren. Wij hebben nu deze kwestie op de volgende wijze onderzocht (zie fig. 3).

In fig. 3 *a* wordt aan den darm toegevoegd 0,02 mgr. pilocarpine en na 3 minuten 0,0002 mgr. atropine, die de pilocarpine-werking in 3 minuten tijd bijna geheel opheft.

In fig. 3 *b* wordt weer dezelfde dosis pilocarpine toegevoegd, maar nu een hoeveelheid van een atropine-oplossing, die op de volgende

[1]) l. c.

[2]) DOYON en SARVONAT. Passage d'une nucléoproteïde anticoagulante dans le sang. Soc. de Biol. 74. 1913, p. 78.

[3]) GENGOU. Contribution à l'étude de l'adhesion moleculaire et de son intervention dans diverses phénomènes biologiques. Arch. int. de physiol. VII 1908.

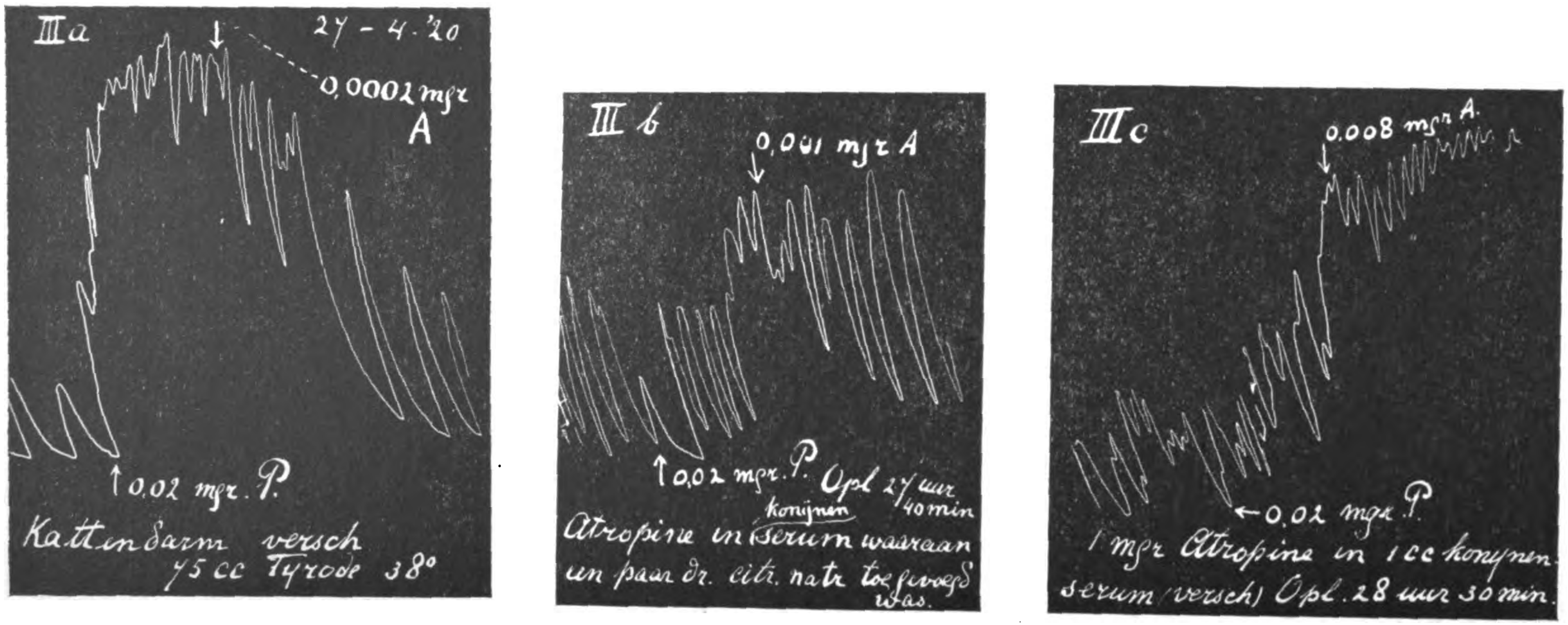


Fig. IIIa, IIIb, IIIc.

wijze was verkregen: Aan konijneserum was atropine toegevoegd en tevens een paar druppels citras natricus, van deze vloeistof werd nu zooveel genomen, dat aangenomen kon worden dat zij bevatten moest 0.001 mgr. atropine; dit werkt iets minder sterk dan 0,0002 mgr.

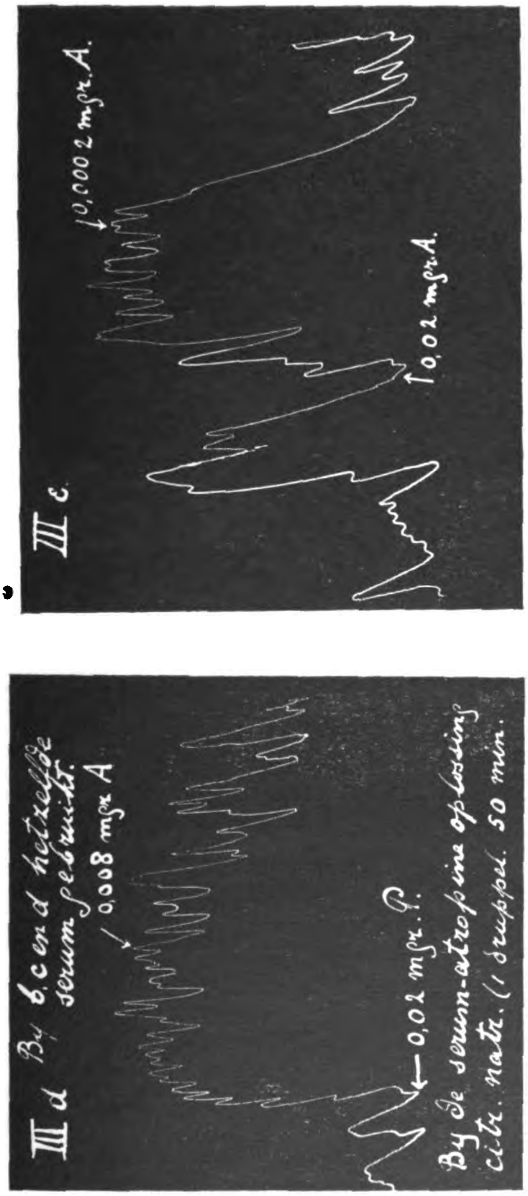


Fig. III*d*, III*e*

in fig. 2 *a*, zoodat minstens de werking van de atropine tot op $^1/_5$ is gereduceerd. In fig. 3 *c* wordt gegeven 0,008 mgr. atropine, maar deze atropine komt uit een oplossing die is verkregen, door 1 mgr. atropine toe te voegen aan 1 c.c. konijne-serum, *zonder* dat citraat

was toegevoegd en duidelijk ziet men nu een zeer sterke binding van de atropine, want 0,008 mgr. atropine in proef 3 *c* doet minder dan 0,001 mgr. in fig. 3 *b*, waaruit dus blijkt dat de citras natricus de binding van konijne-serum in belangrijke mate heeft geremd. Aan de oplossing van atropine in konijne-serum, die in fig. 3*c* is gebruikt, wordt nu alsnog toegevoegd citras natricus en duidelijk blijkt, dat daardoor de adsorptie eenigszins wordt verminderd, want 0,008 mgr. atropine is in fig. 3 *d* weer werkzaam, terwijl dezelfde dosis in fig. *c* onwerkzaam was. In fig. 3 *e* is, nadat pilocarpine was toegevoegd, opnieuw 0,0002 mgr. atropine gegeven om te laten zien, dat de gevoeligheid van den darm voor dit vergift dezelfde was gebleven.

Uit figuur 4 kan blijken, dat pepton dezelfde werking heeft als citras natricus in dit opzicht (in deze proef is tevens onderzocht of kippeneiwit atropine bindt). Bij figuur 4a wordt aan den darm toegevoegd 0.01 m.gr. pilocarpine en na drie minuten 0,0006 m.gr. atropine, de werking van de pilocarpine wordt daardoor bijna geheel opgeheven. In figuur 4b wordt toegevoegd 0,01 m.gr. pilocarpine en daarna 0,0006 m.gr. atropine; hier is de atropine in aanraking geweest met kippeneiwit, dit heeft geen remmende werking, zooals uit de figuur duidelijk blijkt. In figuur 4c is weer gegeven 0,01 m.gr. pilocarpine en daarna 0,024 m.gr. atropine, dus 40 maal zooveel als in de vorige proef; deze atropine is echter in aanraking geweest met konijneserum en duidelijk ziet men, dat de werking van de atropine weer tot op minder dan 1/40 is gereduceerd. In figuur 4d wordt nu gegeven 0,0015 m.gr. atropine, dus veel minder dan in figuur 4c; deze atropine is ook in aanraking geweest met serum, maar nu was daaraan tevoren een weinig pepton (Witte) toegevoegd. Duidelijk ziet men, dat nu de atropine-werking lang niet tot op $^1/_{40}$ gereduceerd is, waaruit blijkt, dat door de toevoeging van pepton de binding van de atropine aan het konijneserum wordt verhinderd. Dat ook een reeds bestaande binding door de pepton kan worden opgeheven, blijkt uit figuur 4*e*, waar is toegevoegd 0,005 mgr. atropine, dit is werkzaam, althans veel meer werkzaam, dan in figuur 4*c* 0,024 mgr. atropine was en deze dosis van 0,005 mgr. atropine is genomen van een vloeistof, waar eerst de atropine aan konijneserum gebonden was en daarna een druppel 5 °/₀ peptonoplossing was toegevoegd. Door invloed van pepton was dus de reeds bestaande binding weer gedeeltelijk opgeheven. Figuur 4*f* dient weer als contrôle dat 0,0006 mgr. atropine nog werkzaam is.

Over den aard van de adsorbeerende stof in het serum is nog

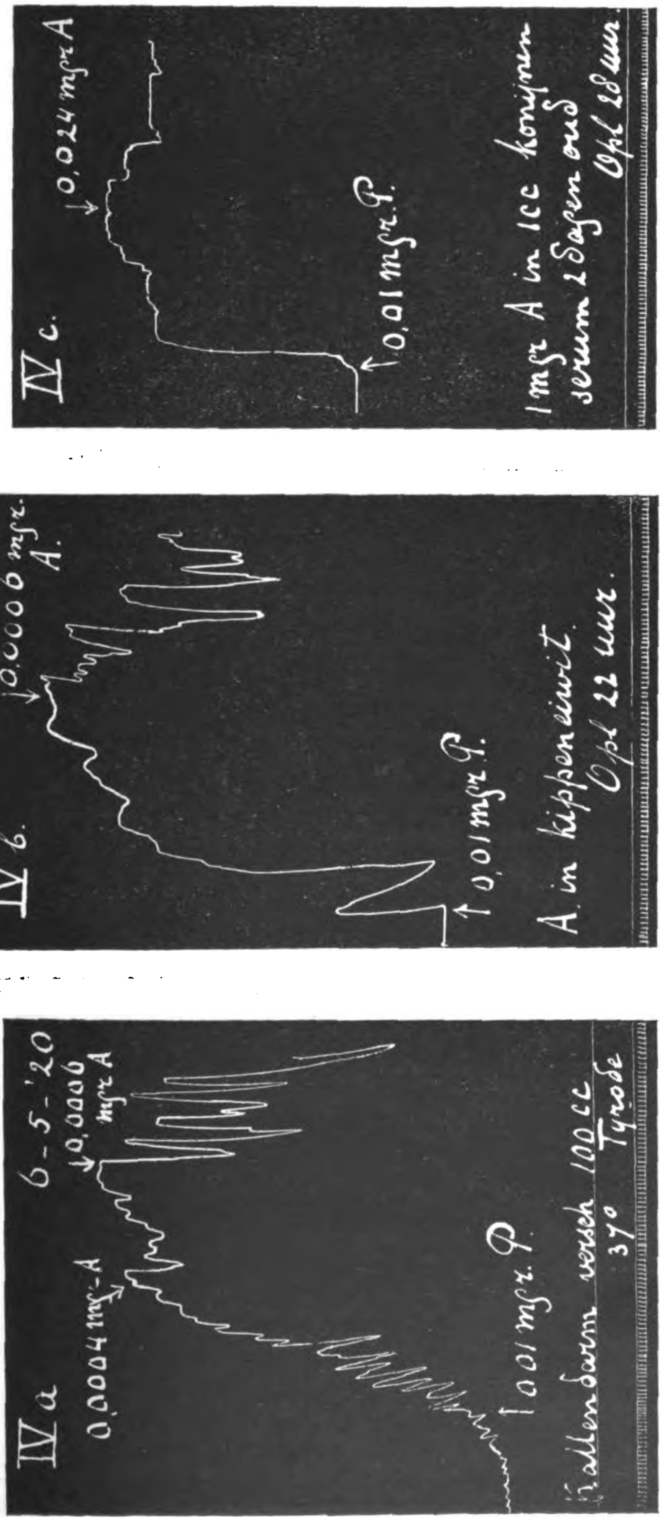
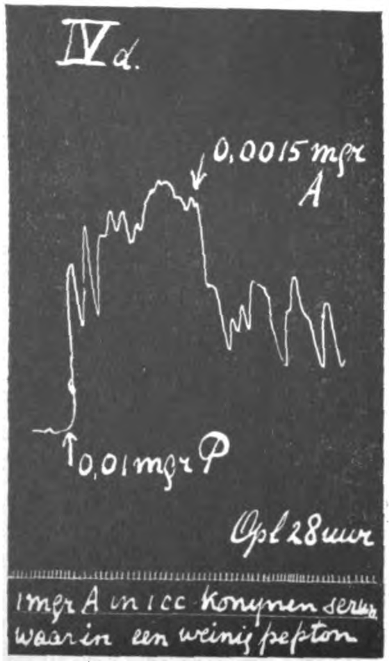
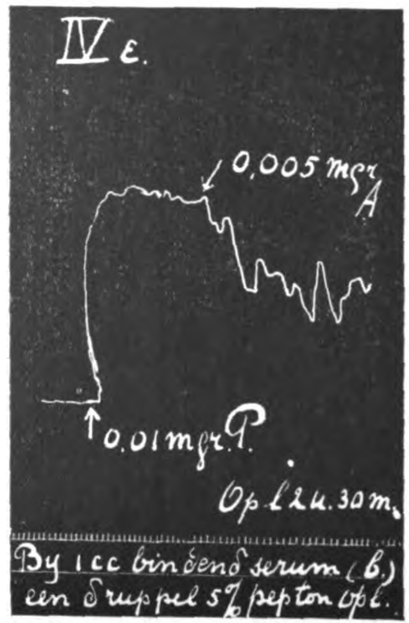


Fig. IV*a*, IV*b*, IV*c*.





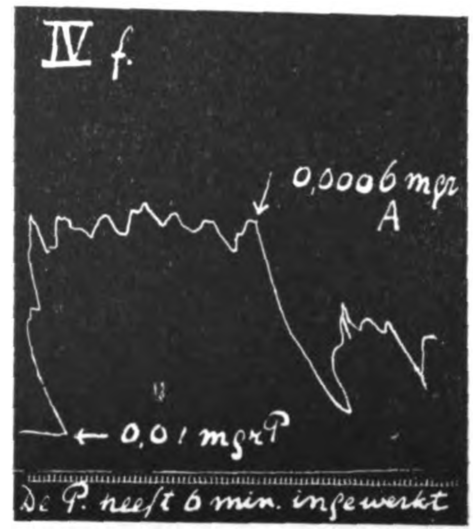


Fig. IV*d*, IV*e*, IV*f*.

weinig bekend. DÖBLIN en FLEISCHMANN[1]) vonden, dat de stof niet boven 60° kan worden verhit, wel ingevroren kan worden en weer ontdooid, ook ingedroogd. Door een chamberlandkaars gaat ze niet heen. Bij dialyse van het serum bleek de globulinegroep niet, de albuminegroep wel te binden. Bij uitzouten vonden zij hetzelfde resultaat.

Wij hebben getracht iets meer omtrent den aard van deze stof te weten te komen; voorloopig echter met nog niet heel veel resultaat. Het bleek, dat zoowel het serum als het plasma van konijnen sterk kunnen binden; de bloedlichaampjes, wanneer zij uitgewasschen worden en gesuspendeerd worden in physiologische zoutoplossing, hebben geen bindende kracht. Verder bleek, dat het serum van het konijn zeer werkzaam is, dat van katten, menschen, paarden, runderen en geiten weinig werkzaam. Toevallig konden wij beschikken over een portie konijne-serum, die op het laboratorium van Professor VAN CALCAR gedurende ruim negen jaar was bewaard gebleven in een toegesmolten glazen buis; dit serum kon nog in zeer aanzienlijke mate atropine binden.

Uit bijzondere proeven bleek ons ten slotte nog, dat lecithine geen bindend vermogen voor atropine bezit, dit is dus in overeenstemming met wat STORM VAN LEEUWEN vond ten opzichte van pilocarpine en lecithine. Het is zeer waarschijnlijk, dat de bindende stoffen niet alleen in het bloed van konijnen voorkomen, maar ook in andere deelen van het lichaam. Wij vonden, dat hersen- en leversubstantie van het konijn vrij sterk atropine konden binden. Ook deze binding kon door extractie met alcohol worden losgemaakt. Een binding van atropine aan leversubstantie was ook reeds door v. OETTINGEN[2]) gevonden, die aantoonde, dat de lever van kikvorschen sterk atropine bindt. Het serum van dit dier heeft geen bindend vermogen, hoewel het dier zeer resistent is tegen atropine. CLOETTA had ook reeds aangetoond, dat de lever van konijn, kat en hond in vitro atropine kon „zerstören"; hersensubstantie van het konijn werkt in dit opzicht sterker dan die van de kat.

Wanneer men zich afvraagt, welke beteekenis het bindend vermogen van konijne-serum voor de dieren kan hebben, dan mag men wel aannemen, dat dit een belangrijke factor zal zijn voor de groote resistentie van konijnen voor atropine. Men moet echter niet vergeten, dat op deze wijze nooit het geheele vraagstuk der resistentie kan worden verklaard. Want het is mogelijk dat wanneer aan konijnen

[1]) l. c.

[2]) V. OETTINGEN. Ueber d. Verhalten d. Atropine im Organismus des Frosches. Arch. f. exp. Path. 83. p. 381 1918.

atropine per os wordt gegeven, dat dan in den darm een deel wordt vernietigd. METZNER [1]) vond in zijn proeven, dat de konijnen te Bazel en te Bern blijkbaar weinig of geen van deze bindende stoffen in hun serum hebben, terwijl ze toch voor per os toegediende atropine zeer *on*gevoelig zijn, en deze resistentie schijnt door immuniseeren nog te kunnen worden verhoogd. Ten slotte kan op grond van de proeven van FLEISCHMANN, METZNER, HEFFTER, e.a. er niet aan getwijfeld worden, dat een chemische destructie van het atropine ook een rol zal spelen. Wanneer echter een vergift subcutaan of intraveneus wordt ingespoten, dan zal — we hebben daar al meermalen op gewezen — een chemische destructie te laat komen om een acute vergiftiging te voorkomen. Een physische binding echter treedt zeer snel in werking en kan dus in dit opzicht van nut zijn.

Opgemerkt moet nog worden, dat, hoewel in deze en in vorige mededeelingen herhaaldelijk wordt gesproken over „physische binding" in tegenstelling tot chemische destructie, wij niet met zekerheid kunnen zeggen, dat deze binding inderdaad een physisch proces is. Zeker is, dat het processen zijn, waarbij alcaloiden of andere vergiften worden gebonden aan weefselbestanddeelen, zoodat ze veel minder werkzaam zijn, maar nog gemakkelijk met eenvoudige hulpmiddelen, als behandeling met alcohol of koken met water in geheel werkzamen vorm kunnen worden teruggekregen. Gaat men de quantitatieve verhoudingen na, dan blijkt, dat — voor zoover het mogelijk is dat te beoordeelen — bij deze binding ongeveer dezelfde regels gevolgd worden, zooals FREUNDLICH die heeft opgesteld voor de adsorptie van kleurstoffen aan dierlijke kool.

Pharmocotherapeutisch Instituut.
Juni 1920. *Rijksuniversiteit te Leiden.*

[1]) METZNER. Mitteilungen über Wirkung und Verhalten des Atropin. im Organ. Arch. f. exp. Path. Bd. 68. pg. 110. 1912.

METZNER und HEDINGER Ueber die Beziehungen der Schilddrüse zur atropinezerstörenden Kraft des Blutes. Hetzelfde Bd. 69. pg. 272. 1913.

Physiologie. — De heer EINTHOVEN biedt eene mededeeling aan van den Heer S. DE BOER: *„Over de kunstmatige extrapauze van de kamer bij het kikkerhart.”*

(Mede aangeboden door den Heer WERTHEIM SALOMONSON).

Door DASTRE en LANGENDORFF werd 't eerst aangetoond, dat soms na het toedienen van een kunstmatigen prikkel aan de boezems van het kikkerhart een verlengde kamerpauze ontstaat, die niet wordt ingeleid door een extrasystole van de kamer. ENGELMANN kon dit experiment bevestigen en gaf daarvan een verklaring. Hij vestigde er de aandacht op, dat het experiment alleen dan gelukt, wanneer de prikkel in den aanvang van de kamersystole aan de boezems werd toegediend. Na de prikkel, die op dat oogenblik aan de boezems wordt toegediend, ontstaat een extrasystole dezer hartafdeelingen. Hierna plant de „Erregung” zich voort naar de kamer en bereikt deze nog gedurende het refractaire stadium, zoodat geen kamersystole volgt. Eerst na de compensatoire pauze, die op de extrasystole der boezems volgt, hernemen de boezems en de kamers het normale slagtempo. Dit experiment gelukt echter zelden. Een voorbeeld ervan vinden we in fig. 1. Daar werden de boezems bij 1 in den aanvang der kamersystole door een openingsinductieprikkel [1]) getroffen. Na de hierdoor opgewekte extrasystole der boezems bereikte de „Erregung” de kamer gedurende het refractaire stadium, zoodat geen systole dezer hartafdeeling ontstond.

Eerst na de compensatoire pauze der boezems ontstond weer een boezemsystole, gevolgd door een systole van de kamer.

Ik ben er nu in geslaagd, dit experiment beter te doen gelukken. Wanneer men toch den duur van het refractaire stadium van de kamer verlengt, zal de „Erregung” na de kunstmatige extrasystole der boezems met meer zekerheid de kamer nog in het refractaire stadium bereiken. Deze verlenging van het refractaire stadium van de kamer kunnen we nu op verschillende manieren tot stand brengen. Eerstens is het bekend sedert LANGENDORFF, dat de duur van

[1]) In alle figuren werd de sluiting van den primairen stroomkring aangegeven door een uitslag van het signaal naar beneden. Bij opening van den primairen stroomkring kwam een uitslag van het signaal naar boven tot stand. In fig. 1, 2, 3, 4 en 6 werden de sluitingsprikkels afgeblend en bereikten dus het hart niet.

de postcompensatoire systole is toegenomen. Het is me nu gebleken, dat gedurende de postcompensatoire systole tevens de duur van het refractaire stadium verlengd is. Het is dus te verwachten, dat het

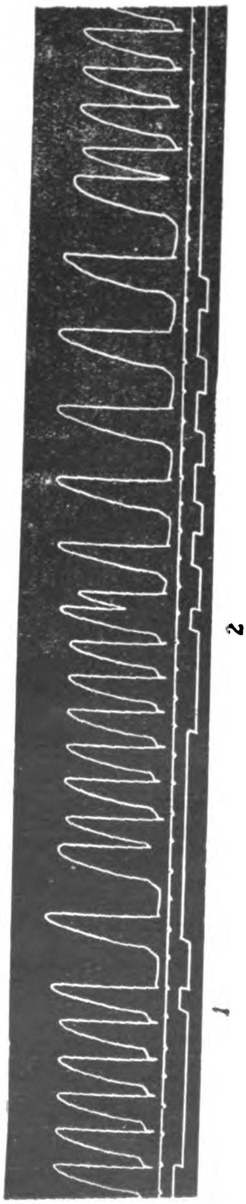


Fig. 1.

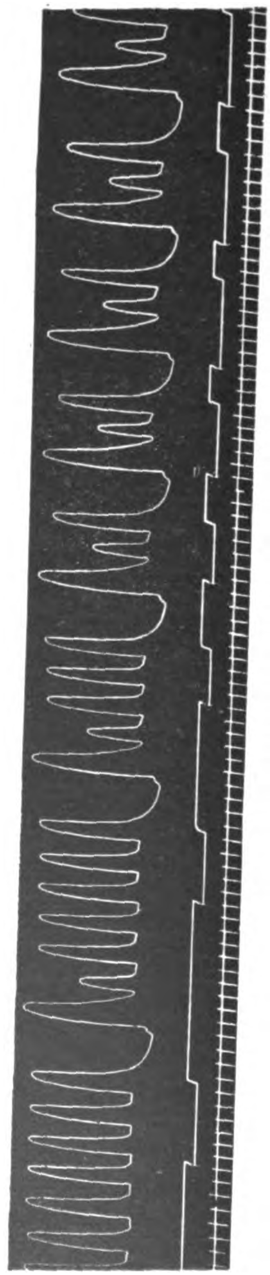


Fig. 2.

experiment gedurende een postcompensatoire systole beter zal gelukken. De juistheid van dezen gedachtengang moge blijken uit fig. 1. Daarin werden de boezems gedurende de postcompensatoire systole

bij den tweeden uitslag van het signaal naar boven opnieuw geprikkeld en hierna ontstond weer een extrapauze van de kamer, die niet werd ingeleid door een vervroegde kamersystole. Bij 2 werden de boezems in den aanvang van een kamersystole weer geprikkeld. Na de hierdoor opgewekte extrasystole der boezems bereikte de „Erregung" de kamer na het refractaire stadium, zoodat een vervroegde kamersystole volgde. Als ik echter bij den volgenden uitslag van het signaal naar boven in den aanvang der postcompensatoire kamersystole den prikkel herhaal, dan bereikt na de zoo opgewekte extrasystole der boezems de „Erregung" de kamer prompt gedurende het refractaire stadium. Een extrapauze van de kamer volgt nu. Zoo kan ik gedurende elke volgende kamersystole, die telkens verbreed is, het experiment gemakkelijk herhalen. Ja zelfs behoef ik ten slotte de boezems niet meer in het begin der kamersystole te prikkelen. De laatste prikkel toch werd ongeveer in het midden der kamersystole toegediend, zonder dat het experiment mislukte. En dit is ook begrijpelijk. Wanneer we toch de kamersystolen van dit kunstmatig onderhouden gehalveerde kamerrhythme nader bezien, dan valt ons het volgende op. Na de compensatoire pauze is de postcompensatoire systole breeder dan de voorafgaande kamersystolen. De hierna volgende kamersystole overtreft echter de voorafgaande weer in breedte en de derde kamersystole is weer in breedte toegenomen. We zien dus dat de contractiliteit van de kamerspier na elke verlengde kamerpauze toeneemt. Deze restauratie van de kamerspier in het kunstmatig onderhouden gehalveerde rhythme brengt met zich mee, dat ook de duur van het refractaire stadium van systole tot systole toeneemt. Daarom kan ik tenslotte den prikkel later in de kamerperiode aan de boezems toedienen, zonder dat dit afbreuk doet aan het welslagen van het experiment. Na den laatsten prikkel herneemt de kamer weer het normale slagtempo [1]).

We kunnen in de tweede plaats het refractaire stadium van de kamer verlengen door vergiften n.l. digitalis, veratrine, antiarine of bariumchloride en dan het experiment naar willekeur doen gelukken. Hier moge een rij curven volgen van een kikkerhart, dat vergiftigd was met bariumchloride. Fig. 2. Bij elken uitslag van het signaal naar boven ontvangen de boezems een openingsinductieprikkel in den aanvang eener kamersystole. Telkens ontstaat een extrasystole der boezems

[1]) Na vergiftiging met veratrine, digitalis, antiarine of bariumchloride, kan na een of meerdere extrapauzen van de kamer het gehalveerde kamerrhythme voortduren, zonder dat het hart verder geprikkeld wordt. Ook komt dit voor na verbloeding van het onvergiftigde kikkerhart (zie fig. 5).

en telkens bereikt daarna de „Erregung” de kamer gedurende het refractaire stadium, zoodat extrapauzen van de kamer ontstaan, die niet worden ingeleid door vervroegde kamersystolen [1]).

Het is me nu gebleken, dat we nog op geheel andere wijze kunstmatige extrapauzen van de kamer bij een kikkerhart kunnen opwekken. Terwijl bij de hierboven beschreven methode de verlenging van den duur van het refractaire stadium van de kamer de beslissende rol speelde, berust de hier volgende methode op een geheel ander en voor de hartphysiologie nieuw beginsel. Wanneer we toch de prikkelelectrode plaatsen in de atrio-ventriculairgroeve kunnen we onder bepaalde omstandigheden (n.l. verlengd refractairstadium van de ventrikel) door het toedienen van een extraprikkel tegen het einde van de diastole van de kamer een extrapauze van de kamer zien verschijnen, die niet wordt ingeleid door een extrasystole dezer hartafdeeling.

In onze experimenten, die we hierboven hebben beschreven, moesten we den extraprikkel in het begin van de systole toedienen om het gewenschte effect te krijgen. Werd daarbij de prikkel iets later toegediend, dan volgde op de extrasystole der boezems een vervroegde kamersystole. Het is dus duidelijk, dat wanneer een prikkel op het einde der diastole van de kamer dezelfde uitwerking heeft, dan hiervoor dezelfde verklaring niet kan gelden. We zullen dus aan de hand van eenige curven dit laatste experiment nader toelichten. Zoo zien we in Fig. 3 de suspensiecurven van een kikkerhart na vergiftiging met veratrine weergegeven. (Het hart was in situ gelaten en de bloedsomloop intact; eenige druppels 1 °/₀ opl. acetas veratrini, waren ongeveer 10 min. tevoren in den dorsalen lymphzak gespoten). Bij den eersten uitslag van het signaal naar boven werd een openingsinductieprikkel toegediend. Hierna zien we een boezemsystole in de suspensiecurve afgeteekend, die niet gevolgd werd door een systole van de kamer. Evenals in de hiervoor beschreven experimenten volgt op deze boezemsystole een extrapauze van de kamer. Ditzelfde experiment werd bij den volgenden uitslag van het signaal naar boven in de bovenste rij met hetzelfde resultaat herhaald. Wanneer we nu de curve uitmeten, vinden we, dat de boezemsystole, die korten tijd na elk der beide prikkels te voorschijn kwam, met een interval van een sinusperiode volgt na den aanvang van de voorafgaande boezemsystole. We hebben dus den extraprikkel in de atrio- ventriculairgroeve aangewend korten tijd vóór den aanvang van een normale periodische boezemsystole. Op dat oogenblik was blijkbaar de kamer nog refractair,

[1]) In een verder gevorderd stadium der vergiftiging blijft na zulk een kunstmatige extrapauze de kamer in het gehalveerde rhythme te pulseeren.

daar een extrasystole van de kamer niet ontstond. De boezems echter spreken aan op den prikkel. De „Erregung" doorloopt nu vanaf de atrio-ventriculairgrens de boezems in de richting van den sinus venosus.

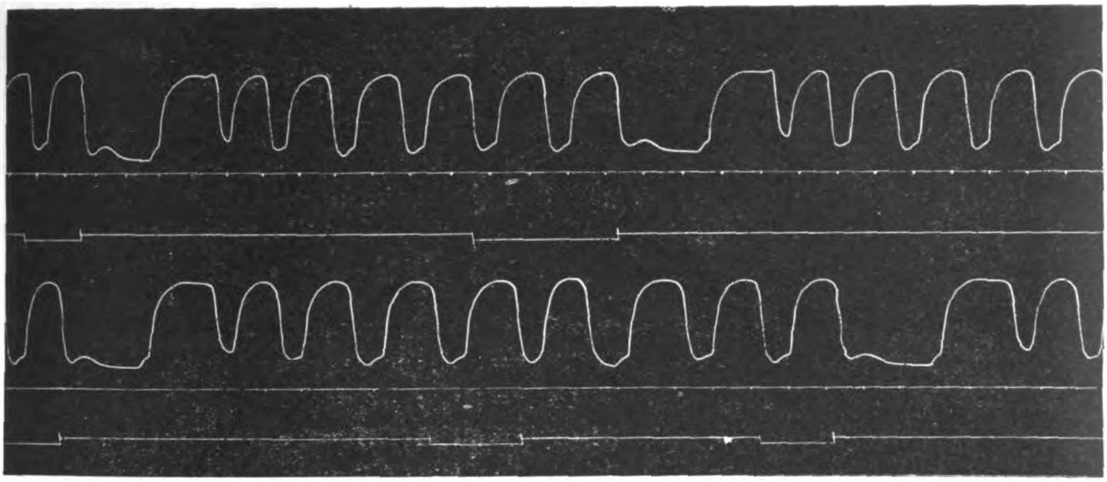


Fig. 3.

Maar tegelijkertijd komt de periodische sinusimpuls en doorloopt in tegengestelde richting de boezems. De beide „Erregungen" ontmoeten elkaar en stuiten op elkaar af. Op dat oogenblik is de boezemsystole tot stand gekomen onder den invloed van twee „Erregungen", die in tegengestelde richting door deze beide hartafdeelingen verliepen. De „Erregungen" loopen op elkaar in en stuiten tegen elkaar en worden dan beide uitgebluscht. We begrijpen nu, dat de boezemsystole, die na den extraprikkel volgt, tot stand komt deels onder den invloed van den periodischen sinusimpuls en deels tengevolge van den extraprikkel [1]). Tevens is het duidelijk, dat deze boezemsystole nu niet gevolgd kan worden door een systole van de kamer. Op de onderste rij curven, die eenigen tijd later geregistreerd werd, wordt dit experiment bij den eersten en den derden uitslag van het signaal naar boven herhaald en met hetzelfde resultaat. Bij den tweeden uitslag van het signaal naar boven wordt de prikkel iets later toegediend, zoodat nu een extrasystole van de kamer ontstaat.

In Fig. 4 zijn de suspensiecurven en electrogrammen weergegeven van een kikkerhart na vergiftiging met antiarine. Aanvankelijk pulseerde de kamer in het gehalveerde rhythme, dat bij den eersten

---

[1]) Het spreekt vanzelf, dat het afhangt van het oogenblik, waarop de extraprikkel wordt toegediend, aan welke impuls het grootste gedeelte van de boezemsystole haar ontstaan heeft te danken. Zoo zullen in Fig. 6 de beide boezemsystolen voor het grootste gedeelte tot stand komen door den extraprikkel.

uitslag van het signaal naar boven werd overgezet in het tweemaal zoo snel normale. Bij den tweeden uitslag van het signaal naar

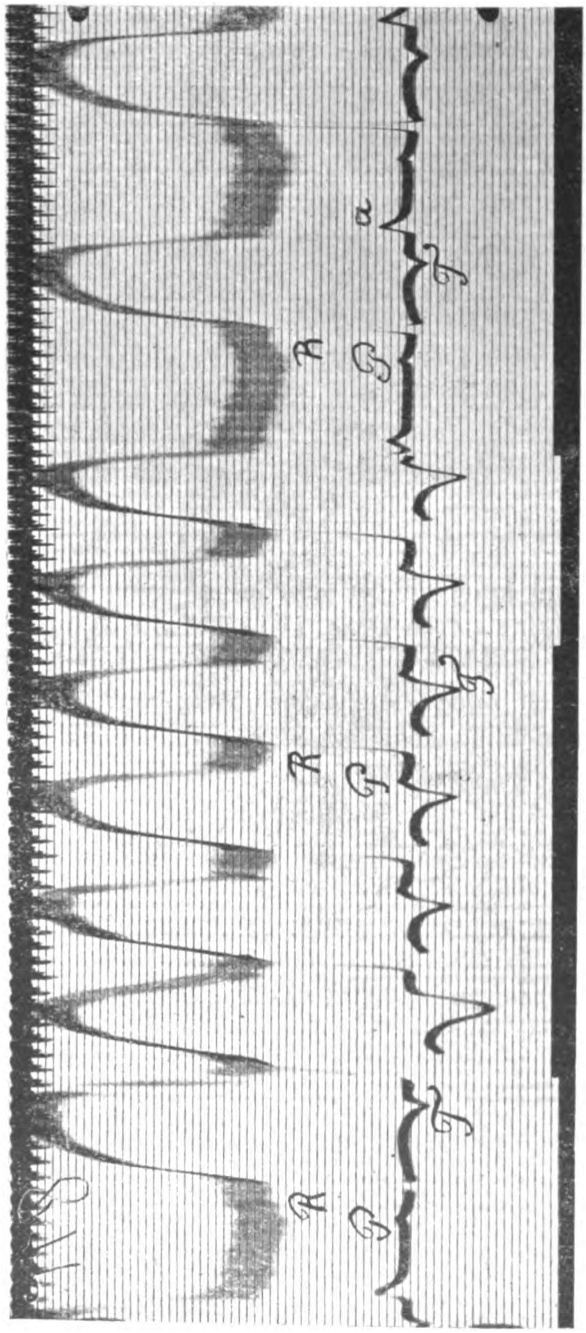


Fig. 4.

boven wordt weer een inductieprikkel toegediend in de atrio-ven-

triculairgroeve [1]). We zien nu aan de snaarcurve, dat deze prikkel korten tijd na den *P*-uitslag wordt toegediend. Op dit oogenblik is de kamer blijkbaar nog refractair, zoodat geen extrasystole van de kamer wordt opgewekt.[2]) De boezems echter spreken wel aan op den prikkel, zoodat deze nu tevens in retrograde richting door een „Erregung" worden doorloopen. Deze „Erregung", die na den extraprikkel den boezem doorloopt, stoot in de boezems op den periodischen sinusimpuls, die reeds op het oogenblik, waarop de extraprikkel werd toegediend in tegengestelde richting op weg was. Beide „Erregungen" worden dan uitgebluscht, zoodat geen vervroegde kamersystole kan volgen en een extrapauze van de kamer ontstaat. Hierna wordt het normale kamerrhythme in het gehalveerde omgezet.[3])

Het is wel zeker, dat in dit geval het grootste gedeelte van de boezemsystole te danken is aan den periodischen sinusimpuls, omdat deze reeds op weg was door de boezems op het oogenblik, waarop de extraprikkel werd toegediend. We hebben hiervoor gezien, dat op het oogenblik, waarop de extra-prikkel in de atrio-ventriculairgroeve wordt toegediend, de kamer refractair moet zijn. Voor het welslagen van deze proef zal dus een verlenging van het refractaire stadium van de kamer bevorderlijk zijn.

We hebben in de beide vorige experimenten deze verlenging tot stand gebracht door vergiftiging met veratrine of antiarine. We kunnen nu ook nog gebruik maken van het feit, dat het refractaire stadium van de kamer gedurende de postcompensatoire systole verlengd is. Een voorbeeld hiervan zien we in Fig. 5. Hierin zijn de suspensiecurven van de boezems (onderste curven) en de kamer (bovenste curven) van een kikkerhart afgebeeld na de verbloeding. De prikkel-

---

[1]) Het oogenblik, waarop de extraprikkel wordt aangewend, is aangegeven door het signaal en is tevens te zien aan de snaarcurve, die door het gedurende korten tijd wegslaan van de snaar een klein hiaat vertoont.

[2]) We zien in de snaarcurve direct na den prikkel een kleinen, driehoekigen uitslag, die dus verraadt, dat een uiterst klein gedeelte van de kamer toch nog tot contractie overgaat. We kunnen wel met zekerheid besluiten, dat op deze uiterst kleine partieele contractie de sinusimpuls niet kan afstuiten, daar immers bij het kikkerhart de boezems langs de geheele atrio-ventriculairgroeve in geleidend verband staan met de kamer (atrio-ventriculairtrechter) Zoo zien we ook in fig. 3 na de 4 prikkels, die extrapauzen van de kamer inleiden, de uitslagen van de suspensiecurve iets in grootte verschillen. Waarschijnlijk is ook hier een paar maal een uiterste klein gedeelte van de kamer tot contractie gebracht.

[3]) Over deze rhythmeoverzettingen en de veranderingen, die de kamerelectrogrammen daarbij ondergaan, behoef ik hier niet verder uit te wijden. Deze werden door mij behandeld in: *Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam Proceedings* Vol. XX pag. 696, tome I (1917) pag. 271 et 502. *Archives Néerl. de Physiologie* tome III (1918) pag. 7 et 90. *Pflügers Archiv* Bd. 173, Seite 78.

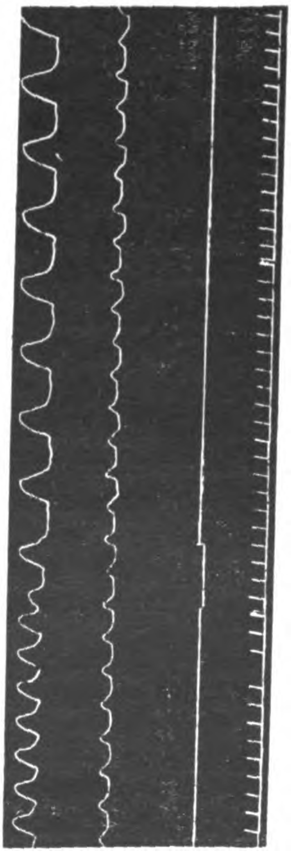


Fig. 5.

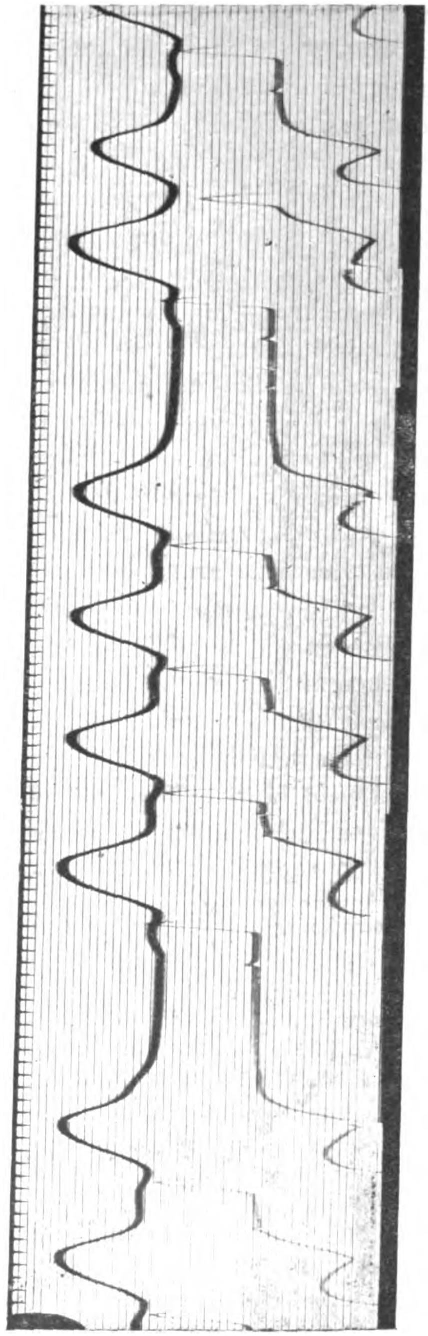


Fig. 6.

electrode is aangebracht in de atrio-ventriculairgroeve. Bij den uitslag van het signaal naar beneden wordt een sluitingsprikkel toegediend. [1]) Hierdoor ontstaat een extrasystole van de kamer, die gevolgd wordt door een compensatoire pauze. Gedurende de postcompensatoire systole wordt een openingsprikkel toegediend. Terwijl deze evenals de vorige prikkel bij den aanvang van een boezemsystole wordt toegediend, is nu toch het resultaat geheel anders. Het refractaire stadium van de postcompensatoire systole is n.l. verlengd, zoodat nu op het oogenblik van den prikkel de kamer nog refractair is en dus geen extrasystole vertoont. De boezems bij de atrio-ventriculairgrens spreken echter wel aan op den prikkel, zoodat dientengevolge een „Erregung" de boezems in retrograde richting doorloopt. Deze „Erregung" stoot in de boezems op den periodischen sinusimpuls, zoodat beide „Erregungen" worden uitgebluscht en geen vervroegde kamersystole kan volgen. Na de extrapauze van de kamer, die zoo tot stand komt, is de volgende systole van de kamer vergroot en verbreed. Daar deze nu een verlengd refractair stadium van de kamer veroorzaakt, wordt de kamer vastgezet in het gehalveerde rhythme. [2]) Het is duidelijk, dat de hiervoor beschreven experimenten alleen dan gelukken, wanneer de extraprikkel op een bepaald oogenblik de atrioventriculairgroeve treft.

Valt dat oogenblik samen met het oogenblik, waarop de periodische sinusimpuls de boezems binnentreedt, dan kan het experiment gelukken. Ook dan, wanneer de extraprikkel iets later of vroeger wordt aangewend, gelukt het experiment nog. Zoo werd in Fig. 4 bij den tweeden uitslag van het signaal naar boven de prikkel aangewend korten tijd na den *P*-uitslag, dus korten tijd nadat de „Erregung" reeds vanaf den sinus venosus de boezems was binnengetreden.

In fig. 6 gelukte het experiment tweemaal door extraprikkels, die korten tijd vóór den *P*-uitslag in de atrio-ventriculairgroeve werden aangewend. Bij den eersten uitslag van het signaal naar boven werd de extraprikkel toegediend op den top van den negativen *T*-uitslag, dus vóórdat de *P*-uitslag nog geregistreerd zou worden [3]). De „Erregung" doorloopt hierna de boezems in retrograde richting en stoot in de buurt van den sinus venosus op den periodischen sinusimpuls. De *P*-uitslag, die anders direct na afloop van den

---

[1]) In deze figuur zijn de sluitingsinductieprikkels niet afgeblend; zij worden aangeduid door een uitslag van het signaal naar beneden.

[2]) Deze rhythmeoverzettingen bij het ontbloede kikkerhart worden in de volgende mededeeling behandeld.

[3]) We zien in de electrogramcurve de *P*-uitslagen te voorschijn komen direct na afloop van de *T*-uitslagen.

T-uitslag zou zijn te voorschijn gekomen, ontbreekt nu. De boezemsystole komt in dit geval wat vervroegd tot stand en is in de suspensiecurve nog even te zien in het laatste gedeelte van de kamerdiastole. Het is duidelijk, dat deze boezemsystole grootendeels aan den extraprikkel te danken is.

Bij den tweeden uitslag van het signaal naar boven werd de prikkel even vóór den top van den T-uitslag toegediend. Het resultaat is hetzelfde als bij den vorigen prikkel n.l. een extrapauze van de kamer.

Wordt nu de extraprikkel veel later of veel vroeger aangewend als op het oogenblik, waarop de sinusimpuls de boezems binnentreedt, dan ontstaat daarna geen extrapauze van de kamer. Wendt men den extraprikkel later aan, dan treft deze de kamer na het refractaire stadium en ontstaat er een extrasystole van de kamer, gevolgd door een compensatoire pauze. Een voorbeeld hiervan vinden we in Fig. 3 op de onderste rij curven bij den tweeden uitslag van het signaal naar boven.

En omgekeerd, wanneer de extraprikkel veel vroeger wordt toegediend, dan ontstaat een extrasystole van de boezems, waarna met een normaal $a—v$ interval een kamersystole volgt. Een voorbeeld van dit laatste geval vinden we in Fig. 6 bij den derden uitslag van het signaal naar boven.

Bij den eersten en den tweeden uitslag van het signaal naar boven werd de extraprikkel op den top van den T-uitslag of korten tijd daarvoor toegediend met het gevolg, dat een extrapauze van de kamer outstond. Bij den derden uitslag van het signaal naar boven echter, werd de extraprikkel veel vroeger toegediend n.l. ruim $^1/_2$ sek. voor den top van den T-uitslag. De boezems spreken nu blijkbaar reeds aan op den prikkel en vertoonen een volledige extrasystole, zonder dat deze retrograde „Erregung” in de boezems op den periodischen sinusimpuls stuit. Na deze extrasystole der boezems plant de „Erregung” zich voort naar de kamer en zet deze tot een vervroegde contractie aan.

Het gelukken van dit laatste experiment is aan bepaalde voorwaarden gebonden.

1°. De extraprikkel moet de boezems treffen na het refractaire stadium dezer hartafdeelingen.

2°. Na de kunstmatige extrasystole moet de „Erregung” de kamer bereiken na het refractaire stadium van de kamer.

3°. De extraprikkel moet zóó vroeg worden toegediend, dat de „Erregung”, die hierna in retrograde richting de boezems doorloopt, in de boezems nog niet stoot op den eerstvolgenden sinusimpuls.

Ten slotte wijs ik er op, dat de verklaring, die ENGELMANN in 1895 gaf voor den constanten duur der compensatoire pauze, na dit onderzoek noodwendig een aanvulling behoeft. Volgens ENGELMANN is in de plaats van de extrasystole daarom een normale periodische kamersystole uitgevallen, omdat de periodische sinusimpuls de kamer bereikte gedurende het refractaire stadium van de extrasystole. Na dit onderzoek zou ik hieraan willen toevoegen, dat in een gedeelte der gevallen daarom de periodische kamersystole uitvalt, omdat na den extraprikkel de ook in retrograde richting voortgeleide „Erregung" met den periodischen sinusimpuls in de boezems samenbotst, zoodat beide „Erregungen" worden uitgebluscht.

Wanneer we de verklaring van den duur der compensatoire aldus uitbreiden, dan is een feit, dat mij reeds langen tijd bekend was, ook duidelijk geworden. Wanneer we n.l. een extraprikkel aan de kamer toedienen, dan zien we in een gedeelte der experimenten gedurende de extrasystole wel, in een ander gedeelte niet een *P*-uitslag in de electrogrammen afgeteekend. Als de *P*-uitslag ontbreekt, dan ligt het voor de hand, dat de periodische sinusimpuls niet den geheelen boezem heeft doorloopen, doch is samengebotst met de in retrograde richting verloopende „Erregung", die door den extraprikkel werd opgewekt.

Physiologie. — De Heer EINTHOVEN biedt eene mededeeling aan van den Heer S. DE BOER: *„Kunstmatige en spontane rhythmewisselingen bij het ontbloede kikkerhart".*

(Mede aangeboden door den Heer WERTHEIM SALOMONSON).

Wanneer we een kikkerhart ontbloeden en suspendeeren, kan daarna het rhythme van de kamer tot halveering overgaan, een verschijnsel, dat we ook waarnemen bij intacten bloedsomloop na vergiftiging met veratrine, digitalis, antiarine of baryumchloride.

De oorzaak hiervan is gelegen in het feit, dat onder deze omstandigheden de duur van het refractaire stadium van de kamer toeneemt. Deze toename van den duur van het refractaire stadium moeten we toeschrijven aan een verstoring van het metabole evenwicht, zoodat bij den aanvang van elke kamersystole de kamerspier nog niet weer volkomen gerestaureerd is. Datgene, wat dan nog als residu van het refractaire stadium aanwezig is, noemen we het *residu refractaire stadium*. Bij elke systole wordt hieraan toegevoegd als gevolg van de kamerspiercontractie het *periodische refractaire* stadium. Wanneer derhalve het metabole evenwicht verstoord is, bestaat het totale refractaire stadium uit de beide hiervoor genoemde componenten. Het is duidelijk, dat de verstoring van het metabole evenwicht na vergiftiging met veratrine, digitalis, antiarine en baryumchloride wordt veroorzaakt door een versterkten arbeid van de kamerspier. Na ontbloeding daarentegen ontstaat deze wanverhouding tengevolge van de gebrekkige anabole processen.

Zoodra de duur van het refractaire stadium den duur van een sinusperiode overtreft, gaat het normale kamerrhythme over naar het gehalveerde. (Dit kan plotseling geschieden of meer allengs langs den weg der groepvorming) [1]).

Voordat het gehalveerde kamerrhythme spontaan voor den dag komt, kunnen we kunstmatig het rhythme van de kamer doen halveeren. Dit moge uit de volgende beschouwing blijken.

---

[1]) Wanneer de plotselinge en wanneer de meer langzame overgang tot stand komt, werd nader door mij uiteengezet (*Archives Néerl. de Physiologie* tome I (1917) pag. 534—538.

We noemen $\frac{\text{den duur van het totale refractaire stadium}}{\text{den duur van een sinusperiode}}$ den relatieven duur van het refractaire stadium.

Wanneer we deze breuk nader bekijken, kunnen we vooraf reeds zeggen, op welke wijze we het normale en het gehalveerde kamerrhythme in elkaar kunnen overzetten. Maken we toch den relatieven duur van het refractaire stadium > 1, dan zal de kamer in het gehalveerde rhythme pulseeren. Als we daarentegen dezen duur < 1 maken, zal de kamer in het normale rhythme kloppen, waarin elke sinusimpuls door een systole van de kamer gevolgd wordt. We kunnen nu de breuk grooter dan 1 maken door den teller te vergrooten of ook door den noemer te verkleinen. Hebben we nu een hart voor ons, waarvan het totale refractaire stadium verlengd is en dat nog klopt in het normale rhythme, dan kunnen we den duur van het totale refractaire stadium inderdaad zooveel verlengen, dat deze grooter wordt dan die van een sinusperiode. We kunnen dus dan de breuk grooter dan 1 maken. We hebben dan slechts een vergroote systole te voorschijn te roepen, waarvan het refractaire stadium verlengd is.

Zulk een vergroote systole nu is de postcompensatoire systole. Hebben we derhalve het refractaire stadium van een kamer verlengd (door vergiften of ontbloeding), dan roepen we een extrasystole of extrapauze van de kamer te voorschijn. Na de compensatoire pauze of extrapauze is de eerstvolgende kamersystole vergroot, terwijl hiervan de duur van het refractaire stadium verlengd is. Daarom zal de hierna volgende sinusimpuls op dit verlengde refractaire stadium afstuiten; weer ontstaat een verlengde pauze en weer is hierna de eerstvolgende kamersystole vergroot en heeft een verlengd refractair stadium met al de gevolgen van dien. Zoo wordt dan de kamer door de vergroote en verbreede postcompensatoire systole in het gehalveerde rhythme vastgezet [1]). Een vergrooting van den duur van het refractaire stadium, dus een vergrooting van den teller van de hiervoor genoemde breuk, was voldoende, om het gehalveerde kamerrhythme te voorschijn te roepen.

Een tweede methode, die tot hetzelfde doel voert, is verwarming van den sinus venosus. Daardoor neemt de frequentie der sinusimpulsen toe en neemt dus de duur van een sinusperiode af. We verkleinen dan den noemer van de breuk. Gaan we nu echter uit van het gehalveerde kamerrhythme, dan is de relatieve duur van

[1]) Niet op elke postcompensatoire systole volgt het gehalveerde kamerrhytme. Dit gebeurt alleen dan, wanneer te voren reeds het refractaire stadium verlengd was door een verstoring van het metabole evenwicht.

het refractaire stadium grooter dan 1. We kunnen dan de breuk kleiner dan 1 maken door den teller te verkleinen of door den noemer te vergrooten.

Het eerste kunnen we bereiken door gedurende de diastole een extraprikkel aan de kamer toe te dienen. Er ontstaat dan een extrasystole van de kamer, waarvan de duur veel korter is dan die der kamersystolen uit het gehalveerde kamerrhythme. Daarom is de duur van het refractaire stadium hiervan verkort en kan dus de hierna volgende sinusimpuls een systole van de kamer verwekken. Ook deze systole zal wegens den korten duur der voorafgaande kamerpauze een korten duur en dienovereenkomstig kortdurend refractair stadium hebben. Daarom wordt ook hierna weer de eerstvolgende sinusimpuls beantwoord door een systole van de kamer. Zoo wordt dus het gehalveerde kamerrhythme overgezet in het normale tweemaal zoo snelle.

In plaats van in de diastole kunnen we echter den extraprikkel gedurende het gehalveerde kamerrhythme ook tegen het einde van de pauze toedienen. De eerstvolgende sinusimpuls bereikt dan de kamer gedurende de diastole van de extrasystole en wekt dan een kleine kamersystole op. Terwijl in het eerste geval het normale kamerrhythme werd ingeleid door een kleine extrasystole, ontstaat nu het normale kamerrhythme onder den invloed van een sinusimpuls, die de kamer in de diastole van een extrasystole bereikt en daarom een kleine systole oplevert. In beide gevallen was het een *kleine kamersystole met een kortdurend refractair stadium*, die het normale kamerrhythme mogelijk maakte.

We kunnen in de tweede plaats het gehalveerde kamerrhythme overzetten in het normale tweemaal zoo snelle door afkoeling van den sinus venosus. We verlangzamen dan het tempo der sinusimpulsen en verlengen daardoor den duur der sinusperioden.

We zullen eenige der hierboven aangeduide kunstmatige rhythmewisselingen, door experimenteele resultaten verkregen bij het ontbloede kikkerhart, nader toelichten [1]).

We bezien eerst Fig. 5 van de vorige mededeeling [2]). De prikkelelectrode is aangebracht in de atrio-ventriculairgroeve. Bij den uitslag van het signaal naar beneden ontvangt de kamer een sluitingsinductieprikkel, waardoor een extrasystole ontstaat. Op 't einde van de diastole van de postcompensatoire systole, die vergroot is, wordt

---

[1]) In alle figuren dezer mededeeling bevinden zich de suspensiecurven van de kamer op de bovenste rij, die der boezems op de tweede rij.

[2]) S. de Boer: Over de kunstmatige extrapauze van de kamer bij het kikkerhart. Dit Verslag p. 195.

een openingsinductieprikkel toegediend, waardoor een extrapauze van de kamer ontstaat [1]).

Na de extrapauze is de eerste kamersystole nog verder in grootte en breedte toegenomen, zoodat nu de eerstvolgende sinusimpuls op het refractaire stadium afstuit. De hierna volgende verlengde kamerpauze veroorzaakt opnieuw een vergroote kamersystole met een verlengd refractair stadium.

Weer wordt de eerstvolgende sinusimpuls niet beantwoord met een kamersystole. Zoo blijft de kamer, eenmaal pulseerend in het gehalveerde rhythme door het verlengde refractaire stadium, als het ware gevangen in haar eigen rhythme.

We kunnen dit gehalveerde kamerrhythme weer terugbrengen naar het tweemaal zoo snelle normale door een kleine kamersystole te voorschijn te roepen. We zien dit in Fig. 1 gebeuren [2]).

Bij den uitslag van het signaal naar beneden werd een extrasystole van de boezems opgewekt, waarna de „Erregung" de kamer gedurende het refractaire stadium bereikte. Hier veranderde derhalve het rhythme van de kamer niet. Bij den uitslag van het signaal naar boven evenwel werd in het einde der pauze de prikkel herhaald. De boezems zijn nu refractair, doch de kamer reageert op den prikkel met een extrasystole. Daarna bereikt de periodische sinusimpuls de kamer tegen het einde van de diastole, zoodat een verkleinde kamersystole ontstaat. Hiermee gaat gepaard een refractair stadium van korten duur, zoodat ook de daaropvolgende sinusimpuls weer beantwoord wordt met een systole van de kamer. Zoo kan verder elke sinusimpuls weer door een kamersystole worden gevolgd.

Fig. 2 vertoont de suspensiecurven van een kikkerhart, 10 min. na het ontbloeden. De prikkelelectrode bevindt zich aan de boezems. Bij den eersten uitslag van het signaal naar beneden ontvangen de boezems een sluitingsprikkel, waarna een extrasystole der boezems ontstaat gevolgd door een compensatoire pauze. Het kamerrhythme wordt hierdoor, zooals te begrijpen is, anders niet beinvloed dan dat de eerstvolgende kamersystole een weinig vervroegd optreedt.

Wanneer echter bij den uitslag van het signaal naar boven de boezems op een vroeger oogenblik der boezemperiode een openingsinductieprikkel ontvangen, is het resultaat een geheel ander. Na de hierdoor opgewekte extrasystole der boezems, die met den aanvang van een kamersystole samenvalt, bereikt de „Erregung" de kamer,

[1]) Over de oorzaken van het ontstaan dezer extrapauze raadplege men de vorige mededeeling.

[2]) Tusschen fig. 5 van de vorige mededeeling en fig. 1 van deze zijn 2 kamersystolen niet gereproduceerd.

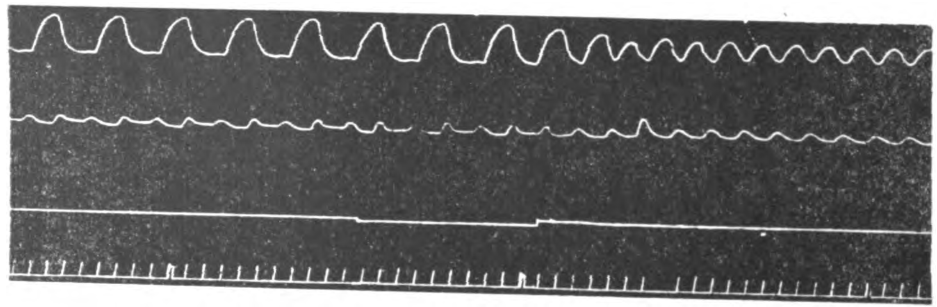


Fig. 1.

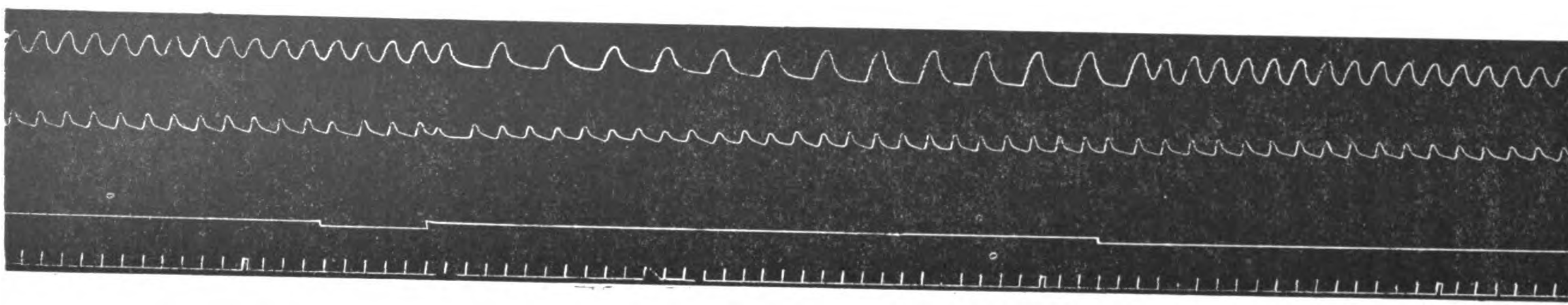


Fig. 2.

als deze nog refractair is. Eerst na de compensatoire pauze der boezems wordt de eerstvolgende boezemsystole weer gevolgd door een systole van de kamer. Zoo ontstaat een extrapauze van de kamer, die gevolgd wordt door een vergroote en verbreede systole. Hiervan is het refractaire stadium verlengd, zoodat de eerstvolgende boezemsystole niet gevolgd kan worden door een systole van de kamer. Weer ontstaat een verlengde pauze van de kamer, die opnieuw gevolgd wordt door een vergroote kamersystole. Zoo wordt de kamer, door één prikkel aan de boezems toegediend, vastgezet in het gehalveerde rhythme. Bij den tweeden uitslag van het signaal naar beneden ontvangen de boezems tegen het einde der pauze een sluitingsprikkel, waardoor een extrasystole dezer hartafdeelingen ontstaat. Daarna vangt de eerstvolgende kamersystole op een vervroegd tijdstip aan. De hierop volgende sinusimpuls bereikt dan de kamer tegen het einde van de diastole en kan dus door een kleine kamersystole gevolgd worden. Deze kleine kamersystole nu levert een refractair stadium van korten duur op. Daarom kan de eerstvolgende boezemsystole weer door een systole van de kamer gevolgd worden, die wegens den korten duur der voorafgaande pauze weer klein is en kort duurt. Daarom kan ook hierna weer de eerstvolgende boezemsystole door een systole van de kamer gevolgd worden. Zoo wordt door één inductieprikkel het gehalveerde rhythme van de kamer in het tweemaal zoo snelle normale omgezet.

We zien dus in de figuren 1 en 2, dat we in staat zijn, om door één inductieprikkel het gehalveerde kamerrhythme over te zetten in het tweemaal zoo snelle normale. De vraag rijst nu, waarom de kamer niet spontaan overgaat naar het normale rhythme. Uit het feit, dat we het gehalveerde rhythme kunnen overzetten in het normale, blijkt toch wel, dat de metabole toestand van de kamerspier een zoodanige is, dat de kamer tweemaal zoo frequent kan kloppen. Toch blijft de kamer in het gehalveerde rhythme pulseeren, als we tenminste niet met een prikkel op het juiste moment tusschenbeide komen. We moeten de oorzaak hiervan zoeken in de grootte en den langen duur van de kamersystolen van het gehalveerde rhythme. Elke tweede sinusimpuls stuit af op dit langdurende refractaire stadium, de kamer zit dus gevangen in het gehalveerde rhythme en kan daar eerst uitkomen, wanneer tengevolge van een extraprikkel direct of indirect een kleine kamersystole wordt te voorschijn geroepen.

Wanneer echter de kamer eenigen tijd in het gehalveerde rhythme gepulseerd heeft, ontdoet de kamer zich onder den invloed der vele langdurende kamerpauzen meer en meer van het residu refractaire

stadium, zoodat tenslotte toch de duur van het totale refractaire stadium afneemt. Zoo kan tenslotte toch het normale kamerrhythme spontaan terugkeeren. Een voorbeeld van zulk een spontane rhythmewisseling vinden we in fig. 3. De curven van deze figuur werden

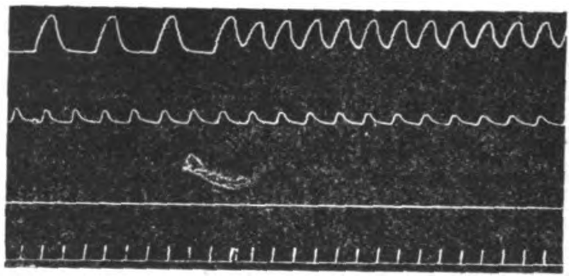


Fig. 3.

ontleend aan hetzelfde kikkerhart, waarvan ook de curven van fig. 2 afkomstig zijn.

Wanneer we nu nogmaals de kamercurven van fig. 5 der vorige en van fig. 1, 2 en 3 van deze mededeeling nader bezien, dan valt het volgende op.

Zoodra het normale kamerrhythme is overgezet in het gehalveerde, neemt de grootte en de duur der kamersystole toe. Deze toename schrijdt daarna voort van systole tot systole, zoodat de 10de systole van het gehalveerde rhythme veel grooter is dan de 5de en deze op haar beurt weer grooter dan de eerste. Deze toename van de grootte der kamersystole komt tot stand door een toename van de maximale diastole en tevens door een toename van de maximale systole. We zien dus, dat de kamerspier zich gedurende het gehalveerde rhythme restaureert en dat deze restauratie onder den invloed van meerdere lange kamerpauzen voortschrijdt. Het omgekeerde zien we na de overzetting van het gehalveerde kamerrhythme naar het normale.

De kamer is dan tengevolge van het voorafgaande gehalveerde rhythme in goede conditie. Direct na de overzetting naar het normale rhythme is de grootte der kamersystolen afgenomen. Doch onder den invloed der telkens terugkeerende korte kamerpauzen neemt de grootte der kamersystolen meer en meer af. Deze afname betreft zoowel de maximale diastole als de maximale systole. Als tusschenvorm tusschen het normale kamerrhythme en het gehalveerde rhythme van de kamer kennen we kameralternans. Zoo kunnen we ook het normale kamerrhythme overzetten in alternans en deze weer in het gehalveerde rhythme. Dit moge uit de beide volgende figuren blijken,

die aan hetzelfde ontbloede kikkerhart ontleend zijn. De curven van fig. 4 werden 5 minuten na de ontbloeding geregistreerd. De kamer pulseerde toen in het normale rhythme; bij den eersten uitslag van het signaal ontvingen de boezems een inductieprikkel, waardoor een extrasystole dezer hartafdeelingen ontstond, die gevolgd werd

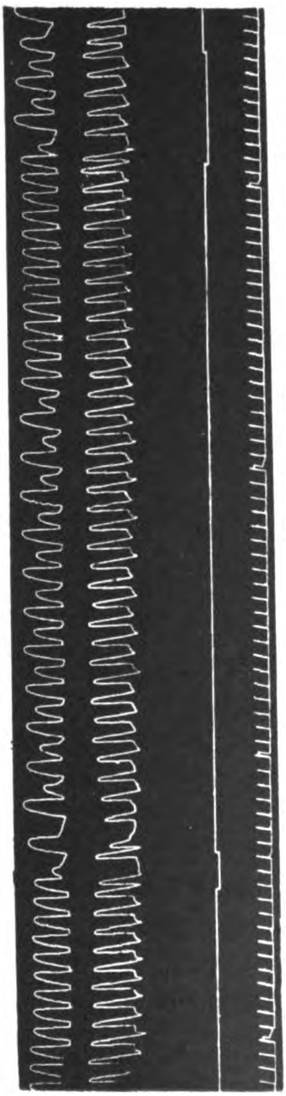


Fig. 4.

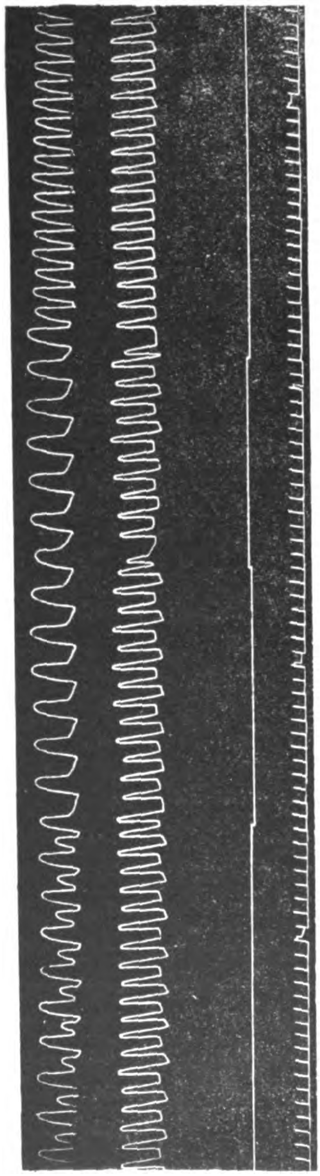


Fig. 5.

door een kleine systole van de kamer. Bij den tweeden uitslag van het signaal werd opnieuw een extrasystole der boezems opgewekt in den aanvang der postcompensatoire systole. Daarna bereikt de „Erregung" de kamer nog gedurende het refractaire stadium, zoodat een extrapauze van de kamer ontstond. Daarna is de eerste kamer-

systole sterk vergroot. Deze vergroote kamersystole leidt nu een alternans van de kamer in. (Zooals in de vorige experimenten door een vergroote systole het gehalveerde rhythme ontstond). Na eenigen tijd gaat deze alternans spontaan over in het normale kamerrhythme met even-groote systolen. Bij den derden uitslag van het signaal wordt weer een extrasystole der boezems opgewekt, gevolgd door een kleine kamersystole. Na de vergroote postcompensatoire systole ontstaat dan weer kameralternans.

De curven van fig. 5 werden ongeveer 1 minuut na die van fig. 4 geregistreerd. Korten tijd tevoren was experimenteel kameralternans opgewekt, die in den aanvang van de figuur nog bestaat.

Bij den eersten uitslag van het signaal worden in den aanvang van een groote kamersystole de boezems door een inductieprikkel tot een extrasystole aangezet. Na deze extrasystole bereikt de „Erregung" de kamer gedurende het refractaire stadium, zoodat geen kamersystole volgt, doch wel een extrapauze van de kamer. Na deze extrapauze is de eerste kamersystole weer vergroot, zoodat de eerstvolgende sinusimpuls de kamer weer gedurende het refractaire stadium bereikt. Tengevolge hiervan is de eerstvolgende pauze van de kamer weer verlengd met al de gevolgen van dien. Zoo wordt kunstmatig het gehalveerde kamerrhythme te voorschijn geroepen.

Bij den tweeden uitslag van het signaal wordt in den aanvang van een kamersystole weer een extrasystole der boezems opgewekt. Daar hierna de „Erregung" de kamer gedurende het refractaire stadium bereikt, blijft natuurlijk het gehalveerde kamerrhythme bestaan.

Bij den derden uitslag van het signaal echter wordt na afloop van een kamersystole een extrasystole der boezems opgewekt. Hierna nu bereikt de „Erregung" de kamer tegen het einde der pauze, zoodat een vervroegde kamersystole volgt. Daar nu deze kamersystole vervroegd te voorschijn komt, bereikt de eerstvolgende sinusimpuls de kamer na afloop van het refractair stadium, zoodat een kleine systole van de kamer kan volgen. Deze systole is klein wegens den korten duur der voorafgaande pauze en veroorzaakt dus een kort refractair stadium. Daarom wordt ook de volgende sinusimpuls weer beantwoord met een systole van de kamer en ook deze is weer klein. Zoo wordt het normale kamerrhythme hersteld.

We hebben hiervoor derhalve eenige voorbeelden weergegeven van rhythmeoverzettingen bij het ontbloede kikkerhart. We konden naar willekeur de kamer een bepaald rhythme opdringen door *één* kamersystole van bepaalde grootte en duur te voorschijn te roepen.

Physiologie. — De Heer VAN RIJNBERK biedt een mededeeling aan van Mej. LUCIE W. SCHUT: „*Eenige factoren, welke van beteekenis zijn voor de gewoontevorming bij vogels. I. Gezichtsprikkels*”.[1])

(**Mede aangeboden door den Heer WIERSMA**).

Inleiding.

BUIJTENDIJK heeft in 1918[2]) proeven beschreven over gewoontevorming bij vogels. Hij vond, dat een sijs zeer snel leert voedsel te zoeken in een etensbakje, waarin het voedsel door een klepje aan het gezicht onttrokken is. Wanneer dit bakje staat tusschen andere geheel gelijke, doch leege, leert de vogel eveneens aan, het voedsel uitsluitend in het gevulde bakje te zoeken, mits dit een vaste plaats tusschen de andere inneemt. De op dusdanige wijze gevormde gewoonte blijkt zelfs na een verblijf van maanden in een andere omgeving, weer tot zijn recht te komen, wanneer men het dier opnieuw voor de zelfde bakjes plaatst.

Controle en bevestiging van BUIJTENDIJK's *uitkomsten.*

Ik heb de proeven van BUIJTENDIJK herhaald en volkomen kunnen bevestigen. Als proefdieren dienden mij de sijs (Fringilla spinus, 3 exemplaren), de putter (Fringilla carduelis, 2 ex.), de Paradijsweduwe (Steganura paradisea, 2 ex.) en de Napoleonwever (Pyromelana afra, 2 ex.). Het is verrassend te noemen, hoe snel al deze dieren, maar vooral de sijzen, leerden met den kop het klepje, dat de opening van de voerbakjes afsluit, weg te duwen. Dit ging bij de sijzen binnen het kwartier, in een enkele zitting. Bij de andere duurde het iets langer, en moest de proef een paar dagen achtereen herhaald worden. Had ik verder, zooals regel was, van den beginne af, slechts één bepaald bakje uit de rij van vier gelijke bakjes met voedsel gevuld, dan bleken de dieren eveneens zeer snel te leeren,

---

[1]) Naar een in het physiologisch laboratorium der Universiteit van Amsterdam verricht onderzoek.

[2]) F. J. J. BUIJTENDIJK. Proeven over gewoontevorming bij dieren. Amsterdam. 1918.

slechts in dat eene bakje het voedsel te zoeken, en tilden zij de klepjes der andere bakjes zelden op. BUIJTENDIJK meent, dat de (vaste) plaats, welke het voerbakje inneemt te midden der andere, hierbij den doorslag geeft. Ik kan dit in hoofdzaak bevestigen. In een groote reeks proeven, met een sijs genomen, streefde ik er naar, alle andere kenmerken, welke het dier bij de keuze van het bakje konden leiden, weg te nemen. Ik bedekte daartoe de voorzijde der bakjes, en den bodem der kooi vóór de bakjes met kartonnen strooken, welke telkens vervangen werden. Schillen van gegeten zaadjes werden telkens nauwkeurig weggeveegd, de klepjes der bakjes, welke door het duwen met den snavel krassen konden krijgen, werden telkens door nieuwe vervangen. Niettegenstaande dit alles bleef de vogel, na eenmaal geleerd te hebben in een bepaald bakje zijn voedsel te vinden, bijna uitsluitend uit dat bepaalde bakje eten, en tilde hij zelden bij vergissing, een ander klepje op. Een geheel afdoende proef in verband met de onderstelling, dat de vogels door andere kenteekenen dan de vaste plaats van het voerbakje geleid worden, is de volgende. Toen de sijs goed geleerd had, het voedsel in een bepaald bakje te vinden, nam ik een tweede kooi, geheel aan die gelijk, waarin de proeven uitgevoerd werden. Deze kooi was geheel nieuw, en de sijs was er nooit in geweest. Daaraan liet ik vier nieuwe eetbakjes aanbrengen, geheel gelijk aan de vier, welke tot op dat oogenblik voor de proeven gediend hadden. De sijs had nooit uit deze bakjes gegeten. Er was ook nooit zaad in die bakjes geweest. Ik deed de sijs nu op verschillende dagen, telkens voor korten tijd, van kooi 1 in kooi 2 over. Er was in geen der bakjes zaad gedaan, om te vermijden, dat het dier het voedsel achter de gesloten klepjes soms ruiken kon. Het bleek nu, dat de vogel in deze nieuwe kooi in den beginne wat van streek was, rondvloog, en vaak in de nabijheid der etensbakjes kwam zonder echter een klepje op te tillen. Toen het wat gewend was bleek het, dat het dier, hoewel het duidelijk meer fouten maakte in de nieuwe kooi dan in de gewone leerkooi, toch soms dadelijk nadat het uit kooi 1 in kooi 2 kwam, naar de etensbakjes toe vloog en het goede klepje optilde.

Uit deze reeks proeven meende ik te mogen besluiten, dat de plaats, welke het voerbakje inneemt inderdaad van zeer groote beteekenis is bij de gewoontevorming, Toch had ik tevens den indruk gekregen, dat ook andere waarnemingen daar een rol bij spelen. Daarom besloot ik na te gaan, in hoeverre het mogelijk was, den vogels een gewoonte bij te brengen, door middel van een anderen waarnemingsfactor.

Andere factoren welke een gewoonte kunnen doen vormen.

Bij de reeks proeven, welke ik thans hier wil mededeelen, heb ik getracht den factor *plaats* geheel uit te schakelen. Dit geschiedde, door telkens een ander bakje met zaad te vullen en dus te beletten, dat de vogel (ik gebruikte hiervoor uitsluitend sijzen) aan een vaste plaats van het voerbakje went. Ik gaf nu echter het voerbakje te midden der overige bakjes een of ander zichtbaar kenmerk, dat het van de leege bakjes onderscheidde.

1. Om te beginnen beplakte ik het klepje van het voerbakje met zwart papier, terwijl de overige van glanzend blik waren. Het gelukte in enkele minuten den vogel te leeren, dat het zaad zich achter het zwarte klepje bevond. En in verrassend korten tijd verleert een vogel, die eerst op het plaatselijke kenmerk gedresseerd was, het zaadbakje op een bepaalde plaats te zoeken, en leert hij het zaad vinden achter het zwarte klepje. Door dit telkens vóór een ander bakje te hangen bereikt men, dat de vogel letterlijk dit zwarte klepje achterna vliegt, en uitsluitend of bijna uitsluitend dit klepje optilt om voedsel te zoeken. [1])

2. In een tweede reeks proeven werd het klepje van het voerbakje door een blaauw papiertje beplakt. De klepjes der overige leege bakjes werden eveneens met blaauw papier beplakt, echter met blaauw van een andere helderheid. Het bleek ook nu weer, dat in betrekkelijk korten tijd de vogel aanleerde, het voedsel te zoeken achter het klepje, dat door blauw van een bepaalde helderheid van de overige klepjes onderscheiden was. Dit onderscheid kon zeer gering zijn: in een rij proeven gebruikte ik voor de leege bakjes blaauw N°. 1186 van de bekende gekleurde papieren van BAUMANN, en voor „eetkleur" blaauw N°. 1187. [2]) Deze zijn voor den mensch nog net even te onderscheiden. (1187 is even waarneembaar donkerder).

3. Nog een controlereeks werd genomen met groene papiertjes van verschillende helderheid. Het scheen, dat de sys groen N°. 985, als „eetkleur" uit BAUMANN's reeks van groen N°. 984 nog wel onderscheidde.

---

[1]) De vogel heeft inderdaad het eerst geleerde plaatskenmerk volstrekt niet vergeten. Hierover zal ik in de uitvoerige mededeeling, welke later verschijnen zal, nader berichten. Overigens werden, om den reuk uit te schakelen, ook vaak blanco-proeven genomen, dus met leege bakjes.

[2]) Zooals men weet, zien vogels volgens HESS spectrale kleuren niet verder dan tot aan de grens tusschen groen en blauw. Het waargenomen onderscheid moet dus op een helderheidsonderscheid berust hebben.

4. In een volgende reeks proeven koos ik een uiterst klein kenteeken ter onderscheiding van het voerbakje. De klepjes van alle vier de bakjes werden met wit papier beplakt, doch op het klepje van het voerbakje werd een klein rond zwart papiertje in het midden ervan gekleefd. Het gelukte ook nu betrekkelijk gemakkelijk, door telkens het klepje met het „eetteeken" voor een ander bakje te hangen, den sys te leeren, het voedsel uitsluitend te zoeken achter het klepje met het zwarte schijfje.

5. Aangemoedigd door de uitkomst van de tot hiertoe beschreven proevenreeksen, besloot ik het onderzoek, door te trachten een nog subtieler onderscheidskenmerk aan te wenden. Daartoe werden eveneens witte klepjes gebruikt. De leege bakjes droegen hierop een zwart vierkantje, het eetbakje een zwart rondje, van ongeveer gelijk oppervlak. De uitkomst van deze reeks was niet duidelijk overtuigend. Toch kreeg ik den indruk, dat wanneer de sys het met het rondje voorziene bakje koos dit niet alleen door toeval kon verklaard worden.

SAMENVATTING.

1. De uitkomst van mijn proeven bevestigd BUYTENDIJK's uitkomst, dat de plaats, welke een eetbakje te midden van andere (leege) inneemt, bij vogels van groote beteekenis is voor het vormen van de gewoonte, uit dat bakje te eten;

2. Daarnaast zijn echter talrijke andere visueele factoren, welke deze gewoonte kunnen doen vormen.

Dierkunde. — De Heer J. BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer GUSTAV STIASNY: „*Ueber westindische Tornarien nebst einer Uebersicht über die bisher bekannten tentaculaten Tornarien*". (Mit 2 Tafeln und 3 Textfiguren).

(Mede aangeboden door den Heer MAX WEBER).

1. Das Material.

In einigen schönen Planktonproben, welche von Prof. Dr. BOEKE 1905 in *Holländisch Westindien* gesammelt und die mir von Prof. Dr. MAX WEBER zum Studium überlassen wurden, fanden sich zahlreiche Entwicklungsstadien von Enteropneusten, die in der vorliegenden Mitteilung näher besprochen werden sollen. Es handelt sich dabei nicht um neue bisher unbekannte Tornarien, sondern die in den Proben enthaltenen Enteropneustenlarven konnten mit ziemlicher Sicherheit mit Tornarien identificiert werden, die bereits in den Gewässern der Bahamas Inseln gefunden worden sind. *Aus Holländisch Westindien waren bisher Enteropneustenlarven nicht bekannt.* Die untersuchten Tornarien gehören zweierlei Species an und konnten in verschiedenen Entwicklungsstadien beobachtet werden, die zum Teil noch nicht oder nicht genau bekannt sind. So war es möglich, die Angaben in der Literatur über die Entwicklung dieser beiden Formen in mancher Hinsicht zu ergänzen. Die Etiquetten der Planktonproben tragen folgende Aufschriften:

1. Plankton 1905, Saba, West-Indië, Gough Bay, Dr. BOEKE, waarn. 37.
2. Plankton, West-Indie, 1905, Dr. BOEKE, Cove Bay, waarn. 36.
3. Plankton, 25/VII. 1905, Saba, West-Indië, Dr. BOEKE, waarn. 32.
4. Plankton, Aruba, West-Indië, Pays bank, Aug. 1905, Dr. BOEKE 0—30 vaam.

Insgesammt fanden sich über 300 Exemplare von Tornarien, darunter eine kleine, nur in wenigen Exemplaren vorhandene, und eine grosse häufige Form. Die kleinere ist identisch mit der sogenannten *Bimini-Tornaria*, die grössere mit der sogenannten *Bahamas-Tornaria* Morgans.

II. *Die westindischen Tornarien.*

a. *Die Bimini Tornaria* (*Tornaria Weldoni*).

(Tafel I).

Ueber die „Bimini Tornaria", welche ich zu Ehren ihres ersten Auffinders *Tornaria Weldoni* benenne, liegen Angaben von WELDON (1) und MORGAN (4) vor. WELDON und nach ihm MORGAN fanden diese kleine Form gemeinsam mit der grossen *Bahamas Tornaria* auf North Bimini Island, auf dem Westrande der grossen Bahamas Bank, gegenüber dem Südende von Florida. Da sie nunmehr auch bei Saba und Aruba nachgewiesen ist, dürfte sie wohl im ganzen westindischen Archipel einheimisch sein, doch ist sie ziemlich selten. WELDON beschreibt (l.c.) einige vorgeschrittene Entwicklungsstadien, die zum Teil bereits der Metamorphose angehören oder ihr unmittelbar vorausgehen, Stadien, die etwa der fig. 6 auf Taf I. entsprechen und z. T. bereits die für das erwachsene Tier so charakteristische Dreiteilung des Körpers in Rüssel-, Kragen- und Rumpfregion aufweisen. Da WELDON sich lediglich auf Abbildung und Beschreibung einiger Schnittpraeparate beschränkt und den äusseren Habitus seiner Form nur mit wenigen Worten andeutet, lässt sich nicht mit Sicherheit, wohl aber mit grosser Wahrscheinlichkeit, behaupten, dass die von ihm beschriebenen Entwicklungsstadien zur *Bimini-Tornaria* MORGAN's gehören. Er spricht nämlich von einer grossen und kleinen Form, die von MORGAN später an derselben Lokalität wiedergefunden und von diesem Forscher mit den Namen *Bahamas-* und *Bimini Tornaria* bezeichnet wurden. Auch in meinen Planktonproben kamen die beiden Larven nebeneinander vor.

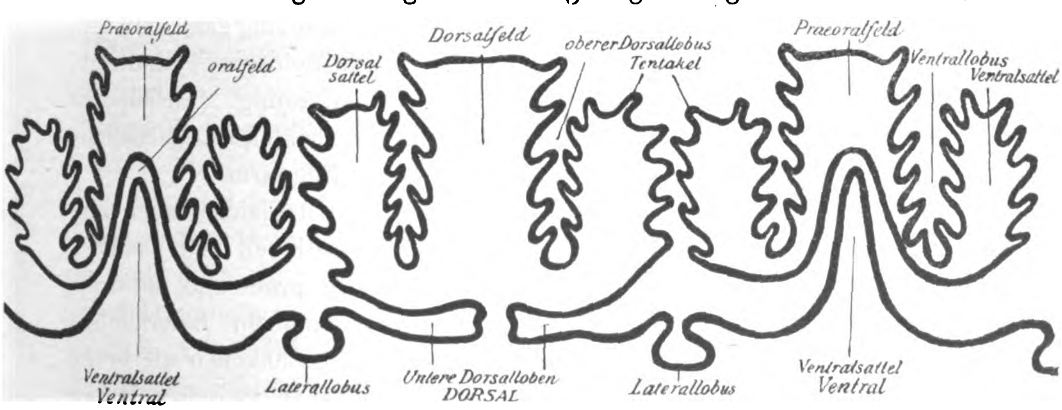
MORGAN hat einige Jahre später (4) ein jüngeres Entwicklungsstadium derselben kleinen Form genauer untersucht. Er bildet auf Taf. I. fig. 12 (4) ein Stadium ab, das etwa der *Tornaria Krohnii* des *Balanoglossus clavigerus* aus dem Mittelmeer entspricht und gibt die Unterschiede desselben gegenüber der *Bahamas Tornaria* an, so dass die Wiedererkennung dieser Species in den Planktonproben möglich war.

Nach MORGAN sind für die Bimini Tornaria charakteristisch: 1. geringere Grösse, 2. ein kleiner Unterschied im Verlaufe des longitudinalen Wimperbandes, 3. Bau und Zahl der Tentakel, 4. Bau der Apicalplatte, 5. die dem Darm anliegenden Coelome. Vergleiche darüber die Ausführungen auf S. 28/29, sowie die Synopsis auf S. 31

Während MORGAN nur ein einziges Exemplar zur Verfügung stand, bilden die von Prof. BOEKE gesammelten Exemplare eine Serie verschiedener Entwicklungsstadien, einen Ausschnitt aus der Entwicklung

eines noch nicht festgestellten Enteropneusten. Das in Fig. 4 auf Taf. I dargestellte Stadium stellt den Höhepunkt larvaler Entwicklung dar, indem es alle typischen Larvencharaktere in voller Entfaltung zeigt. Es entspricht etwa einem älteren *Tornaria Krohnii* Stadium des *Balanoglossus clavigerus* aus dem Mittelmeere und ist etwa gleich alt mit dem von Morgan abgebildeten Stadium (Taf. I. fig. 12, 4). Dieses und die in Fig. 1—3, Taf. 1, dargestellten jüngeren Stadien gehören jener Periode der Larvenentwicklung an, die ich in meinen Arbeiten (13, 14, 15) als Periode der progressiven Entwicklung bezeichnet habe, während Stadium 5 bereits der regressiven Entwicklung, das Stadium 6 der Metamorphose angehört. In den erwähnten Arbeiten habe ich ausgeführt, dass die erstere Periode charakterisiert ist, durch continuirliche Zunahme der Körpergrösse und des Blastocoels, durch Reduction des specifischen Gewichtes, Durchsichtigkeit und fortschreitende Ausbildung des Wimperkranzes, Coeloms und Herzblase; die 2. Periode, in welcher keinerlei neue Organe angelegt werden, gekennzeichnet durch Grössenabnahme, zunehmende Undurchsichtigkeit, Reduction des Blastocoels, Zunahme des specifischen Gewichtes bis zur Aufgabe der pelagischen Lebensweise, und zum Eintritt der Metamorphose.

In der unter (15) erwähnten Arbeit habe ich in Textfig. C. auf Seite 263 ein Schema des Verlaufes des longitudinalen Wimperkranzes für die *Tornaria Krohnii* aus dem Mittelmeer gegeben. Ich gebe in Textfigur 1 ein gleiches Schema des entsprechenden Stadiums der Bimini-Tornaria. Ein Vergleich der beiden Schemata, so wie mit dem in Textfig. 2 dargestellten zeigt augenfällig die Unterschiede.



Textfigur 1. Schematische Darstellung des Verlaufes des longitudinalen Wimperbandes der ausgebildeten *Tornaria Weldoni*.

An Hand dieses Schemas lässt sich mit Hilfe der Spengel'schen Nomenclatur (3) der Verlauf der longitudinalen Wimperschnur der *Tornaria Weldoni* (Bimini Tornaria) kurz charakterisieren:

1. Prae- und Postoralfeld ziemlich breit, breiter als die Sättel. Loben verhältnismässig schmal.

2. 4—6 Tentakel (tentakelartig ausgebildete „secundäre Loben" an jedem der oberen Dorsalloben, so bezeichnet nach dem Vorgange SPENGELS bei *Tornaria Grenacheri* (3); eigentlich sind es die Dorsalsättel, welche die Tentakel tragen. Vergl. darüber meine Ausführungen auf p. 15/16). Die Tentakel sind kurz und breit, mehr stummelförmig,

3. Oralfeld schmal, stark gekrümmt, Ventralsattel hoch.

4. Untere Dorsalloben sehr lang und schmal, mit fast parallel verlaufenden Wimperschnüren, die dorsal fast zusammenstossen, ohne Tentakel.

5. Lateralloben tief, mit schmaler Oeffnung, ohne Tentakel.

6. An der Scheitelplatte legen sich prae- und postorale Wimperkränze parallel aneinander und verschmelzen.

Von den übrigen Merkmalen sei hier noch hervorgehoben, dass das Analfeld stark vorgewölbt, der circuläre primäre Wimperkranz kräftig entwickelt, der secundäre Wimperkranz rings um den Anus schwach ausgebildet ist und dass die Coelome dem Darm anliegen. Betrachten wir nun die einzelnen Entwicklungsstadien etwas genauer.

Tafel I, Fig. 1. Dorsalansicht eines Stadiums der progressiven Entwicklung (etwa einem etwas vorgeschrittenen *Tornaria Mülleri*-Stadium (13, 14, 15) vergleichbar). Dorsalfeld breit, Dorsalloben mit je 3 breiten tentakelartigen secundären Loben, weitere in Ausbildung begriffen; untere Dorsalloben sehr lang und schmal. Links oberhalb des primären circulären Wimperkranzes der eine Laterallobus (der andere ist verdeckt), secundärer circulärer Wimperring ganz schwach. Analfeld mässig vorgewölbt. Im Innern: Mitteldarm cylindrisch, Enddarm kurz, kegelförmig. Eichelcoelom geräumig. (Eichelporus und Herzblase nicht beobachtet). Das eine der beiden Rumpfcoelome als rundliches Bläschen zwischen Mittel- und Enddarm.

Fig. 2. Ansicht schräg von oben eines etwa gleichaltrigen Stadiums mit 3 kurzen Tentakeln an den Dorsalloben und weiteren in Ausbildung begriffenen. Am Apex legen sich prae- und postorale Wimperkränze parallel an einander und verschmelzen. Lateralloben tief, Ventralband breit. Im Innern: Ein Coelomsäckchen als breite Platte dem Mitteldarm anliegend, an der Grenze zwischen Mittel- und Enddarm.

Fig. 3. Oralansicht eines etwas älteren Stadiums, das noch der progressiven Entwicklung angehört. Etwas grösser als das vorhergehende. Der longitudinale Wimperkranz wieder etwas complicierter, mit 4 Tentakeln an den Dorsalloben. Sehr deutlich das schmale

hufeisenförmige Oralfeld mit der trichterförmigen Mundöffnung und der hohe schlanke Ventralsattel zu sehen. Ventralband breit mit beiderseitigen tiefen Lateralloben. Im Innern: der 3 teilige Darm. Dem Mitteldarm liegt das plattenförmige Rumpfcoelom [1]) an, das denselben zu umwachsen beginnt. Unterhalb der Apicalplatte der glashelle Strang, an dem das Eichelcoelom befestigt ist.

Fig. 4. stellt die typische Tornaria Weldoni in ihrer vollen Entwicklung dar, mit allen Larvencharakteren ausgestattet, den Höhepunkt der Larvenentwicklung. (Dorsalansicht). Die Larve hat das Maximum der Körpergrösse, ca $2^1/_2$ m.m., erreicht. Der Verlauf des longitudinalen Wimperkranzes hat durch Ausbildung von 6 Tentakeln an jedem Dorsallobus, sowie durch die tiefen Lateralloben den höchsten Grad von Compliciertheit erlangt. Untere Dorsalloben sehr lang und schmal. Scheitelplatte entsteht durch Verschmelzung der sich parallel aneinanderlegenden prae- und postoralen Wimperkränze. Circulärer Wimperkranz breit und kräftig, secundärer Wimperkring ganz fein und schmal.

Im Innern: Zu beiden Seiten des Mitteldarmes 2 Paare von Coelomsäckchen als längliche oder rundliche Bläschen, dem Darm angelagert. Die mehr dem Enddarm zu gelegenen die Rumpfcoelome, die gegen die Scheitelplatte zu liegenden (in der Abbildung von den Tentakeln etwas verdeckt) die Kragencoelome. Das Eichelcoelom als langer schmaler kegelförmiger Sack, dem Mitteldarm aufliegend mündet durch den Eichelporus in der Mitte des Dorsalfeldes nach aussen. Durch einen ziemlich dicken Strang mit dem Apex verbunden. Herzblase nicht beobachtet.

Dieses Stadium entspricht dem von MORGAN in seiner Figur 12 dargestellten, das eine Seitenansicht darstellt. Es ist das *„Tornaria Krohnii-Stadium"* der *Tornaria Weldoni.*

Fig 5. stellt ein Stadium dar, das bereits der regressiven Entwicklung angehört. Es ist gekennzeichnet durch geringere Körpergrösse gedrungenere Gestalt, geringere Durchsichtigkeit, Rückbildung der tentakelartigen Bildungen. Es sind deren jetzt nur mehr drei an jedem Dorsallobus vorhanden. Dieses Stadium ist dunkler, undurchsichtiger als das sonst ähnliche in fig. 1 abgebildete Stadium der progressiven Entwicklung, zeigt jedoch das Analfeld stärker vorgewölbt, kegelförmig ausgebildet, die Lateralloben sind nicht mehr so tief, der circuläre Wimperring ist breiter, der secundäre circuläre Wimperring ist geschwunden. Im Innern das mächtig entwickelte Eichelcoelom, das dem Darm aufgelagert ist und rechts ausmündet.

---

[1]) Nach SPENGEL vielleicht richtiger als „Kragen-Rumpfcoelom" zu bezeichnen.

Die Coelome konnten an diesen undurchsichtigen Entwicklungsstadien nicht mit Sicherheit beobachtet werden.

Fig. 6 zeigt ein Stadium nach der Metamorphose. Es ist noch viel kleiner als das vorige, misst circa $1^1/_2$ mm. und ist fast undurchsichtig. Der Körper zerfällt bereits in die 3 für das erwachsene Tier so charakteristischen Teile: Rüssel-, Kragen, Rumpfregion. Der keulenförmige Rüssel ist durch eine tiefe Ringfurche von der Kragenregion abgesetzt.

Die Kragenregion ist sehr breit und trägt in ihrer Mitte den in Rückbildung begriffenen circulären Wimperkranz. Das Analfeld ist wie im vorhergehenden Stadium kegelförmig vorgewölbt.

Der Tentakelapparat des longitudinalen Wimperkranzes, die Lateralloben etc. ist bereits ganz geschwunden.

Im Inneren kann man, wenn man das Objekt zwischen Deckglas und Objektträger mit der Nadel etwas quetscht, im Rüssel das riesig grosse Eichelcoelom sehen, das fast den ganzen Innerraum des Rüssels ausfüllt. Auch die Contour des Mittel- und Enddarms tritt noch einigermassen hervor.

Da mir nur wenige in Formol conservierte Exemplare zur Verfügung standen und es unter den gegenwärtigen Verhältnissen mir nicht möglich ist, Schnittpraeparate anzufertigen, waren der Untersuchung von vorneherein enge Grenzen gezogen. So musste auf die Feststellung der Art und Weise der Entstehung des Coeloms, des Herzens etc. verzichtet werden, auch wurde in die Abbildungen nur das eingezeichnet, was tatsächlich beobachtet werden konnte, ohne Ergänzungen nach Schnittpraeparaten und ohne zu schematisieren.

Auch die vorliegenden Stadien stellen keine geschlossene Reihe von Entwicklungsstadien dar. So fehlt das wichtige „eingekerbte Stadium", das ich bei *Balanoglossus clavigerus* beschrieben habe, und das seinen Platz zwischen dem in fig. 5 und 6 abgebildeten Stadien finden müsste (14,15).

Da aber von dieser Form mit Sicherheit nur das einzige von Morgan abgebildete und geschilderte Stadium bekannt ist, glaube ich doch, dass diese kurzen Angaben einen kleinen Fortschritt in der Kenntnis der Entwicklung dieser Form bedeuten.

Zum Schlusse ergibt sich natürlich die Frage, zu welchem adulten Tiere die *Tornaria Weldoni* gehört. Weldon und Morgan konnten natürlich nichts sicheres darüber aussagen. Auch zur Zeit ist dies noch nicht möglich, aber eine Vermutung lässt sich doch äussern.

SPENGEL (3) hat auf Grund von Material, das er von WELDON von den Bahamas erhielt, einen Enteropneusten beschrieben, den er *Ptychodera* (*Chlamydothorax*) *bahamensis* nannte. Es ist dies eine auffallend kleine Form von ca $7^1/_2$ cm Länge, von der gleichen Lokalität stammend wie die *Bimini Tornaria,* die ja auch sehr klein ist. Ich halte es daher für nicht ausgeschlossen, dass *Ptychodera bahamensis* SPENGEL die adulte Form der *Tornaria Weldoni* darstellt. Mit Sicherheit wird sich dies natürlich erst dann feststellen lassen, wenn aus den Eiern von *Ptychodera bahamensis die Tornaria Weldoni* gezüchtet worden.

b. Die Bahamas Tornaria (*Tornaria Morgani*).
(Tafel II).

WELDON (1) fand vorgeschrittene Entwicklungstadien einer grossen tentaculaten Tornaria bei Nassau, New Providence, Bahamas Bank, über welche er nur einige ganz beiläufige Bemerkungen macht. MORGAN (2) beschrieb einige Jahre später unter der Bezeichnung „*Nassau Tornaria*" Entwicklungsstadien einer von der gleichen Lokalität stammenden, mit derjenigen WELDONS offenbar identischen Tornaria mit langen Tentakeln, von der er Detailschilderungen des Verlaufs des dorsalen Wimperbandes, des Tentakelapparates und der Scheitelplatte gibt (2, Taf XXIV, fig. 10—12). Die Coelome wurden dabei nicht beobachtet. Die wichtigsten Angaben über die „*Bahamas Tornaria*" sind in seiner grossen Arbeit (4) enthalten, in welcher er einen grossen Teil der Entwicklung und Metamorphose derselben tentaculaten Tornaria bis zur Umwandlung in das benthonische Tier beschreibt. Das Material für seine Untersuchung fand MORGAN in den Gewässern von Bimini-Island, Bahamas Bank (s. o. p. 2) zugleich mit der kleinen *Tornaria Weldoni.* Seine Beschreibung passt so genau auf die mir vorliegenden grossen Tornarien von Aruba und Saba, dass an der Identität beider Formen, trotz geringer Abweichungen, kein Zweifel sein kann. Es ist also wohl auch anzunehmen, dass diese von mir als „*Tornaria Morgani*" bezeichnete Tornaria im ganzen westindischen Archipel verbreitet ist. Die Angaben MORGANS finden bei der Besprechung der einzelnen Organsysteme ihre gebührende Berücksichtigung.

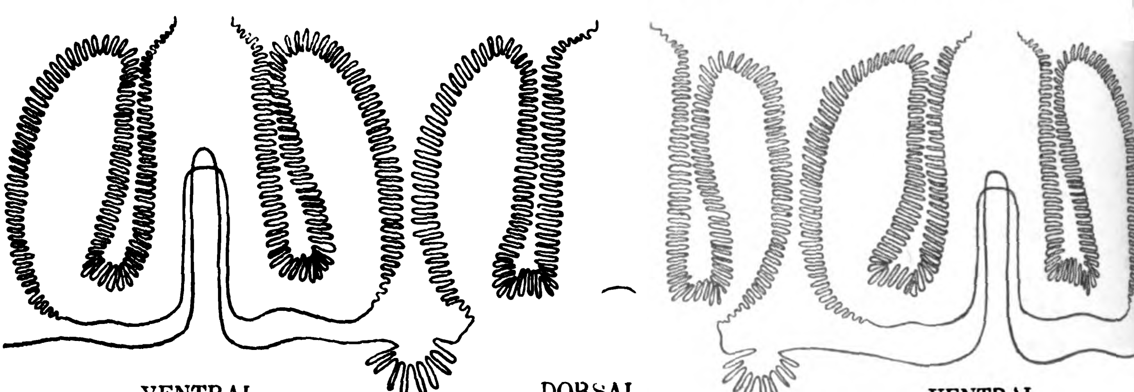
Wie von der *Tornaria Weldoni* liegt auch von der *Tornaria Morgani,* der grossen Bahamas Tornaria, eine Reihe von Entwicklungsstadien vor, die einen Ausschnitt aus der Entwicklung darstellen, umfassend die *T. Morgani* in ihrer höchsten Entwicklung (etwa dem *Tornaria Krohnii*-Stadium entsprechend) bis zum sogenannten „eingekerbten" Stadium. Die Serie umfasst gerade jene Stadien, die

zwischen den MORGAN'schen Stadien III und IV liegen (Taf. I, fig. 3 u. 4, 4) und von dem genannten Forscher nur ganz nebenbei beschrieben wurden, so dass sie eine Ergänzung zu denselben darstellt.

Infolge der Grössenabnahme, zunehmender Undurchsichtigkeit, Schwindens der Tentakel, und immer stärkerer Ausbildung der Coelome gehören die meisten Stadien mit Ausnahme des 1. Stadiums (Taf. II, fig. 7, 8), das den Höhepunkt der pelagischen Entwicklung und die typisch ausgebildete *Tornaria Morgani* mit allen Larvencharakteren zeigt, jener Periode der Entwicklung an, die ich in meinen Studien über die Entwicklung des *Balanoglossus clavigerus* (14, 15), vom morphologischen Standpunkte aus als „*regressiv*" bezeichnet habe.

Bevor ich auf die Besprechung der einzelnen Stadien näher eingehe, sei bemerkt, dass das mir vorliegende Material in Formol conserviert, daher — bei meist vortrefflicher Erhaltung — doch mehr oder minder deformiert war. Daher die etwas unregelmässige Form der Kragenregion in fig. 7 u. 8. auf Taf. II. Es wurde dabei, wie bei den übrigen Figuren, auf naturgetreue Darstellung Wert gelegt und möglichst jener von SPENGEL (9, p. 123) beobachtete Vorgang der Schematisierung vermieden. Auch wurde in die Figuren nur das eingezeichnet, was tatsächlich gesehen wurde.

Tafel II, Fig. 7 und 8. stellen die *Tornaria Morgani* in typischer Ausbildung dar. An Hand des in Textfig. 2 dargestellten



Textfigur 2. Schematische Darstellung des Verlaufes des longitudinalen Wimperbandes der ausgebildeten *Tornaria Morgani*.

Schemas lässt sich der Verlauf des longitudinalen Wimperbandes mit seinen specifischen Eigentümlichkeiten gut erkennen:

1. Dorsale und ventrale obere Loben mit 20—25 Tentakeln besetzt[1]).
2. Ventralsattel hoch und schmal.

[1]) In dem obigen Schema wurden versehentlich zuviele Tentakel eingezeichnet.

3. Die postorale (ventrale) Wimperschnur geht beim Oesophagen apicalwärts über die praeorale (dorsale) hinaus, überschreitet also die Mittellinie in einem höheren Niveau als die erstere.

4. Kein unterer Dorsallobus vorhanden, daher das Dorsalfeld sehr breit.

5. Laterallobus mit circa 5—10 Tentakeln besetzt.

Wendet man dieses Schema auf die Figuren MORGANS (4, Taf. I, 1, 2, 3, an so findet man eine gute Uebereinstimmung, bis etwa auf die Zahl der Tentakel und die Form des Ventralsattels.

Die Höhe dieser Stadien ist circa 5—6 mm., die Breite (Durchmesser des primären circulären Wimperrings) beträgt 4—4$^1/_2$ mm., die Larve ist also etwas höher als breit, etwas grösser als die Exemplare MORGANS.

Taf. II. Fig. 7. *Seitenansicht der Tornaria morgani* [1]). Dieses Stadium wurde von MORGAN (4) so ausführlich geschildert, dass ich hier nur die Unterschiede zwischen dieser Abbildung mit derjenigen MORGANS (4, Taf. I fig. 3) besprechen will. Die Tentakel scheinen etwas länger, weniger steif zu sein. Das Analfeld ist nicht so flach, sondern deutlich vorgewölbt. Die Scheitelplatte ist meist eingezogen, daher nur angedeutet. Ihr Bau stimmt mit den Angaben MORGANS (2 und 4) sowie SPENGELS (3) bei Tornaria *Grenacheri* recht gut überein. Der wichtigste Unterschied betrifft das Coelom. Dasselbe wurde anfangs von MORGAN gänzlich übersehen (2 pag. 431) und so wird es wohl jedem Untersucher wegen der von der normalen gänzlich abweichenden Lage des Coeloms ergehen. (3, p. 432). MORGAN konnte dasselbe nur auf Schnitten nachweisen und ist es daher in seine Abbildung nicht eingezeichnet. In Fig. 7 auf Taf. II sieht man das Rumpfcoelom als schmalen lang ausgezogenen Ring den ganzen Körper umgebend und dem primären circulären Wimperring dicht anliegend. Es sind zwei ringförmige schmale Scheiben. SPENGEL beschreibt das Coelom bei *T. Grenacheri* in ganz ähnlicher Weise als sehr lang ausgezogene der Epidermis anliegende Schläuche (3, p. 432) nur mit dem Unterschiede, dass bei seiner Form die Coelome in der Gegend des Laterallobus einen langen dünnen Fortsatz nach oben entsenden, was bei *T. Morgani* nicht der Fall ist. Hier sind die Figuren Morgans (4, Taf. III, fig. 29, 30, 31) für den Vergleich von Wichtigkeit, die sämmtlich Schnittpraeparate darstellen. Alle zeigen das Rumpfcoelom in Verbindung mit dem Ektoderm unmittelbar dem circulären Wimperring anliegend „atta-

[1]) In fig. 7, 8 u. 9 ist der circuläre Wimperring nicht eingezeichnet, um das Coelom deutlicher hervortreten lassen zu können.

ched to the inner surface of the circular band", stets weit vom Darm entfernt. In fig. 29 ist auch das Kragencoelom mit dargestellt, welches ich auf meinen ungeschnittenen Exemplaren nicht auffinden konnte und das vielleicht erst etwas später zur Ausbildung gelangt. (Vergl. die Bemerkung unten auf S. 240).

Fig. 8 stellt ein anderes etwas grösseres Exemplar in Dorsalansicht dar. Scheitelplatte eingezogen, Analfeld eine ganz flache Scheibe. Etwas unterhalb der Mitte ist der lange schmale Ausführungsgang des „Wassersackes" sichtbar, der ziemlich tief in einer halbmondförmigen Vertiefung mündet. Oberhalb des Porus die Herzblase mit der Rüsseldrüse. Die beiden Rumpfcoelome verlaufen ganz entsprechend dem in Fig. 7 dargestellten Stadium innerhalb des circulären Wimperrings, demselben eng anliegend. Hier sieht man auch, was MORGAN in Fig. 23 auf Taf. IV, SPENGEL in Fig. 59 Taf. 23 dargestellt hat: dass die beiderseitigen Rumpfcoelome unterhalb des Hydroporus sich einander nähern, ohne jedoch mit einander zu verschmelzen („these do not meet in the middle line"). Doch ist hier gegenüber der Beschreibung SPENGELS ein Unterschied, indem die Coelome bei seiner Form sich zuletzt etwas aufrichten und der linke in der Nähe des Eichelporus, der rechte in entsprechendem Abstande vom blinden Zipfel des „Wassersackes" endigt. Dagegen stimmen die Verhältnisse auf der Ventralseite, SPENGELS Fig. 60 Taf. 23, sehr gut, denn auch hier nähern sich in beiden Fällen die Coelome, ohne in einander überzugehen.

Stadium Fig. 9. Seitenansicht eines etwas älteren Stadiums der regressiven Entwicklung. Die Larve ist kleiner, ca $4^1/_2$—5 mm. hoch, undurchsichtiger, die Kragenregion sehr breit, wulstartig verdickt, das Analfeld ziemlich stark vorgewölbt, die Tentakel an den Loben kürzer und dicker. Im Innern der 3-teilige Darm und das dem (nicht gezeichneten) circulären Wimperring dicht anliegende ringförmige Rumpfcoelom. An der Berührungsstelle mit dem Ektoderm ist es ein wenig umgebogen, erscheint daher etwas dunkler, springt nach innen etwas vor, als ganz flache Scheibe.

Stadium Fig. 10. Dorsalansicht eines etwas älteren Stadiums als das vorhergehende. Die Epidermis ist bereits recht undurchsichtig geworden, die Tentakel sind sehr viel kürzer, nur mehr stummelformig ausgebildet. Der „Wassersack" ist eine mächtige Blase geworden. Am Darme sind bereits in der Nähe des Oesophagus die Anlagen der ersten Kiemenspalten zu sehen. Sie treten als paarige Aussackungen der endoblastischen Darmwand auf, als halbkugelige Protuberanzen, wie von MORGAN geschildert (4, p. 42). Die Coelome sind in Toto-Praeparaten fast nicht zu sehen, da sie durch den

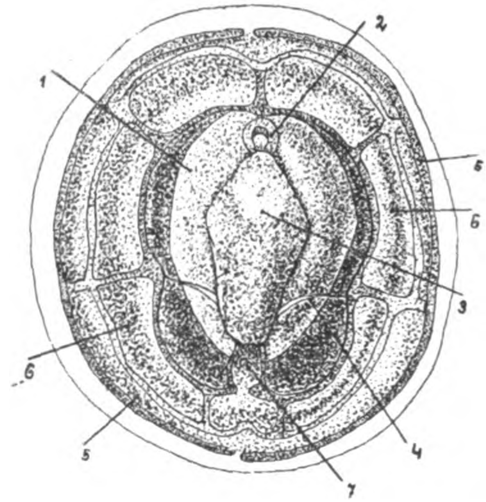
breiten circulären Wimperkranz verdeckt werden, dem sie eng anliegen. Dass sie bereits vorhanden und sehr mächtig entwickelt sind, kann man auf Zupfpraeparaten der gleichen Stadien sehr deutlich erkennen. (Vergl. Textf. 3 u. die Ausf. S. 230/231).

Stadium fig. 11. entspricht etwa dem MORGAN'schen Stadium IV (4, Pl. I, fig. 4) und meinem eingekerbten Stadium (15, Taf. 6, Fig. 6 u. 7). Die Tentakel sind bereits völlig geschwunden, die Dorsal- und Ventralloben ganz glatt, die Lateralloben sind verwischt. Die Kragenregion breit, wulstartig, ähnlich, wie bei dem in fig. 9 auf Taf. II dargestellten Stadium, das Analfeld sehr stark vorgewölbt. In der Mitte des Körpers ist bereits die für dieses Stadium so charakteristische ringförmige Einschnürung oder Einkerbung zu sehen. Im Innern der Darm und der grosse Wassersack (Eichelcoelom); in der Kragenregion sind die Kragen- und Rumpfcoelome zu sehen. Man sieht in der Figur 11 oberhalb des grossen circulären Wimperrings die etwas dunkler gehaltenen Rumpfcoelome, oberhalb, d. h. in Wirklichkeit innerhalb derselben, die gleichfalls schon stark ausgebildeten Kragencoelome. Diese springen diaphragmaartig ins Innere vor, stets concentrisch den äussern Rumpfcoelomen und denselben dicht anliegend verlaufend. Besser ist dies natürlich auf Zupfpraeparaten zu sehen. (Vergl. Erläuterungen zu Textf. 3). Auf Zupfpraeparaten lassen sich in diesem bereits sehr undurchsichtigen Stadium auch 2 Paar Kiemenspaltenanlagen als halbkugelige Vorwölbungen zu beiden Seiten des Oesophagus erkennen.

Stadium fig. 12. Dieses kleinste bereits ganz undurchsichtige leicht rötlich-bräunlich gefärbte Stadium halte ich für das älteste, vorgeschrittenste. Es scheint der Metamorphose unmittelbar vorauszugehen. Vor allem fällt die sehr stark vorgewölbte Analplatte und die tiefe Ringfurche auf, ferner die in voller Auflösung befindliche longitudinale Wimperschnur der Rüsselregion. Es scheint hier ein „vollständiger Zerfall ganzer Bezirke des Hautepithels" (12) und Auflösung des longitudinalen Wimperkranzes in einzelne mehr oder minder vertikal zur Längsachse stehende Stücke stattzufinden, die stellenweise noch gewellten Verlauf zeigen (Schrumpfung?). Im Innern ist mit Mühe der Darm und die grosse Wasserblase (Eichelcoelom) zu sehen. Coelome und Kiemenspaltenanlagen sind in Totopraeparaten nicht zu erkennen.

Textf. 3 stellt ein Totalpraeparat im optischen Schnitte dar. Die undurchsichtige Epidermis des Analfeldes ist mittels feiner Nadeln abgetragen, so dass dasselbe von einem ganz durchsichtigen uhrglasförmigen Häutchen bedeckt ist, durch welches hindurch man das ganze Innere der Larve beobachten kann. Es ist ein dem Stadium 10 entsprechendes Objekt dargestellt.

Ganz peripher der grosse Wimperkranz, im Bilde nur angedeutet. Ihm anliegend die paarigen Rumpfcoelome, welche in der Sagittalachse sich nähern. Dieselben zeigen peripher jederseits einen verdickten schlauchartigen Halbring mit deutlichem dünnen Lumen, der sich nach innen zu als solide Platte fortsetzt, was der fig. 30, Taf. IV MORGANS mit dem Unterschiede entspricht, dass bei MORGAN gerade umgekehrt der innere Teil des Rumpfcoeloms das Lumen zeigt. Während in den jüngeren Stadien, die in Fig. 7 u. 8 dargestellt sind, nur der periphere schlauchartige Teil zu beobachten ist, finden sich bei etwas älteren Stadien, Fig. 9 u. 10, wie etwa hier, plattenförmige Fortsätze im Innere. Diese inneren Teile des Rumpfcoeloms scheinen in der Sagittalachse mit einander beiderseits zu verschmelzen, während die peripheren getrennt bleiben.



Textfigur 3. Optischer Schnitt durch ein Total-praeparat (Stadium fig. 10) von *Tornaria Morgani.* Die Larve ist so orientiert, dass die Apikalplatte zu unterst, der After zu oberst ist, sie steht also gleichsam auf dem Kopfe. 1 Wassersack, 2 Herzblase und Rüsseldrüse, 3 Darm, etwas oberhalb des Bildcentrums der After, 4 Sporne („Zügel stücke"), 5 Rumpfcoelome, 6 Kragencoelome, 7 Oesophagus.

Apicalwärts vom Rumpfcoelom, im Bilde innerhalb, liegen die mächtig entwickelten Kragencoelome, welche als breite diaphragmaartige Platten ausgebildet sind und vom Rumpfcoelom durch eine deutlich erkennbare schmale concentrische durchsichtige Zone getrennt sind. Sie sind in meinen Stadien riesig gross, ganz breite weit ins Innere vorspringende Scheiben, so dass es fast unbegreiflich erscheint, wieso sie von MORGAN, der ganz entsprechende Stadien vor sich hatte, entweder gänzlich übersehen werden konnten oder auf den Schnitt-praeparaten (4, Taf IV Fig. 29 u. 35) nur so klein ausgebildet sind. Die beiderseitigen Kragencoelome vereinigen sich in der Sagittalachse und scheinen dort Mesenterien zu bilden, an denen sich auch die Rumpfcoelome anheften. In der Gegend des Oesophagus legen sich die Kragencoelome an den Oesophagus an. An vier Stellen, etwa den äusseren tentakeltragenden Loben entsprechend, sieht man Verdickungen im Coelom, von denen apikalwärts in manchen Fällen Fortsätze auszugehen schienen, doch war mir dies in anderen Fällen wieder

zweifelhaft, und konnte dies mit Sicherheit nicht festgestellt werden.

Weiter ins Innere fortschreitend ist in der Abbildung das nicht mehr so geräumige Blastocoel, ziemlich dunkel gehalten, dargestellt. Es folgt das grosse muskulöse Eichelcoelom (1), dem der Darm aufliegt (3). Herzblase und Rüsseldrüse (2) deutlich zu sehen. Der dreiteilige Darm erscheint stark verkürzt, der After ganz oben, im Bilde oberhalb des Centrums, der Oesophagus in der Tiefe, in einem ziemlich scharfen Winkel abgebogen (7). Sehr deutlich sieht man hier beiderseits des Darmes, dem Wassersack aufliegend, die Zügelstücke, ‚Sporne' (4). Dieselben inserieren einerseits ziemlich nahe am Oesophagus als breite anscheinend muskulöse Bänder, *ziehen dann bogenförmig, sich immer mehr fadenförmig verdünnend, beiderseits zu einer ziemlich weit ins Innere vorspringenden verdickten Stelle des Kragencoeloms, wo sie angeheftet sind.* Diese ‚Sporne' sind auch von Morgan und Spengel beobachtet worden. Besonders bei der Spengel'schen „*Tornaria Grenacheri*" (3, Taf. 23 fig. 60) sind sie sehr stark ausgebildet. Die Insertionsstelle dieser Sporen ist nach beiden Autoren nicht sicher. Nach Spengel endigen sie beiderseits „in einem bald kleineren, bald grösseren Häufchen von Zellen".

Damit glaube ich alles geschildert zu haben, was an derartigen Totalpraeparaten zu sehen ist. Schnitte konnten vorläufig nicht gemacht werden. Es ist daher vielleicht nicht alles richtig gedeutet, was ich beobachtet habe [1]).

Hier anschliessend nur einige Bemerkungen über die *Scheitelplatte* in den Stadien 7 u. 9. Taf. II. Bei den meisten Larven ist die Scheitelplatte stark eingezogen und undeutlich, oder gar nicht zu sehen, ebenso die Augen, an denen niemals Pigment beobachtet werden konnte. In der einen oder anderen Larve konnten jedoch die Verhältnisse an der Scheitelplatte, Verlauf der Wimperschnüre etc., gut erkannt werden. Im allgemeinen entspricht die Darstellung und Beschreibung Morgans in seinen beiden Arbeiten (2 u. 4) sehr gut. Besonders hebe ich hier die fig. 10 in Morgans erster Arbeit (2) hervor, in welcher Abbildung jedoch leider die Augen nicht eingezeichnet sind. Auch die Angaben Spengels (3) über die Scheitelplatte seiner als „*Tornaria Grenacheri*" bezeichneten Form zeigen durch ihre Uebereinstimmung die nahe Verwandschaft derselben mit *Tornaria Morgani.* Ich füge nur hinzu, dass im Centrum der Apikalplatte ein kleiner dunklerer Fleck zu sehen ist, innerhalb dessen sich eine kleine lichte Grube („Wimperorgan Spengels? 3, p. 394) befindet.

---

[1]) Zusatz bei der Korrektur. Seitdem dies geschrieben wurde, bin ich in den Besitz vorzüglicher Schnittpraeparate durch diese Stadien gelangt. Ich behalte mir vor, darauf bei anderer Gelegenheit zurückzukommen.

Quer über die Apikalplatte verläuft eine seichte Rinne. Die breite Apikalplatte selbst hat etwa die Form eines Rechtecks, dessen Längsseiten von den parallel zu einander verlaufenden tentakellosen Wimperschnüren eingenommen werden. Die prae- u. postoralen Wimperschnüre scheinen nicht auseinander zu fallen (MORGAN 2, p. 11), sondern, dort, wo in der Mitte des Rechtecks die quere zu den kurzen Seiten des Rechtecks parallele Rinne verläuft, gehen die beiderseitigen Wimperschnüre in einander über, deren Tentakel gegen den Apex zu immer kleiner geworden und hier endlich ganz geschwunden sind.

Zum Schlusse ergibt sich naturgemäss auch hier die Frage: *Zu welchem adulten Enteropneusten gehört die Tornaria Morgani?* Leider lässt sich dieselbe vorläufig ebensowenig mit Sicherheit beantworten, als dies bei der *Tornaria Weldoni* und bei allen übrigen tentaculaten Tornarien der Fall ist. WELDON und MORGAN sagen diesbezüglich nichts. WILLEY (6) spricht anlässlich der Beschreibung seiner neuen species *Ptychodera biminiensis* auf p. 288 folgende Ansicht aus: „This is presumably the species whose *Tornaria*-development was described by MORGAN", wohl deshalb, weil diese Enteropneustenform von der gleichen Lokalität stammt. Ein weiterer Beweis für seine Behauptung wird von WILLEY nicht beigebracht, doch ist seine Annahme wohl richtig. Mit voller Sicherheit wird sich die Zusammengehörigkeit der *Tornaria Morgani* mit *Ptychodera biminiensis* natürlich erst nach Züchtung dieser Larve aus deren Eiern behaupten lassen. Am Schlusse seiner Beschreibung fügt WILLEY, (6, p. 294) noch hinzu: „As at least two kinds of *Tornaria* have been recorded from the West Indies it is important to note that so far as known all the Enteropneusta inhabiting the shores of these islands belong to the family of the *Ptychoderidae*."

III. *Kritische Uebersicht über die bisher bekannten tentaculaten Tornarien.*

A. *Kritik der Species.*

Im Anschlusse an diese Darstellung gebe ich im folgenden eine *Revision der bisher beschriebenen tentaculaten Tornarien.* SPENGEL hat, da sich unter den verschiedenen, in seiner grossen Monographie fälschlich zu einer einzigen Species „*Tornaria Grenacheri*" zusammengezogenen Tornarien eine grössere Anzahl wohl charakterisierter Arten erkennen lassen, eine Uebersicht derselben für nötig gehalten, eine solche in Aussicht gestellt, doch ist dieselbe bis nun nicht erschienen (9). WILLEY schreibt mit vollem Rechte (6, p. 185): „No doubt the differences between the Tornariae of some species are very

trifling, but it is a great mistake to imagine that all tentaculated Tornariae belong to one species".

Es ist ganz richtig, wenn SPENGEL schreibt (9, p. 127.), dass „weder die besondere Ausbildung der Tentakel noch ihre Zahl zur Charakterisierung der meisten tentaculaten Tornarienformen brauchbare Merkmale zu bieten scheint", doch sind es nicht nur „Eigentümlichkeiten gewisser Loben, an die sich vorzugsweise die Unterschiede knüpfen", sondern, wie ich hinzufüge auch *eine ganze Reihe anderer Merkmale* wie z. B. die Grösse, Beschaffenheit des Analfeldes, Bau der Scheitelplatte, Augen, Pigment, Sporne, vor allem jedoch die *Lage und Entstehungsweise des Coeloms*, (Vergl. die Synopsis der tentaculaten Tornarien S. 249), die zu einer genaueren Charakterisierung der verschiedenen Tornarien dienen können.

Bezüglich des longitudinalen Wimperbandes der tentaculaten Tornarien möchte ich nur bemerken, dass der Verlauf desselben im Prinzipe, trotz der grossen Compliciertheit gegenüber den nicht tentaculaten, doch im grossen und ganzen der gleiche ist, wie bei den letzteren. Nie ist das longitudinale Wimperband unterbrochen, sondern stets continuirlich. Man kann wohl sagen, dass soferne nach Angabe WILLEYS bei der Tornaria von New Britain (*Tornaria* WILLEYi) die Wimperschnur eine Unterbrechnung zeigen soll, dies höchstwahrscheinlich auf einen Beobachtungsfehler dieser höchst schwierig feststellbaren Verhältnisse zurück zu führen ist. Es gilt also ganz im allgemeinen das Schema des Verlaufs der longitudinalen Wimperschnur auch für alle tentaculaten Tornarien, wie ich dasselbe in meiner Arbeit (15) über die Entwicklung des *Balanoglossus clavigerus* für das *Tornaria Krohnii-Stadium* dieses Enteropneusten gegeben habe. (15, p. 263., Textf. C.). Es lässt sich daher auch in allen Fällen die SPENGELsche Nomenclatur (Loben, Sättel, Ventralband etc.) gut und zweckmässig anwenden. Natürlich hat jedoch jede einzelne Tornariaspecies einen ihr eigentümlichen Verlauf der longitudinalen Wimperschnur mit specifischen Unterschieden, die sich jedoch alle auf das gemeinsame Schema zwanglos zurückführen lassen. (Vergl. Textf. 1 u. 2 mit der genannten Abbildung).

Bezüglich der „Tentakel" sei noch eine mehr nebensächliche Bemerkung gestattet, da hier die SPENGELsche Nomenclatur zu Missverständnissen Anlass geben könnte. SPENGEL bezeichnet die Fortsätze des Oralfeldes in die benachbarten Felder mit einem der Beschreibung der Ammoniten entnommenen Ausdruck als „Loben", die in das Oralfeld hineinragenden Fortsätze der anderen Felder als „Sättel" (3, p. 373). Bei der Beschreibung seiner „*Tornaria grenacheri*" (3, p. 379/89) schreibt SPENGEL: „Die Compliciertheit des Wimperappa-

rates beruht auf der Entwicklung von je 25—30 und mehr secundärer Loben ... Alle diese secundären Loben sind bei der ausgebildeten Larve sehr lang und schmal und haben ganz das Aussehen von kleinen Tentakeln, wie sie denn auch von WELDON als solche beschrieben worden sind". Im Sibogawerk (9, p. 124) schreibt dieser Forscher: „Bei allen (tentaculaten Tornarien) sind bekanntlich die scheinbaren Tentakel nichts als zahlreiche enge und sehr tiefe Buchten der im übrigen ihre normale Anordnung zeigenden Wimperschnüre". — Danach wären die Tentakel als „secundäre Loben" aufzufassen, also als Nebenverzweigungen der Fortsätze des Oralfeldes in die anderen Felder, die von entsprechenden Windungen der Wimperschnüre begleitet sind, also die tiefliegenden Buchten der Loben des Oralfeldes, zwischen den hochliegenden Teilen der Sättel. Von RITTER und MORGAN wird übereinstimmend angegeben, dass die Tentakel ziemlich stark von der Oberfläche wegstehen „hanging freely like a fringe from the surface of the larva", (4, p. 429) was ich nur bestätigen kann. SPENGEL selbst (3, p. 380) erwähnt die Aehnlichkeit der tentaculaten Tornarien mit einer Rippenqualle. Auch kommt den Tentakeln mehr oder minder Bewegungsfähigkeit zu (8, p. 175). *Die tiefliegenden Fortsätze des Oralfeldes, die Buchten der Loben* (SPENGEL) *können doch nicht von der Oberfläche wegstehen oder fransenartig herabhängen und sich bewegen. Die Tentakel sind eben nicht Ausbuchtungen der Loben, sondern Ausbuchtungen der Sättel,* denn nach ZITTEL's Handbuch [1]) sind die vorspringenden Teile die „Sättel", die zurückgebogenen Buchten die „Loben".

In der folgenden Besprechung wurden die meisten Tornarien mit *neuen Namen* bezeichnet. Der Vorschlag SPENGELS (3), die Tornarien mit dem Namen jenes Autors zu benennen, der sie zuerst beschrieben hat, erweist sich als nicht immer durchführbar, da z. B. SPENGEL selbst und WELDON mehrere Tornarien beschrieben haben. Es wurden daher die verschiedenen Species mit den Namen jener Autoren belegt, die an ihrer *Auffindung oder Beschreibung* einen wesentlichen Anteil haben.

Tornaria Grenacheri SPENGEL.

Unter dem Namen „*Tornaria grenacheri*" beschreibt SPENGEL (3, p. 378 ff.) eine Tornaria, die Professor GRENACHER bei den Cap Verdischen Inseln gesammelt hat und hält dieselbe für identisch mit anderen Tornaria-Exemplaren, die von CHIERCHIA auf der Fahrt des

[1]) ZITTEL KARL A., Handbuch der Palaeontologie I. Abth. Palaeozoologie II. Bd. Mollusca und Arthropoda.

„Vettor Pisani" im Stillen Ozean, zwischen den Sandwich- und den Marshall-Inseln gesammelt wurden.

Auch die von WELDON, BROOKS und MORGAN bei den Bahamas gefundene Form hält SPENGEL mit den genannten für identisch, sowie eine von DRIESCH und HERBST bei Ceylon nachgewiesene Tornaria. „Sollte sich wirklich die völlige Identität dieser sämmtlichen Tornarien erweisen, so würde denselben eine, wenn ich so sagen darf, circumterrane Verbreitung zukommen."

Dieser von SPENGEL geäusserte Zweifel an der Identität der genannten Tornarien verschiedener Provenienz erweist sich nur zu begründet. WILLEY (6, p. 285) bemerkt dazu, das SPENGEL unter dem Namen „*T. Grenacheri*" Tornarien vereinigt, die sicher nicht identisch sind.

Im Sibogawerk gibt SPENGEL selbst zu (9, p. 124), dass er „die tentakulaten Tornarien fälschlich zu einer einzigen Form, der *T. Grenacheri*, zusammengezogen hat, während sich einige wohl charakterisierte Arten unter ihnen erkennen lassen".

Tatsächlich ergibt eine Prüfung seiner Darstellung in seiner grossen Monographie (l.c.), dass dieser Forscher tatsächlich hier mindestens zwei verschiedene Tornarien unter dem Namen „T. Grenacheri" vereinigt hat.

Vor allem besteht zwischen der Tornaria GRENACHERS und derjenigen CHIERCHIAS ein beträchtlicher Grössenunterschied. Die grössten von GRENACHER beobachteten Exemplare, erreichen 5—9 m.m. Höhe, das grösste von CHIERCHIA gesammelte dagegen nur 5 m.m. Höhe.

Auf Grund seiner Abbildungen (3, Taf. 22, fig. 11—13) welche nicht nach den GRENACHERschen capverdischen, sondern nach den von CHIERCHIA gesammelten pacifischen Formen gezeichnet sind, lässt sich mit Sicherheit sagen, dass die CHIERCHIA'sche Tornaria nicht identisch ist mit der grossen *Bahamas Tornaria* WELDON's und MORGAN's. Allerdings sind beide Tornarien sehr ähnlich und WILLEY sagt mit Recht (9, p. 285) „no doubt the differences between the Tornariae of some species are very trifling", doch hat die CHIERCHIA'sche Tornaria ziemlich tiefe untere Dorsalloben, welche bei der Bahamas Tornaria gänzlich fehlen (was SPENGEL übersehen zu haben scheint), auch erreicht die letzere nicht die Grösse der ersteren. (Vergl. damit S. 249). SPENGELS Beschreibung lässt diesbezüglich keine Schlüsse zu, denn er spricht stets ganz allgemein über „*Tornaria Grenacheri*", da er ja alle tentaculaten Formen für identisch hält und auch nicht sagt, ob seine jeweiligen Angaben die GRENACHER'sche oder CHIERCHIA'-sche Form betreffen. Nur in der Figurenerklärung von Tafel 22 erwähnt er bei Fig. 11—13 „*Tornaria Grenacheri* aus dem Stillen

Ozean, ausgebildete Form", woraus hervorgeht, dass diese Figuren die CHIERCHIA'sche Tornaria darstellen. Auch scheint es, dass SPENGEL von GRENACHER nur Abbildungen, keinerlei Material, von der capverdischen Tornaria erhielt, während dies bei der Tornaria CHIERCHIAS wohl der Fall war. Danach wären dann alle Detailangaben über Coelomverhältnisse, Herzblase, Darm, Wimperkranz etc., die in SPENGEL's Monographie verstreut sind, auf die Tornaria CHIERCHIAS und nicht auf die GRENACHER'sche zu beziehen.

Auch die Angaben SPENGELS über die Entwicklungsstadien der „*Tornaria Grenacheri*" sind mit einiger Vorsicht aufzunehmen, denn es scheint auch hier keinem Zweifel zu unterliegen, dass er Entwicklungsstadien verschiedener Tornarien in Verbindung gebracht hat, die mit einander nichts zu tun haben.

Durch die vortreffliche Schilderung der Entwicklung der grossen *Bahamas Tornaria* durch MORGAN sind die Jugendstadien dieser Form zum Teil wenigstens bekannt (4, Taf. I, Fig. 1 u. 2). Sie sehen durchaus nicht so aus wie die *Tornaria Krohnii* des Mittelmeeres, sondern haben, obwohl viel kleiner, doch schon ganz den Habitus der tentaculaten Formen mit langen fingerförmigen Tentakeln, die allerdings geringer an Zahl sind als bei den „ausgebildeten".

SPENGEL schreibt nun von seiner „*Tornaria Grenacheri*", dass „Professor GRENACHERI einige jüngere Entwicklungsstadien seiner Larve beobachtet und gezeichnet hat, von denen eines fast genau die *Tornaria Krohnii* repraesentiert", fügt jedoch hinzu; „Es ist allerdings nicht ganz ausgeschlossen, dass dieses vermeintliche Jugendstadium der T. g. wirklich eine *Tornaria Krohnii* ist, da ja recht wohl bei S. Vincente beide Arten neben einander vorkommen können, wie bei Neapel *T. Krohnii* neben *T. Mülleri* und *T. dubia* . . . Diese Möglichkeit muss ich zugeben."

SPENGEL hält es also selbst für gar nicht ausgeschlossen, dass hier eine Vermengung von Entwicklungsstadien zweier verschiedener Tornarien vorliegen kann.

Eine weitere Nachprüfung dieser SPENGEL'schen resp. GRENACHER'schen Angabe ist nicht möglich.

Wohl möglich ist aber eine kritische Untersuchung der folgenden Bemerkungen SPENGELS, welche die WELDON'sche *Bahamas Tornaria* betreffen.

„Dass indessen jüngere Exemplare der *T. Grenacheri* in der Gestaltung ihres Wimperapparates tatsächlich von der *T. Krohnii* kaum zu unterscheiden sind, ersehe ich aus dem reichlichen Material der ersteren Form, das Mr. WELDON mir in liebenswürdigster Weise zur Verfügung gestellt hat". Nun hat WELDON, wie aus seiner kurzen

Mitteilung (1) hervorgeht, auf den Bahamas zwei verschiedene Tornarien beobachtet, eine kleinere, welche von MORGAN später *Bimini Tornaria* genannt wurde, und eine grössere, von MORGAN als *Bahamas Tornaria* bezeichnet. Es ist also wieder unsicher, was für Entwicklungsstadien SPENGEL VON WELDON erhielt, solche von der *Bimini-* oder solche von der *Bahamas Tornaria*. WELDON beschreibt in der genannten Arbeit (1) ausschliesslich ältere Stadien, die sich schon der Metamorphose nähern, die jungen Entwicklungstadien der *Bimini Tornaria* waren zur Zeit, da SPENGEL seine Arbeit schrieb, nicht bekannt. Aus der MORGAN'schen Abbildung 4, Taf. 1, fig. 12 geht jedoch hervor, dass es sich um eine tentaculate Form mit tentakellosem Laterallobus handelt, was auch durch das mir vorliegende übereinstimmende Material bestätigt wird. Dass die jüngeren Stadien der *Bahamas Tornaria* (*T. Morgani*) ganz anders aussehen, wie *Tornaria Krohnii*, geht aus der MORGAN'schen Beschreibung deutlich hervor (4, Taf. I, fig. 1 u. 2). Die Angabe SPENGELS stimmt also weder für die eine, noch für die andre Form WELDONS. SPENGEL fährt dann fort: „Die jüngste endlich der von Herrn Prof. GRENACHER abgebildeten Larven gleicht wesentlich einer *T. Mülleri*, indem die primären Loben, mit Ausnahme der Lateralloben, ausgebildet sind, secundäre aber noch gänzlich fehlen. Wir würden demnach im Entwicklungsgang der *T. Grenacheri* zwei Stufen erkennen, welche die Endstadien der *Tornaria Mülleri* und *Krohnii* entsprechen". Darauf wäre einzuwenden, dass von keiner einzigen tentaculaten Form mit Sicherheit ein der *T. Mülleri* entsprechendes Entwicklungsstadium bekannt ist ohne secundäre Loben, da das jüngste bekannte Entwicklungsstadium einer tentaculaten Tornaria, dasjenige von MORGAN in Fig. 2 auf Taf. I. abgebildete und genau beschriebene, bereits Tentakeln trägt.

Da also von keiner tentaculaten Tornaria ein tentakelloses der *Tornaria Mülleri* entsprechendes Stadium bekannt ist, erweist sich SPENGELS Schlussfolgerung als voreilig oder jeder Grundlage entbehrend.

Vielmehr ist anzunehmen, dass die *Tornaria Mülleri*-Stadien GRENACHERS als jüngere Stadien jener *Tornaria Krohnii* GRENACHERS, welche auf der gleichen Lokalität gefunden wurden, aufzufassen sind, die mit der *Tornaria Grenacheri* nichts gemeinsam haben, als das Vorkommen auf einer derselben Lokalität, denn nach SPENGEL selbst (3, p. 376) „durchläuft ja die *Tornaria Krohnii* ein im wesentlichen der *T. Mülleri* gleichendes Entwicklungsstadium".

Auch ist es nach den Beobachtungen MORGANS, sowie meinen eigenen, höchst wahrscheinlich, dass sowohl die *Bimini-* als auch die *Bahamas Tornaria* sehr frühzeitig den Habitus der Tentaculaten

zeigen. Von Interesse wäre es natürlich zu wissen, was für Tornarien WELDON an SPENGEL gesandt hat, denn von den Bahamas ist eine *Tornaria Krohnii* nicht bekannt. Ich komme also zum Ergebnis, dass SPENGEL unter der Bezeichnung *T. Grenacheri* mindestens zwei Formen vereinigt hat, die Entwicklungsstadien verschiedener Enteropneusten darstellen.

Die von den Capverdischen Inseln stammende „*T. Grenacheri*", die SPENGEL wohl nur nach Zeichnungen und Angaben GRENACHERS kannte, ist nicht identisch mit der Tornaria CHIERCHIAS aus dem Pacific, die SPENGEL genau untersucht hat.

Möglich ist, das die GRENACHER'sche Larve, über welche wir nun fast gar nichts wissen, da fast sämmtliche Angaben SPENGELS auf die Tornaria CHIERCHIAS zu beziehen sind — ausser einer Aehnlichkeit beider Formen — identisch ist mit der *Bahamas Tornaria Morgans*. Die räumlich so getrennten Faunengebiete der Capverden und Bahamas sind ja durch den Golfstrom in direkter Verbindung. Es würde nur die grosse Entfernung dagegen sprechen. Hier ist jedoch die Auffindung von Tornarien durch die Planktonexpedition fern vom Festlande oder Inseln im Atlantik von Interesse. HENSEN schreibt in seinem grossen Werke „Das Leben im Ozean nach Zählung seiner Bewohner" (10) auf p. 254, dass mit dem grossen Vertikalnetze eine Anzahl *Balanoglossus* Larven 300 Seemeilen östlich von Fernando und 780 Seemeilen westlich von Ascension gefangen wurden. „Dies sind Entfernungen die der Südaequatorial-Strom kaum in 40 Tagen von Ascension durchlaufen hätte und die gegen ihn von Fernando aus nicht durchmessen werden können. Auf den Stationen zwischen dem Fundort und Ascension traten diese Larven auch nicht auf". Die weitere Bemerkung HENSENS: „Die Möglichkeit, dass die Larven, die übrigens recht häufig waren, aus grossen Tiefen stammen, ist nicht abzuweisen", bezieht sich wohl nur auf die gleichzeitig mit den Balanoglossus-Larven besprochenen Echinodermenlarven, denn bisher ist von keiner einzigen Enteropneustenform, die als typische Litoraltiere gelten, Aufenthalt in der Tiefsee nachgewiesen.

Die grosse Entfernung der Fundstellen wäre also kein Hindernis. Auch ist aus meinen Arbeiten (14, 15) über die Entwicklung des *Balanoglossus* bekannt, dass die Larvenentwicklung unter normalen Verhältnissen mehrere Wochen dauert, jedoch unter abnormen, wenn die Larven durch Strömungen verschleppt werden, natürlich länger. Für die Möglichkeit der Identität der Capverdischen und grossen *Bahamas Tornaria* spricht endlich noch eine Bemerkung SPENGELS, der erwähnt, dass bei seinen vermeintlichen Jugendstadien der *T. Grenacheri* „der Wassersack schon eine bedeutende Ausdehnung erfah-

ren hat." Auch erwähnt er eine briefliche Mitteilung GRENACHERS an ihn, dass es GRENACHER in Erstaunen gesetzt habe, dass „das Wassergefässystem und seine Adnexe (i. c. Herzblase, Eichelkieme) bei anscheinend ziemlich gleichweit ausgebildeten Exemplaren so ungemein verschieden entwickelt sich vorfanden." Derartige Schwankungen in der Entwicklung einzelner Organe sind bei aus ihrer ursprünglichen Umgebung verschleppten Entwicklungsstadien durchaus nichts ungewöhnliches und durch den Wechsel der physikalisch-chemischen Bedingungen des Mediums leicht zu erklären.

Die SPENGEL'sche „*Tornaria Grenacheri*" umfasst also 1. die *Tornaria Grenachers* von den Capverdischen Inseln, 2. die von DRIESCH und HERBST bei Ceylon gefangenen *Tornarien*, 3. die *Tornaria Chierchias* aus dem Pacific.

Grenachers Tornaria von den Cap Verden.
(*Tornaria Grenacheri* Spengel).

Von der durch GRENACHER gesammelten Tornaria ist nach den obigen Ausführungen mit Sicherheit nur Folgendes bekannt. Sie ist eine tentaculate Form, ist als solche der *Tornaria Chierchiai* und *Tornaria Morgani* ähnlich. Ihre Höhe ist 5—9 mm, sie ist also die grösste bekannte Tornaria. Sie stammt von St. Vincente. Möglicherweise identisch mit *Tornaria Morgani* von den Bahamas.

Driesch und Herbst's Tornaria von Ceylon.
(*Tornaria* Sp. ?)

Ueber diese Tornaria ist nur bekannt, was SPENGEL in 3 Zeilen mitteilt (3, p. 379). „In allerjüngster Zeit habe ich 2 Larven, die ich *nach äusserlicher Untersuchung nicht von Tornaria Grenacheri unterscheiden kann*, durch die Güte der Herren Docs. H. DRIESCH und C. HERBST erhalten, die sie bei Ceylon gefangen haben". Daraus geht nur hervor, dass es sich um eine der *T. Grenacheri* jedenfalls sehr ähnliche tentaculate Form handelt. Weitere Angaben fehlen.

Chierchias Tornaria aus dem Pacific.
(*Tornaria Chierchiai*).

Unter 18° N., 175° W., zwischen den Sandwich- und den Marshall-Inseln.

Grösse: Höhe (Augenpol-After) 5 m.m.
Durchmesser $5^1/_2$ „

Äussere Merkmale: obere dorsale und ventrale Loben mit je 25—30 und mehr *secundären Loben* besetzt.

Dorsale Sättel breiter als ventrale.

Ventralsattel hoch und schmal.

Ventralband breit.

Lateralloben schmal mit 8 Tentakeln besetzt, untere Dorsalloben circa doppelt so tief wie die Lateralloben, ohne Tentakel.

Analfeld flach mit breitem primären circulären Wimperkranz und schmalen secundären Wimperkranz; Eichelporus tief liegend.

Scheitelplatte eine breite langgestreckte rechteckige Figur, die quer auf dem oberen Körperpol gelegen ist. Wimperschnüre verhalten sich in der Hauptsache wie bei *T. Mülleri* und *Krohnii*, mit dem Unterschiede, dass infolge der Breite der Scheitelplatte die Wimperschnüre längs die Ränder derselben eine Strecke weit ziemlich parallel mit einander verlaufen.

Augen liegen ganz nahe an einen der beiden Wimperschnüre (ventral oder dorsal?), haben complicierteren Bau als bei der Mittelmeerform.

Pigmentierung stark entwickelt. Dichte Reihe rotbrauner Flecken längs des oberen Randes des primären Wimperringes, zerstreute Pigmentflecken längs der Wimperschnüre, sehr grosse sternförmige Zellen unter dem Prae- und Postoralfeld.

Innere Organe: [in den Habitusbildern nicht eingezeichnet, aber aus guten Detaildarstellungen zu erkennen]. Dreiteiliger Darm, Oesophagus und Enddarm kurz. Mitteldarm ein cylindrisches Rohr, 6 mal so lang als breit, Wassersack im wesentlichen wie bei *T. Müllerii* und *Krohnii*. Sporne („zügelartige Fäden") symmetrisch entwickelt, eine grosse Strecke lang hohl.

Coelom. Kragencoelome [1]) liegen unmittelbar der Epidermis an als ein Paar sehr lang ausgezogener, daher in longitudinaler Richtung nur sehr schmaler Schläuche. Auf der ventralen Seite nur ein kurzes Stück von einander entfernt. „Von hier zog ein jeder in horizontaler Richtung in seinem Verlauf der postoralen Wimperschnur folgend rings um den Körper herum, bis auf die dorsale Fläche, um sich zuletzt etwas aufzurichten und, der linke in der Nähe des Eichelporus, der rechte in entsprechendem Abstande vom blinden Zipfel des „Wassersackes" zu endigen. Jeder entsandte ferner in der Gegend

---

[1]) Spengel sagt anfangs nicht, von welchen Coelomen die Rede ist. Erst aus den letzten Sätzen auf p. 432, sowie aus der Bemerkung auf p. 433: „Ganz anders verhalten sich die Rumpfcoelome", geht mit einiger Sicherheit hervor, dass er mit den fraglichen Bildungen die Kragencoelome gemeint hat. Ich halte sie jedoch auf Grund der Angaben Morgans und meiner Beobachtungen für die Rumpfcoelome. (S. o. S. 228/9). Die wirklichen Kragencoelome, die erst später angelegt werden, scheint Spengel nicht gesehen zu haben.

des Laterallobus einen langen dünnen Fortsatz nach oben. Wo er endigt, habe ich nicht beobachtet".

Die Rumpfcoelome liegen dem circumanalen Wimperring hart an. „Ueber ihre ventrale und dorsale Begrenzung habe ich keine Beobachtungen angestellt [1])."

Entwicklung: nur 1 Stadium bekannt, (etwa einer älteren Tornaria Krohnii entsprechend), alle weiteren Angaben unsicher.

Fundort: Pacifischer Ozean.

Bemerkung: Die *Tornaria Chierchiai* unterscheidet sich durch folgende Merkmale von der *Tornaria Morgani* (*Bahamas Tornaria*): sie besitzt etwas mehr, jedoch kürzere Tentakeln an den oberen Dorsalloben, unterer Dorsallobus ziemlich tief (*Morgani* hat keinen), der Mitteldarm ist viel länger, sie hat viel Pigment. Beide Formen haben jedoch die Grösse, das Coelom fern vom Darm, dem grossen Wimperring oder dem Ektoderm anliegend, gemeinsam, ferner den Bau der Scheitelplatte und der Augen.

Ritters Tornaria von Californien.
(*Tornaria ritteri Spengel*).

1. *Beschreibung im Zoolog. Anz.* Bd. 17, p. 24—30. Fig. 1.

Grösse (des conservierten Exemplars) Höhe: 1,9 mm.
Grösste Breite: 1,33 „

Äussere Merkmale: Obere dorsale Loben mit 2—4, obere ventrale Loben mit 6 Tentakeln besetzt. Tentakel kurz, dick, stummelförmig.

Ventralsattel: nicht hoch, breit.

Oralfeld sehr breit.

Unterer Dorsallobus?

Laterallobus ziemlich breit, analwärts, an der Mündungsstelle enge, mit 1 Paar Tentakeln besetzt.

Scheitelplatte wie bei der New England Tornaria Morgans (2, Taf. XXIV, fig. 7).

Augen weiter von einander entfernt als bei der *Bahamas Tornaria* Morgans.

Innere Organe: Weder aus der Beschreibung noch aus fig. 1 etwas bezüglich Magen und Coelome zu ersehen. Als Besonderheit wird nur erwähnt, dass die ersten Anlagen der Kiemenspalten nicht vor Eintritt der Metamorphose auftreten. Ferner wird ein Band

---

[1]) Was für Bildungen Spengel für „Rumpfcoelome" hält, ist schon wegen ihrer ganz ungewöhnlichen Lage am circumanalen (doch wohl dem secundären?) Wimperring ganz zweifelhaft. In Abb. 118 Taf. 25 allerdings sind sie dem Hauptwimperring (primären Wimperring) anliegend dargestellt!

hoher cylindrischer Epithelzellen am Grunde des Oesophagus genau beschrieben und funktionell als Endostyl gedeutet.

Entwicklung: nur 1 Stadium bekannt.

Fundort: Avalon, Island of Santa Catalina, Southern California.

2. *Beschreibung in University Calif. Publ. Zool.* Vol. 1. 1904, p. 171—203. Pl. XVII—XIX. insbes. fig. 1 u. 2.

Grösse (der lebenden Tornaria). Höhe: 2.07—2.32 mm.
Grösste Breite: 1.08—2.07 „

Äussere Merkmale: obere dorsale und ventrale Loben mit 6—8 Tentakeln, ferner 3 Tentakel auf dem schmalen Verbindungsstück (isthmus) zwischen beiden. Tentakel länger, abstehend.

Unterer Dorsallobus?

Laterallobus laut Abbildung ohne Tentakel [Laut Beschreibung mit 1 Paar Tentakel s. u.] Ventralsattel hoch.

Scheitelplatte? Augen?

Die Larve ist relativ breit im Verhältnis zu ihrer Höhe. Das Vorderende flach, die Analscheibe vorgewölbt. „The diameter of the body increases rapidly from the oral field backwards to the ciliary girdle so that the sides form an angle much less than a right angle with the plane of this circle.“ (5, p 174/5).

Secundärer Wimperkranz vorhanden.

Innere Organe: In fig. 2 auf Taf. XVII, ist der 3 teilige Darm eingezeichnet, an welchem der fast kugelige sehr grosse Magen auffällt.

Die weiteren Angaben betreffen das Ektoderm, das Blastocoel, das Magenepithel in verschiedenen Entwicklungsstadien u. kommen für die Charakterisierung dieser Tornarienform kaum in Betracht.

Entwicklung: nur 1 Stadium wird genauer beschrieben, von den älteren Stadien einige histologische Details angegeben.

Fundort: der gleiche, wie unter (1) angegeben.

Bemerkung: Beide Beschreibungen sind ungenau und stimmen in einigen Punkten nicht überein.

Ungenau sind sie, weil sie keinerlei Angaben über einige für die Charakterisierung der Tornarien wichtige Merkmale wie z. B. Dorsalloben, Coelom etc. enthalten. Wenn es auch denkbar ist, dass die Rumpf- und Kragencoelome in den geschilderten Stadien noch nicht ausgebildet waren — was ich jedoch nach den Erfahrungen bei den übrigen Tornarien für unwahrscheinlich halte — so ist doch bei so vorgeschrittenen Stadien mit so gut ausgebildeten Tentakeln das Eichelcoelom und die Herzblase etc. schon angelegt, doch fehlt auch hierüber jede Angabe.

Nicht übereinstimmen beide Beschreibungen:

1. in der Grösse.
2. in der Anzahl Beschaffenheit der Tentakel auf den Dorsalloben.
3. in der Form des Ventralsattels.
4. in der Beschaffenheit des Laterallobus.

Ich glaube hier nur auf den letzten Punkt eingehen zu müssen. In seiner 1. Mitteilung im Zool. Anz. bildet Ritter in Fig. 1 im Laterallobus ein Paar Tentakel bei *l'* ab. „In the narrow neck of this loop there appears to be the anlage of a single pair of processes like those found in the preoral portion of the band". Die weitere Bemerkung: „so far I am aware this loop does not exist in any other Tornaria" ist durch die späteren Untersuchungen der übrigen Tornarien überholt, wo sich regelmässig ein derartiger Laterallobus, mit oder ohne Tentakel, vorfindet.

In seiner 2. Mitteilung schreibt er p. 175: „A single pair of tentacles somewhat shorter than the longest ones of the series above described is present at the narrowest part of the lateral lobe". Dies stimmt nun wieder nicht mit seiner Fig. 2 u. 3 auf Taf. XVII. Wenn man diese Abbildungen betrachtet, ohne auf die Beschreibung Rücksicht zu nehmen, wird man wohl sagen müssen, dass die Lateralloben der dargestellten Tornaria tentakellos sind. Nun fasst Ritter aber hier offenbar die beiden Zipfel des ventralen Wimperbandes an der Mündungsstelle des Latterallobus als Tentakel auf, was er im ersteren Falle, bei der in Abb. 1. im Zool. Anz. dargestellten Form, augenscheinlich nicht tut. Halten wir auch in diesem Falle den gleichen Vorgang ein, so wäre hier der Laterallobus mit 2 Tentakelpaaren ausgestattet. Was ist also richtig?

Es ist wohl zweifellos, dass in beiden Fällen ein und dieselbe Tornarien-Form vorlag, da sie ja von demselben Autor an derselben Lokalität in verschiedenen Jahren beobachtet wurde. Doch ist dieselbe ungenau beschrieben.

Tornaria Sibogae SPENGEL.
(*Tornaria Spengeli*).

Grösse: *Höhe* 2,5—3 *mm.*

Grösste Breite im Wimperring 2 mm.

Äussere Merkmale: Dorsale und ventrale obere Loben mit circa 20 Tentakeln besetzt.

Hoher schmaler Ventralsattel.

Tiefer enger tentakelloser unterer Laterallobus.

(Unterer) Dorsallobus tentakellos und etwa doppelt so tief wie der Laterallobus.

Scheitelplatte quer verbreitert (?)

Augen in typischer Lage zwischen dorsaler und ventraler Area.

Analfeld: etwas vorgewölbt.

Innere Organe: *Darm*: Magen langgestreckt, erheblich seitlich zusammengedrückt. (Schrumpfung?)

Coelom: *Die Rumpfcoelome liegen nicht dem Epithel des Wimperrings an, sondern sind dem Darm sehr genähert, wo dicht über ihnen die Kragencoelome sich befinden.* Beide Paare sind schon so weit entwickelt, dass sie auf der dorsalen wie der ventralen Seite nicht mehr weit von einander entfernt sind. Das muskulöse Eichelcoelom geht nach hinten in einen rechten Blindsack aus, während sich der entsprechende linke Teil in die unpaare Eichelpforte mit dem Porus fortsetzt.

Entwicklung: nur eine Entwicklungsstufe bekannt (etwa einer älteren *Tornaria Krohnii* entsprechend).

Fundort: Siboga-Stationen 144, 165, 185, sämmtlich im Gebiet der *Molukken*, etwa zwischen Damar und Mysol.

Bemerkung: Das Material, welches Spengel vorlag, war in Formol conserviert und mangelhaft erhalten. Daher seine unsicheren Angaben über die Augen, Scheitelplatte, Darm, daher konnte den Abbildungen (9, p. 123, fig. S, T, U) nicht ein einzelnes Exemplar zugrunde gelegt werden, sondern dieselben sind „schematische Ansichten nach mittels Zeichenapparat entworfenen Skizzen".

Willeys Tornaria von New Britain. (*Tornaria Willeyi*).

Grösse: ? [Ausser der Angabe, dass die Figuren bei 12 facher Vergrösserung gezeichnet sind, wird nichts darüber bemerkt].

Äussere Merkmale: Obere dorsale Loben mit circa 24, obere ventrale Loben mit circa 18 Tentakeln besetzt.

Ventralsattel sehr niedrig, flach.

Laterallobus breit mit circa 10 *Tentakeln besetzt, unterer Dorsallobus eine schmale tentakellose Rinne* (?).

Ventralband (spätere Kragenregion) sehr breit.

Circulärer grosser Wimperkranz verhältnismässig klein.

Scheitelplatte? Analfeld mässig vorgewölbt.

Augen liegen nicht in typischer Lage, sondern *innerhalb der ventralen Area.* (?)

Innere Organe: Darm sehr klein und schmal, Eichelcoelom sehr gross, muskulös, Eichelporus tief gelegen.

Coelome ?

Herzblase /\ förmig.

Sporne ?

Entwicklung: nur 1 Stadium bekannt.

Fundort: Blanche Bay and off the small coral islands (Pigeon Island), New Britain.

Bemerkung: Von WILLEY's Tornaria liegt eigentlich keine Beschreibung vor, sondern die wesentlichen Merkmale — soweit dieselben von WILLEY festgestellt wurden — sind nur aus seiner sehr oberflächlichen Vergleichung mit der *Tornaria Grenacheri* SPENGELS und aus seinen 4 Abbildungen fig. 7, p. 286 zu erkennen.

„Among the external points of difference between my Tornaria and the *T. grenacheri* figured by SPENGEL may be mentioned those connected with the position of the eyes and the inferior dorsal lobe of the ciliated band. (Textfig. 4). In my Tornaria there is no such sharply defined lobe, but a groove passes continuously round from the lateral lobe of the ciliated band across the dorsal middle line. This groove is overhung by the anterior body of the Tornaria and appears in fresh surface view as a little more than a line. In MORGANS Tornaria the dorsal edge of the lateral lobe is entire there being no inferior dorsal lobe proceeding from it".

Das ist WILLEY's ganze „Beschreibung".

Der Verlauf der Wimperschnur wäre also ganz anders wie bei allen übrigen Tornarien, worauf SPENGEL bereits aufmerksam gemacht hat (9, p. 125). Während die Wimperschnur bei allen bekannten Tornarien continuirlich ist, wäre der Verlauf desselben bei der WILLEY'schen Tornaria unterbrochen. „Ich muss daher annehmen", schreibt SPENGEL (l. c.) „dass WILLEY's Beschreibung in diesem für die Charakterisierung einer Tornaria wichtigen Punkte ungenau ist." Ich stimme SPENGEL darin vollkommen bei und bin der Meinung, dass der abweichende Befund WILLEY's nur auf einen Beobachtungsfehler zurückzuführen ist.

Was die Augen betrifft, so schreibt WILLEY in der Figurenerklärung: „The eyes in (fig. D) are seen to lie within the limits of the ventral area bordered by the ciliated band. In other species they tend to lie centrally between the dorsal and ventral area." Dies stimmt allerdings für seine Figur D, betrachten wir jedoch seine Figuren A und B so sind in denselben die Augen ganz typisch am Apex eingezeichnet, je ein Auge zu beiden Seiten des das Eichelcoelom mit der Scheitelplatte verbindenden elastischen Stranges (*a m*) wie bei allen übrigen Tornarien. Ich muss daher WILLEY's Angaben betreffs der Augen gleichfalls für unsicher halten, ebenso seine Bemerkung betreffs des Pericards („note its /\-shape").

In WILLEY's Beschreibung sind endlich Angaben über die Grösse und die Coelome nicht enthalten, sowie die 4 Figuren augenscheinlich in verschiedenen Maasstabe gezeichnet.

Im ganzen also eine sehr ungenaue Beschreibung, die sehr wesentliche Merkmale unberücksichtigt lässt und sicher unrichtige Angaben enthält.

Dennoch scheint hier eine von der *Tornaria Sibogae* SPENGEL's verschiedene Form vorzuliegen, da sie sich von ihr durch den sehr niedrigen Ventralsattel, die tiefe Lage des Eichelporus, und den mit 10 Tentakeln besetzten Laterallobus unterscheidet (SPENGEL). Ich füge noch bei, dass bei Tornaria WILLEYI das Praeoralfeld viel breiter, der circuläre primäre Wimperkranz verhältnissmässig viel schwächer ausgebildet, das Analfeld und der Magen viel kleiner ist. Ferner liegt der Hydroporus bei Tornaria WILLEYI links, bei *T. Sibogae* rechts von der Herzblase; die Herzblase ist bei *T. Sibogae* rundlich, bei WILLEY's Form hat sie die Gestalt eines $\wedge$.

Weldons Kleine Tornaria von Bimini Island
(Bahamas Bank).

MORGANS *„Bimini" Tornaria.*
(*Tornaria Weldoni*).

Grösse: *Klein*, etwas mehr als halb so gross wie die *„Bahamas" Tornaria* MORGANS (nach der Abbildung Taf. I. fig. 3).

Äussere Merkmale: *obere dorsale Loben mit* 5, *ventrale Loben mit* 6 *kurzen Tentakeln besetzt.*

Untere Dorsalloben?

Lateralloben breit, tentakellos.

Ventralsattel niedrig, ziemlich breit.

Ventralband nicht sehr breit.

Analfeld flach.

Secundärer Wimperring?

Scheitelplatte? *Verlauf der Wimperschnüre* nicht wie bei der grossen Bahamas Tornaria sondern *mehr wie bei der New England Tornaria,* indem dieselben in der Region der Augen nicht parallel laufen, sondern convergieren und dort verschwinden.

Innere Organe: 3 teiliger Darm.

Rumpf- und Kragencoelome dem Darm anliegend. Wassersack gut ausgebildet, mit der Apikalplatte durch einen contractilen Faden verbunden, durch den Eichelporus nach aussen mündend.

Entwicklung: Von dieser kleinen Tornaria sind ausser diesem, etwa

einer älteren *Tornaria Krohnii* entsprechendem Stadium MORGANS, noch ältere Stadien durch WELDON bekannt, die unmittelbar der Metamorphose vorangehen oder derselben bereits angehören. Ausser der geringen Grösse (0.8 mm. hoch, 0.4 mm. breit) zeigen diese älteren Stadien nichts characteristisches, für diese Form besonders eigentümliches.

Fundort: Bimini Island, Bahamas, [Aruba, Saba].

Bemerkung: Die obigen Angaben beruhen grössten Teils auf der schönen Abbildung MORGANS (4, Taf. I, fig. 12), denn er beschreibt die *Bimini Tornaria* nicht, sondern hebt nur ihre Unterschiede gegenüber die viel grösseren *Bahamas Tornaria* hervor. Im allgemeinen haben beide Formen denselben Habitus. Die *Tornaria Weldoni* ist jedoch viel kleiner, hat einen etwas anderen Verlauf des Wimperkranzes (?), geringere Anzahl von Tentakelchen, kürzere Tentakelchen, eine anders gebaute Apikalplatte, tentakellose Lateralloben und dem Darm anliegende Coelome.

Bezüglich des Verlaufes der Wimperschnur schreibt MORGAN (p. 25) folgendes: „The course followed by the anterior ciliated band differs from the Bahamas Tornaria in these respects: The lower horizontal limb of the anterior band does not turn forward at the middle of the side of the larva but continues toward the dorsal surface. Before reaching the mid-dorsal line it turns back again (on each side) to follow a parallel line as far as the middle of the side of the larva. Then it turns forward along the middle lateral area. The course of the band after this follows the path characteristic for Tornaria".

Ich bin mir nicht recht klar darüber geworden, was mit dieser Beschreibung gemeint ist. Ich glaube dieselbe so zu verstehen, dass MORGANS *Bimini-Tornaria* ziemlich lange untere Dorsalloben besitzen soll — was aus der Abbildung der in Seitenansicht dargestellten Larve nicht ersichtlich ist — die bei der Bahamas-Tornaria fehlen.

Gegenüber der Beschreibung MORGANS ergeben sich bei meinen *Tornarien Weldoni* von Saba und Aruba folgende Unterschiede:

1. Untere Dorsalloben sehr tief (vielleicht entfällt dies).
2. Ventralsattel hoch.
3. Analfeld vorgewölbt.
4. Secundärer circulärer Wimperring.
5. Bau der Scheitelplatte.

Trotz dieser Abweichungen beider Formen von einander halte ich dieselben doch für identisch.

Von der ebenfalls kleinen *Tornaria ritteri* unterscheidet sich die *Tornaria Weldoni* durch die ganz andere Körperform, die flache Analscheibe, den tentakellosen Laterallobus und das starke Pigment.

Weldons grosse Tornaria von Nassau, New Providence. Bahama Bank.
MORGANS *Bahamas Tornaria von North Bimini, Bahamas.*
(*Tornaria Morgani*).

Grösse: Höhe 4—4½ mm. [jüngstes Stadium 1¼ mm. hoch, etwas weniger breit].

Äussere Merkmale: obere dorsale und ventrale Loben mit circa 25 Tentakeln besetzt.

Ventralsattel nicht hoch.

Kein unterer dorsaler Lobus vorhanden. Laterallobus tief, mit ca 10 Tentakeln besetzt.

Analfeld eine ganz flache Scheibe. Secundärer Wimperkranz nur auf Schnitten nachweisbar.

Apicalplatte: „In the apical plate the anterior ciliated band breaks into four free ends, not united across from right to left and those on one side running parallel to one another".

Augen compliciert gebaut.

Pigmentflecke in der circumoralen Area im Schwinden (bei jüngeren Stadien stark ausgebildet).

Innere Organe: 3 teiliger Darm, relativ klein, Magen schmal.

Wassersack gross, mit Hydroporus, durch elastischen Strang mit Apicalplatte verbunden.

Coelome: Rumpf- und Kragencoelome nur auf Schnitten gesehen, stets entfernt vom Darm, in der Nähe des circulären Wimperkranzes oder des Ektoderms. Sporne gross.

Entwicklung: ältere Stadien der Metamorphose von WELDON, jüngere Stadien mit ca. 8 Tentakeln ohne Coelom bis einschliesslich der Metamorphose von MORGAN beobachtet.

Fundort: Bimini, Nassau, Bahamas, (Aruba, Saba) Die *Tornaria Morgani* von Aruba und Saba unterscheidet sich von der typischen *T. Morgani* durch folgende Merkmale:

1. durch die Grösse, (5—6 mm).
2. Tentakel etwas länger, etwas geringer an Zahl.
3. Ventralsattel hoch und schmal.
4. Analfeld nicht so hoch.

C. Geographische Verbreitung der tentaculaten Tornarien.

SPENGEL, der allerdings, mit einigem Zweifel, sämmtliche tentaculate Tornarien für einer einzigen Art angehörig betrachtet hat (3, p. 379), — ein Irrtum, den er später selbst zugegeben hat (im Sibogawerk 9, p. 124) —, schreibt ihnen circumterrane Verbreitung zu. Nachdem sich jedoch unter denselben eine ganze Anzahl wohl cha-

B. SYNOPSIS DER TENTACULATEN TORNARIEN.

	Höhe in mm.	Tentakel an Dorsalloben	Untere Dorsalloben	Lateral Loben	Ventral Sattel	Analfeld	Scheitel platte	Augen	Pigment	Coelome	Sporne	Fundort
Tornaria Willeyi	?	18—24	Schmale Rinne? tentakellos	breit mit 10 Tentakeln	niedrig flach	mässig vorgewölbt	?	in ventraler Area	—	?	?	New Britain. Pacific
Tornaria Spengeli	3	20	tief tentakellos	tief tentakellos	hoch schmal	vorgewölbt	?	?	—	dem Darme anliegend	—	Molukken, Pacific
Tornaria Chierchiai	5	25—30	tief ohne Tentakel	mit 8 Tentakeln	hoch schmal	flach	breites Rechteck	compliciert	stark	fern vom Darm, am Wimper-ring oder Ektoderm	gross	Zwischen Sandwich und Marshall, Ins. Pacific
Tornaria Grenacheri	5–9	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	Cap verdische Inseln, Atlantic
Tornaria Weldoni *)	? klein	5—6	?	breit tentakellos	niedrig breit	flach	?	?	—	dem Darme anliegend	—	Bimini Island Bahamas, Atlantic
Tornari Morgani *)	$4^1/_2$	25	fehlen	tief mit 10 Tentakeln	nicht hoch	flach	breites Rechteck	compliciert	ge-schwun-den	fern vom Darm, am Wimper-ring oder Ektoderm	gross	Ebenda
Tornaria Ritteri 1.	1,9	4—6	?	1 2 Paar Tentakel?	?	?	wie bei der New England Tornaria	weit ent-fernt von einander	—	?	—	Avalon, Sta-Catalina Süd Californien, Pacific
Tornaria Ritteri 2.	2,32	6–8	?	1 Paar Tentakel	hoch	vorgewölbt	?	?	—	?	—	Ebenda
Tornaria sp.?	Nach äusserlicher Untersuchung von „*Tornaria grenacheri*" nicht unterscheidbar, von HERBST und DRIESCH bei Ceylon gefangen. (SPENGEL).											

*) *Anmerkung.* Hier sind nur die Angaben in der Literatur aufgenommen. Die Unterschiede der mir vorliegenden von den typischen Tornarien sind oben auf S. 247 und S. 248 angegeben. Als Fundorte kommen noch Aruba und Saba hinzu.

rakterisierter Arten unterscheiden lässt, erweist sich diese Annahme als irrtümlich und mit der Unrichtigkeit der Praemissen sind natürlich auch die Schlussfolgerungen und Combinationen, die Vanhöffen an die angebliche circumterrane Verbreitung der einen Tornaria species geknüpft hat, gegenstandslos geworden. (7, p. 86, sowie Naturw. Wochenschr. Bd. XII, N°. 51, S 618). Nehmen wir die beiden tentakulaten Tornarien von der Westafrikanischen Küste und den Gewässern von Ceylon, über die wir ausser einigen Andeutungen Spengels fast gar nichts näheres wissen, als tatsächlich existierend an, so ergibt sich, dass *alle tentaculaten Tornarien nur in den warmen tropischen oder subtropischen Meeren vorkommen.* Nur aus dem romanischen Mittelmeer sind bisher keine tentaculaten Tornarien bekannt geworden. Auch in den kalten Meeren sind tentaculate Formen nicht nachgewiesen. Die tentaculaten Tornarien sind also echte Warmwasserformen, die im Litoral aller warmen Meere ihr Verbreitungsgebiet haben.

D. Verwandtschaft der tentaculaten Tornarien unter einander.

Von keiner einzigen tentaculaten Tornaria lässt sich zur Zeit mit Sicherheit angeben, zu welchem erwachsenen Tiere sie gehört. Da überdies die Mehrzahl der Tornarienspecies nur unvollkommen bekannt ist, kann man vorläufig über verwandtschaftliche Beziehungen derselben untereinander nur wenig sagen. Für die Beurteilung der Verwandschaft sind die Coelomverhältnisse von ausschlaggebender Bedeutung. In dieser Hinsicht können unter den tentaculaten Tornarien zwei Gruppen unterschieden werden: solche mit dem Darm anliegendem Coelom und solche bei denen dasselbe weit entfernt vom Darme periphér am Wimperring oder dem Ektoderm anliegend ausgebildet ist.

Zur ersteren Gruppe gehören *Tornaria Spengeli* und *Weldoni*, zur 2. Gruppe *T. Chierchiai* und *Morgani*. Die übrigen Formen lassen sich vorläufig noch nicht in diese Gruppen einteilen, da die Coelomverhältnisse bei ihnen nicht näher bekannt sind.

Die verschiedene Lage der Coelomsäckchen in beiden Fällen macht eine verschiedene Entstehungsweise derselben wahrscheinlich.

Bei *T. Spengeli* und *Weldoni*, welche die Coelomsäckchen in ganz gleicher Lage haben wie die *Tornaria Krohnii* des Mittelmeeres, dürften dieselben auch in gleicher Weise entstehen, nämlich durch Abschnürung von dem Darme.

Bei *T. Morgani* und *Chierchiai* ist dagegen die Entstehung der Coelomsäckchen aus Mesenchymzellen anzunehmen.

In der ersten Gruppe entstehen die Coelomsäckchen entodermal, bei der zweiten sind sie mesenchymatischen Ursprungs.

Tornaria *Morgani* und *Chierchiai*, welche auch in anderen Merkmalen mit einander übereinstimmen, sind jedenfalls nahe verwandte Formen.

Weiteres lässt sich vorläufig über die Verwandschaft der tentaculaten Tornarien untereinander nicht sagen.

Für die Ueberlassung der schönen, vortrefflich conservierten Planktonproben erlaube ich mir H. Prof. Dr. MAX WEBER meinen besten Dank zu sagen. Herrn Universitätszeichner ADOLF KASPER, Wien, der die Abbildungen nach meinen Skizzen und Angaben an Hand des Originalmateriales ausführte, sage ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank.

IV. *Replik auf einige Bemerkungen* SPENGELS.

Ich benütze diese Gelegenheit, um auf einige Bemerkungen SPENGELS, enthalten in seinem Referat (16, p. 55—57) über meine vorläufige Mitteilung (13), zurückzukommen.

Zunächst erklärt sich SPENGEL mit den von mir gebrauchten Bezeichnungen, „*Tornaria Mülleri*-Stadium" und „*Tornaria Krohnii*-Stadium" an Stelle seiner „*Tornaria Mülleri*" und „*Tornaria Krohnii*" nicht einverstanden, in dem sich seine Bezeichnungen auf „die voll entwickelten pelagischen Larven", nicht auf „Durchgangsstadien" beziehen. Ferner sei für *Tornaria Mülleri* die Tatsache charakteristisch, dass „ihr Wimperapparat auf dieser Stufe stehen bleibt und keine Secundär- und keine Lateralloben bildet, wie es bei Tornaria Krohnii geschieht, die eben in ihrem fertigen Stadium von der fertigen *T. Mülleri* verschieden ist".

Demgegenüber muss ich neuerdings erklären, dass ich meine Bezeichnungsweise aufrechthalte.

Die adriatische *Tornaria Mülleri* und *Krohnii* gehören in den Entwicklungskreis eines Tieres, des *Balanoglossus clavigerus*, was ich durch Züchtung nachgewiesen habe (14, 15). Nach SPENGEL gehört die Neapler *Tornaria Mülleri* und die *Tornaria Krohnii* nicht in den Entwicklungskreis desselben, sondern zweier verschiedener Enteropneusten. Nun habe ich aber durch Vergleich der Gradenser und Neapler Larven mit grosser Wahrscheinlichkeit feststellen können, dass sie identisch sind.

Die von SPENGEL behauptete geringere Entwicklung der Secundärloben bei der adriatischen Form kommt gegenüber der weit gehenden

Uebereinstimmung in anatomischer Hinsicht, (vergl. meine Ausführungen (15, p. 281/281)) wohl kaum als specifisches Unterscheidungsmerkmal in Betracht. Dass der Gradenser *Balanoglossus* eine von *clavigerus* verschiedene Art ist, wäre ja möglich, ist aber noch zu beweisen. Aus der Identität der adriatischen und Neapler Tornarien ergibt sich als logische Consequenz, dass auch die Neapler Formen zu einander gehören u. z. zu *Balanoglossus clavigerus*, der ja gleichfalls in der Umgebung Neapels nachgewiesen ist.

Ausser *Balanoglossus* (Ptychodera) *clavigerus* ist von Neapel und Umgebung nur *Ptychodera minuta Kow.* bekannt, die wahrscheinlich die von SPENGEL als *Tornaria dubia* beschriebene Larve hat. Es sprechen also alle Umstände für meine Auffassung.

Die übrigen Bemängelungen SPENGELS sind von geringerer Wichtigkeit. Es ist richtig, dass die Bezeichnung des analen Teiles der Tornaria durch mich als „rückwärtig" zu beanstanden ist. Aber auch MORGAN spricht wiederholt in gleichem Sinne von „backwards" und es ist fraglich, ob die von SPENGEL gewählte Bezeichnung „unterer", „oberer" Teil passender und klarer ist. Jedenfalls dürfte doch jeder Leser wissen, welche Körperpartie gemeint war und das ist doch die Hauptsache.

Dass die erste Coelomanlage richtiger als „Kragen-Rumpfcoelom" zu bezeichnen wäre, da sich die Kragencoelome von derselben abschnüren, während ich die erste Coelomanlage als „Rumpfcoelom" bezeichnet habe, gebe ich ohne weiteres zu.

Leiden, Ende April 1920.

LITERATURVERZEICHNIS.

1. 1887. WELDON W. F. R., Preliminary note on a Balanoglossus-Larva from the Bahamas. Proceedings Roy. Soc. London. Vol. XLII.

2. 1891. MORGAN, T. H., The growth and development of Tornaria. Journal of Morphology, Boston, Vol. V.

3. 1893. SPENGEL, I. W., Die Enteropneusten des Golfes von Neapel, Fauna und Flora des Golfes v. Neapel. 18. Monographie, Berlin

4. 1894. MORGAN T. H, The development of Balanoglossus. Journ. of Morphol., Boston, Vol. IX.

5. 1894. RITTER WM. E., On a new Balanoglossus Larva from the coast of California and its possession of an endostyle. Zool. Anz. XVII. Jahrg. Leipzig.

6. 1899. WILLEY ARTHUR, Zoological Results. 16. Enteropneusta from the South Pacific, with notes on the west Indian species, Cambridge.

7. 1903. VANHÖFFEN ERNST, Die craspedoten Medusen der deutschen Tiefsee Expedition 1898—1899. I. Trachymedusen.

8. 1904. RITTER WM. E., and B. M. DAVIS, Studies on the ecology, morphology and speciology of the young of some enteropneusta of Western North America. Univ. Calif. Publ. Zool. Vol. 1.

9. 1907. SPENGEL I. W., Studien über die Enteropneusten der Siboga Expedition. 26. Monogr. Leiden.

10. 1911. HENSEN VICTOR. Das Leben im Ozean nach Zählung seiner Bewohner. Ergeb. d. Planktonexp. Bd. V. O. Kiel, Leipzig.

11. 1911. STIASNY GUSTAV, Ueber adriatische Tornaria- und Actinotrocha-Larven. Sitz. Ber. Akad. Wien. 120. Bd. Wien.

12. 1913. SPENGEL I. W., Enteropneusta. In: Handwörterb. der Naturwissenschaften. 3. Bd. Jena.

13. 1913. STIASNY GUSTAV, Studien über die Entwicklung von Balanoglossus clavigerus D. Ch. (Vorläufige Mitteilung). Zool. Anz. 42. Bd. Leipzig.

14. 1914. ——, Studien über die Entwicklung der Balanoglossus clavigerus Delle Chiaje. I. Die Entwicklung der Tornaria. Zeitschr. f. wiss. Zool. 110. Bd. Leipzig.

15. 1914. ——, Studien über die Entwicklung des Balanoglossus clavigerus Delle Chiaje II. Darstellung der weiteren Entwicklung bis zur Metamorphose. Mitt. Zool. Stat. Neapel 22. Bd. N°. 8. Berlin.

16. 1915. SPENGEL I. W., Referat über die unter 13. erwähnte Arbeit. Zentralbl. f. Zoologie Bd. 5. Leipzig u. Berlin.

TAFELERKLÄRUNG.

Tafel I. stellt Entwicklungsstadien von *Tornaria Weldoni* dar.

Tafel II. stellt Entwicklungsstadien von *Tornaria Morgani* dar.

Die einzelnen Figuren werden im Texte erläutert.

Zoölogie. — De Heer J. F. VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. O. ANTONIUS: *„Bemerkungen über einige Säugetierschädel von Sardinien.”*

(Mede aangeboden door den Heer J. BOEKE).

Das Zoologische Laboratorium der Universität Groningen bezog im Jahre 1911 durch einen Herrn GIRTANNER eine Serie von Säugetierschädeln aus Sardinien, die z. t. Haustieren, z. t. aber wilden Formen angehören. Die ersteren sollen in anderem Zusammenhang gewürdigt werden, über drei der letzteren aber möchte ich in folgendem einige Bemerkungen machen, weil sie mir besonderes Interesse zu verdienen scheinen.

Handelt es sich bei ihnen doch um jene merkwürdigen Formen, die durch ihre geringe, hinter jener der festländischen Verwandten weit zurückbleibende Grösse die Aufmerksamkeit seit langem auf sich gezogen und viel zu der Entstehung der Schlagworte, „Inselzwerg, Inselkümmerer” u. s. w. beigetragen haben. Zwei der Schädel gehören dem Rothirsche (Cervus elaphus corsicanus Erxl.), einer einem zwerghaften Individuum des europäischen Wildschweines (Sus scrofa L.) an. Ich gebe in den nebenstehenden Tabellen die wichtigsten Masse aller drei Schädel, neben jenen des Schweines — aus weiter unten ersichtlichen Gründen — auch noch die eines indischen Wildschweinschädels der Vittatus-Gruppe.

Für die *Hirsche* stand mir zur Zeit der Untersuchung kein Schädel eines erwachsenen festländischen Verwandten zur Verfügung, so dass ich auf direkte Massvergleichung verzichten muss. Immerhin fällt gegenüber dem Typus des mitteleuropäischen Rothirsches, wie er mir durch frühere Untersuchungen an rezentem und prähistorischem Materiale sehr geläufig ist, sofort die viel geringere Grösse auf, die jene eines starken Damhirsches nicht viel übertrifft, weiterhin aber auch gewisse Abweichungen in den Proportionen. Die Schädel sind nicht nur im ganzen kleiner, sondern namentlich im Facialteile viel kürzer, während die Breitendimensionen, insbesondere jene des Cranialteiles, von der allgemeinen Verkleinerung viel weniger betroffen erscheinen. Mit anderen Worten: sie entfernen sich in ihrem morphologischen Bild bedeutend weniger vom juvenilen Schädel, als solche der grossen europäischen Rothirschrassen oder gar solche der osteuropäisch-vorderasiatischen Marale: sie sind auf einem frühen Entwicklungsstadium stehen geblieben. Hievon abgesehen zeigen sie

keine besonderen morphologischen Verschiedenheiten. Caninen sind bei beiden Geschlechtern entwickelt, das Backenzahngebiss muss im Verhältnis zur geringen Gesamtgrösse sehr stark genannt werden, ist also von der allgemeinen Grössenreduktion nicht in gleichem Masse betroffen worden.

Der Schweineschädel gehört einem weiblichen Individuum an, das jedenfalls erwachsen gewesen ist, denn der letzte Molar steht nahezu voll in Usur. Die Gesamtform, insbesondere aber die schräge Stellung des Hinterhauptes ist die gleiche wie beim gewöhnlichen mitteleuropäischen Wildschwein, obwohl das Profil vor den Augen leicht konkav, die Stirnfläche über denselben aber in querer Richtung schwach konvex erscheint: offenbar auch eine Erinnerung an ein ontogenetisch früheres Entwicklungsstadium. Am interessantesten ist das Tränenbein, weil es ganz ausgesprochen den langen, niedrigen Typus des echten Sus scrofa zeigt und keinerlei Anklänge an die kürzere und höhere Form der Vittatus-Gruppe aufweist. Auch die verhältnismässig geringe Grösse und namentlich schmale Form des letzten Molaren ist ganz Scrofa-artig und verschieden von dem Typus des verglichenen Vittatus-Schädels. Die Backenzahnreihen liegen genau parallel, ohne also nach vorne zu divergieren, was ebenfalls einen gewissen Unterschied gegenüber Sus vittatus ergibt. Die Eckzähne sind infolge des weiblichen Geschlechtes klein, die für das männliche Geschlecht charakteristischen Unterschiede zwischen Sus scrofa und vittatus daher nicht zu konstatieren. Es erweist sich also dieser Schädel als solcher eines Wildschweines der Sus scrofa-Gruppe, ohne irgendwelche Anklänge an Sus vittatus. Dies ist deshalb interessant, weil auf Sardinien zwei dem Schädelbau nach verschiedene Wildschweintypen auftreten, eine gewöhnlich grössere von Scrofa-Habitus und eine kleinere mit engeren Beziehungen zu Sus vittatus. Der vorliegende Schädel beweist nun, dass auch die Scrofa-Rasse Sardiniens gelegentlich in ausgesprochenem Zwergwuchs auftritt. Das Vorkommen zweier verschiedener Wildschweine auf Sardinien glaubte noch C. Keller [1]) so auffassen zu müssen, dass nur die eine (Sus scrofa) ursprünglich wild, die andere dagegen aus entlaufenen Hausschweinen asiatischer Abstammung entstanden sei. Heute wissen wir durch die Untersuchungen S. Ulmanskys [2]), dass Wildschweine mit engeren Beziehungen zum indischen Sus vittatus viel weiter nach Westen verbreitet sind, als man früher angenommen hatte: mindestens bis Bosnien. Wahrscheinlich sind die nordafrikanischen Wildschweine,

[1]) Abstammung der ältesten Haustiere, Zürich 1902.

[2]) Mitteilungen d. landwirtsch. Lehrkanzeln a. d. K. K. Hochsch. f. Bodenkultur, Wien 1913.

über die bisher bedauerlich wenig Untersuchungen vorliegen, auch nichts anderes als derartige Uebergangsformen zwischen Sus scrofa und dem eigentlichen Sus vittatus, wie sie ULMANSKY aus Bosnien nachgewiesen hat. Das Vorkommen zweier verschiedenen Typen auf dem immerhin kleinen Areal von Sardinien ist mit der Lage dieser Insel zwischen zwei Kontinenten leicht zu erklären: gelegentlich der ohne Zweifel wiederholt eingetretenen Landverbindungen konnten von Norden wie von Süden Formen einwandern. Zu ersteren gehören neben Sus scrofa vor allem der Rothirsch und der Muflon, zu letzteren neben dem Vittatus-ähnlichen Wildschweine die sardinische Wildkatze.

Die Untersuchung der vorstehend erwähnten zwerghaften Schädel war mir deshalb besonders interessant, weil sie mir Gelegenheit bot zu neuerlicher Beschäftigung mit der schon einmal von mir behandelten Frage der „insularen Zwergformen" unter den Säugetieren [1]). Es ist ja eine in der modernen Zoologie weit verbreitete Ansicht, dass grosse Säugetiere auf Inseln kleinere Lokalrassen bilden, als solche das benachbarte Festland bewohnen. Leider konnte ich nicht feststellen, wer diese Ansicht zuerst geäussert hat; am schärfsten ausgedrückt wurde sie wohl von H. SIMROTH, der in seiner „Pendulationstheorie" geradezu von einem „Gesetz der biologischen Abhängigkeit zwischen der Körpergrösse eines Tieres und des Areals, auf dem es lebt", spricht. Ich habe schon vor Jahren betont, dass es ein solches „Gesetz" m. E. nicht gibt, dass es vielmehr ein — allerdings menschlich durchaus begreiflicher — Beobachtungsfehler ist, wenn wir nach Prägung eines bestimmten Schlagwortes nur alle jene Fälle in unserem eigenen Bewusstsein registrieren, die ihm zu entsprechen scheinen, während die gegenteiligen uns gar nicht oder doch nur bei spezieller Beschäftigung mit der Frage zum Bewusstsein kommen. Ganz abgesehen von dem Verhalten der Reptilien und fluglosen Vögel, die bekanntlich gerade auf Inseln sehr grosse Formen erreicht haben, lassen sich auch unter den Säugetieren selbst so viele Fälle anführen, die dem fraglichen „Gesetz" widersprechen, dass dieses fast ebensoviele Ausnahmen aufweisen würde. Ich erinnere — um nur einige anzuführen! — an die mächtigen Esel von Malta und Pantelleria, ein richtiges Gegenstück zu dem Standardbeispiel der Shetlandponies, an den Riesenbären von Kadiak, die grösste Form der Braunbärengruppe, an den Canis antarcticus der Falklandsinseln, der seine festländischen Verwandten, die sogen. Azarafüchse, an Grösse weit übertrifft. Damit soll natürlich nicht das häufige Vorkommen von *Zwergformen auch auf Inseln* bestritten, sondern nur behauptet werden, dass sie ihre

---

[1]) Verhandl. Zool. Bot. Gesellsch. Wien, 1913.

Entstehung nicht einem mehr oder minder mystischen „Naturgesetz" verdanken, sondern genau den gleichen durchaus realen Umständen wie auf dem Festlande: eine Verschlechterung der Lebensbedingungen wird auf dem Festlande ebenso zu einem Rückgang in der Grössenentwicklung führen, wie auf einer Insel und dem Leben auf kleinen Inseln mag nur insoweit noch eine besondere Bedeutung für eine solche Grössenreduktion beizumessen sein, als es eine Abwanderung verhindert. Dieser Umstand kann eine Rolle gespielt haben bei der Entstehung der quartären Zwergelefanten in den Mittelmeerländern. Aber sogar in diesem Falle ist der Einfluss des Insellebens, so denkbar er an und für sich auch wäre, nicht ganz sicher. Denn gerade auf Malta kam auch, wie Knochenfunde beweisen, der riesige Elefas antiquus vor und das gegenseitige Altersverhältnis beider Typen auf der Insel scheint mir nicht über jeden Zweifel erhaben festgesetzt. Aber sei dem wie immer — für Hirsch und Wildschwein müssen wir jedenfalls andere Ursachen annehmen, die zu der auffälligen Grössenreduktion geführt haben. Ich glaube, dass diese bei beiden Formen nicht auf ganz gleiche, aber doch auf ähnliche Umstände zurückzuführen ist.

Was zunächst den sardinischen Rothirsch anbetrifft, so ist es eine auffällige Tatsache für jeden, der nicht nur rezentes, sondern auch subfossiles Material untersucht, dass die ganze europäische Gruppe der Edelhirsche sich seit der Pfahlbauzeit in auffallendem Grössenrückgang befindet. Edelhirsche, wie sie Ruetimeyer [1]) beschrieben hat, von der Grösse des Riesenhirsches oder eines starken Pferdes, sucht man heute auch in den besten ungarischen oder ostpreussischen Jagdrevieren vergebens, und in den ehemals kaiserlichen Gehegen in Niederösterreich erlegte noch Kaiser Josef II. (1780—1790) Hirsche, die die Grösse starker Wapitis erreicht, wenn nicht übertroffen haben, wie die erhaltenen Geweihe beweisen, während heute auch die stärksten Hirsche jener Gegenden weit hinter diesem Masse zurückbleiben. Je weiter nach Süden und Südwesten wir die Gruppe verfolgen, umso auffälliger wird dieser Rückgang: spanische und italienische Hirsche, die zur internationalen Jagdausstellung nach Wien gesandt wurden, also für ihre Heimat jedenfalls stark waren, nahmen sich neben dem Durchschnitt ihrer mitteleuropäischen Verwandten wahrhaft kläglich aus! Auch der festländisch nordafrikanische Hirsch (C. elaphus barbarus Benn.) steht an Grösse hinter diesen weit zurück, obwohl er immerhin noch grösser ist als der sardinische.

Dass dieser allgemeine Grössenrückgang der europäischen Rothirsche seine Ursache in einer Verschlechterung der Lebensbedingungen haben

[1]) Fauna der Pfahlbauten, Basel 1861.

muss, halte ich für sicher. Worin diese zu suchen ist, dafür gibt uns eben die auffallende Degeneration der südeuropäischen Hirsche einen Anhaltspunkt: es ist der Rückgang des europäischen Waldes in seiner ursprünglichen Form, der in Südeuropa fast ganz verschwunden, bezw. in Macchie verwandelt ist, während er in Mitteleuropa nur sehr vereinzelt seinen alten Habitus bewahrt, meist aber in den des Kulturforstes geändert hat. Dass sich viele, aber nicht alle Hirsche von Korsika und Sardinien durch sehr kurze, stämmige Beine auszeichnen, dürfte eine Folge des Lebens auf steilem felsigen Terrain sein; jedenfalls trägt auch diese Eigentümlichkeit viel dazu bei, die Tiere kleiner erscheinen zu lassen. Im Gewichte dürfte zwischen einem Durchschnittshirsch von Sardinien und einem normalen Berberhirsch kein nennenswerter Unterschied sein.

Aehnlich dürften die Ursachen gewesen sein, die zur Grössenreduktion der Schweine führten. Auch in diesem Falle haben wir einen allgemeinen Rückgang zu beobachten, aber er wird vielfach aufgehoben durch die Neigung der Wildschweine, einzelne Riesenindividuen hervorzubringen, ferner durch ihre ausserordentlich rasche Reaktion auf Veränderung der Futterverhältnisse — eine Reaktion, die sich naturgemäss ebenso gut in allgemeiner Grössenzunahme als auch im Gegenteile äussern kann. Es ist eine in Wildschwein-reichen Gegenden jedem erfahrenen Jäger bekannte Tatsache, dass einige aufeinander folgende Jahre mit besseren Eichel-oder Buchel-Ernten auch eine Zunahme der Wildschweine an Zahl und Grösse hervorrufen. Wenn wir also die Zwerghaftigkeit des sardinischen Wildschweines in der Hauptsache auf die gleiche Ursache zurückzuführen haben werden, wie jene der Rothirsche, so mag nebenher auch noch die rasche Degeneration, mit der gerade die Schweine auf nahe Inzucht reagieren, mitgewirkt haben. Andrerseits wird durch die oben angeführte rasche Grössenzunahme bei besseren Futterverhältnissen auch das gelegentliche Vorkommen einzelner grösserer Individuen erklärt, wie solche C. Keller erwähnt. Interessant wäre es, über die geographische Verbreitung beider auf der Insel festgestellten Schweinetypen etwas zu erfahren. Hierüber könnten aber nur sorgfältige systematische Aufsammlungen, wie sie bisher nicht vorliegen, Aufklärung bringen.

Zusammenfassend wiederhole ich, dass wir m. E. weder den Rothirsch noch das Wildschwein von Sardinien kurzerhand als „Inselkümmerer", „Inselzwerg", u.s.w. erklären können, dass vielmehr bei beiden die vorhandene Grössenreduktion auf andere, mit der Isolation gar nicht oder nur sehr indirekt zusammenhängende Ursachen zurückzuführen ist.

Herrn Prof. J. F. van Bemmelen bin ich für die Erlaubnis zur Untersuchung der Schädel zu Dank verpflichtet.

TABELLE 1.

Hirsche: ♂ Nr. XXVI der Sammlung, von Villagrande, Ogliastra, Sard., 7. IX. 1909. M_3 fast in voler Usur, Incisivgebiss vollständig gewechselt, Gabelgeweih.
♀ Nr. XXV der Sammlung, von Arzana, Ogliastra, Sard., 11. VII. 1910. M_2 eben im Durchbruch, I_1 gewechselt.

	♂	♀
Scheitellänge (von der Mitte der Hinterhauptschuppe zum Vorderrand der Pmx)	308	276
Basilarlänge	274	246
Länge von der Mitte der Hinterhauptschuppe zum Hinterrand der Orbita	122	110
Länge vom Vorderrand der Orbita zum Vorderrand der Pmx	170	153
„ der Nasalnaht	95	83
„ vom Gaumenrand zum Vorderrand der Pmx	178	158
„ der Backenzahnreihe	101	—
„ vom vordersten Pm zum C	48	50
„ des Lacrymale (obere Naht)	50	48
„ der Orbita	45	41
Höhe „ „	43	40
Grösste Breite des Craniums	80	80
„ „ an den Orbiten	130	118
Breite an den Gehöröffnungen	88	80
„ „ „ Caninen	53	44
Höhe des Foramen magnum	24	25
Breite „ „ „	21	25
Höhe des „Rosenstocks" („pedicel")	28	—
Umfang der „Rose" („burr")	ca 120	—
Höhe der „Stange" („beam")	367, 365	—
„Auslage" (distance „tip to tip")	377	—

TABELLE 2.

Schweine: ♀, Nr. XLV der Sammlung, Gairo, Ogliastra, Sard., 12. VII. 08
♀, Nr. XLVII der Sammlung, annähernd gleichaltriger typischer Sus vittatus-Schädel aus Ostindien.

	Sard.	Ind.
Basilarlänge	235	268
Profillänge (Hinterhauptschuppe: Spitze der Nas.)	269	320
Länge vom Hinterrand des Gaumens zum Vorderrand des Pmx	162	196
Länge der Backenzahnreihe	90	110
„ vom vordersten Pm zum Vorderrand d. Pmx	69	91
„ „ Vorderrand der Orbita zum Vorderrand d. Pmx	172	208
„ der Nasalia (Naht)	127	158
Grösste Breite an den Jochbogen	114	136
Breite der Hinterhauptschuppe	54	66
Grösste Breite über den Orbiten	83	85
Geringste „ „ „ „	62	61
Breite am Hinterrand der Alveolen von M_3	39	39
„ „ Vorderrand „ „ „ P_1	33	38
Höhe vom Foramen magnum zur Hinterhauptschuppe	87	102
„ von der Spitze der Proc. jug. zur „	128	150
„ des Jochbogens	30	41
„ des Tränenbeins	20	26
Länge „ „ an der oberen Naht	48	46
„ „ „ „ „ unteren „	24	25
Höhe des Foramen magnum	25	21
Breite „ „ „	19	22
Länge des Unterkiefers vom Gelenk zur Spitze der Inc.-Alveole	209	237
Höhe des Unterkiefers vom Gelenk zur Tischplatte	86	103
Grösste Breite des Unterkiefers in der gegend des M_2	71	88
Länge der Backenzahnreihe	86	114
„ des M_3 im Oberkiefer	24	30
„ „ „ „ Unterkiefer	26	38
Breite „ „ „ Oberkiefer	15	21
„ „ „ „ Unterkiefer	13	18

Zoolog. Laboratorium der Universität.

Groningen, Ende Juni 1920.

Natuurkunde. De Heer WERTHEIM SALOMONSON biedt eene mededeeling aan: „*De Grensgevoeligheid van den snaargalvanometer*". (2[de] mededeeling).

In de vergadering der Wis- en Natuurkundige afdeeling van 29 Juni 1918, Deel **XXVII** blz. 51 mocht ik een mededeeling doen over de grensgevoeligheid van den snaargalvanometer. Daarin wees ik op het feit, dat de gevoeligheid beperkt werd door den elasticiteits-coëfficiënt van het materiaal waaruit de snaar vervaardigd werd. Hierbij werd echter reeds opgemerkt, dat de werkelijk gevonden grenswaarden in alle gevallen niet onbelangrijk verschilden van de theoretisch berekende grenswaarden: deze laatste waren steeds kleiner dan de waargenomen getallen. Sindsdien is mij gebleken, dat voor deze verschillen een betrekkelijk eenvoudige verklaring bestaat. Behalve de elasticiteit van de snaar bestaat nog een andere kracht die de snaar poogt terug te voeren naar den evenwichtstoestand in het geval dat de snaar overigens zoo volledig mogelijk ontspannen is. Dit is de zwaartekracht. Hoewel het mij uiterst moeilijk toeschijnt een nauwkeurige berekening van dezen invloed te geven, kunnen wij zeer gemakkelijk een vrij nauwkeurige schatting van de grootte-orde van dezen invloed te verrichten. Daartoe nemen wij aan dat de snaar vrij opgehangen is in een homogeen magnetisch veld van de sterkte H, dat de snaar geheel zonder wrijving of weerstand in het ophangpunt beweeglijk is, dat de stroomtoevoer aan het ondereinde gewichtloos is, en eindelijk dat de snaar recht en geheel stijf is. De lengte zij l, de dikte d, de dichtheid van het materiaal zij γ. Op de snaar werkt dan, wanneer g de versnelling van de zwaartekracht voorstelt, een kracht $P = \frac{1}{4}\pi d^2 l \gamma g$. Wijkt de snaar zijdelings uit op de hierboven aangegeven wijze, waarbij het midden zich over een afstand h verplaatst, dan is de druk die de snaar naar den evenwichtstoestand terugvoert:

$$p_1 = \frac{1}{4}\pi d^2 l \gamma g \frac{2h}{l} = \frac{1}{2}\pi d^2 \gamma h g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Indien deze druk in evenwicht gehouden wordt door den stroom i, bij een snaarlengte l en een veldsterkte H, dan is

$$H_i l = \frac{1}{2}\pi d^2 \gamma h g$$

of

$$h = \frac{H_i l}{\frac{1}{2}\pi d^2 \gamma g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

In mijn vorige mededeeling vond ik de uitdrukking

$$h = \frac{H_i\, l^4}{6\, \pi\, E\, d^4} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

voor de uitwijking van het midden van een zooveel mogelijk ontspannen snaar, welke een elasticiteitscoëfficiënt E heeft en aan beide uiteinden geklemd is.

Indien wij deze beide laatste uitdrukkingen met elkander vergelijken, blijkt het dat de invloed van de dikte daarin op zeer verschillende wijzen voorkomt. Dunner maken van de snaar tot op de helft veroorzaakt volgens de eerste formule een verviervoudiging van de gevoeligheid, volgens de tweede wordt de gevoeligheid daardoor 16 maal grooter. De beteekenis hiervan ligt voor de hand. Bij zeer dikke snaren wordt de gevoeligheid beperkt door de elasticiteit in de eerste plaats, terwijl bij zeer dunne snaren de zwaartekracht in de eerste plaats beperkend werkt. Klaarblijkelijk bestaat er dus bij materiaal van elke bepaalde lengte ook een bepaalde dikte, waarbij de invloed van de zwaartekracht gelijk is aan die van de elasticiteit.

Door de beide uitdrukkingen van (2) en (3) aan elkaar gelijk te stellen kunnen wij gemakkelijk een uitdrukking vinden waaruit wij die grensdikte kunnen berekenen. Wij vinden dan:

$$d = \sqrt{\frac{l^3\, \gamma\, g}{12\, E}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Met behulp van deze formule kunnen wij de volgende tabel berekenen voor enkele voor snaren bruikbare materialen. Hierbij nemen wij aan een snaarlengte van 10 c.M. en een van 56 millimeter.

TABEL I.

	$\frac{E}{98.1.10^6}$	γ	d bij $l = 10$	d bij $l = 5.6$
Koper	11000	8.9	8.2 μ	3.4 μ
Zilver	7500	10.5	10.8 »	4.5 »
Goud	7500	19.5	14.7 »	6.1 »
Aluminium	6750	2.7	4.6 »	1.9 »
Platina	16500	21.4	10.3 »	4.3 »
Kwarts verzilv.	(6000)	(5.46)	8.7 »	3.6 »

De in deze tabel opgenomen waarde van E voor verzilverd kwarts houdt geen rekening met de verzilvering. De waarde opgenomen voor de dichtheid heeft betrekking op de massa gedeeld door het volume van een kwartssnaar die zoo dik verzilverd is dat juist de

maximale normaal-gevoeligheid daarmede bereikt is. (Zie mijne mededeeling in Pflügers' Archiv. Bd. 158 blz. 107 1914).

Bij een zilversnaar dikker dan 10.8 μ wordt dus de grensgevoeligheid voornamelijk beperkt door de elasticiteit, bij een dunnere snaar voornamelijk door de massa van de snaar, althans als de lengte 10 c.M. bedraagt: bij een lengte van 56 m.m. heeft bij een dikte grooter dan 4.5 μ de invloed van de elasticiteit meer beteekenis voor de beperking der gevoeligheid dan de massa. Nemen wij een snaar van 100 m.m. lengte en 21.6 mikron doorsnede, dan is de invloed die de elasticiteit uitoefent reeds 4 maal grooter dan die welke aan de massa zelve toekomt.

Het is gemakkelijk de invloeden door beide factoren uitgeoefend samen te voegen. Wij krijgen dan:

$$h = \frac{H_i\, l}{{}^1/_2\, \pi\, d^2 \gamma g + \dfrac{6\, \pi\, d^4 E}{l^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

als afwijking van het midden van een volkomen ontspannen, beiderzijds vastgeklemde snaar.

Met deze formule laat zich de volgende tabel berekenen, welke aangeeft hoe groot de uitslag is bij een veldsterkte van 10.000 Gauss, een snaarlengte van 10 c.M., en een snaardikte van 1 μ bij 1000 malige vergrooting, wanneer een stroom van 10^{-12} Ampère door de snaar vloeit. De vergrooting zij 1000 maal.

TABEL II.

Koper	0.72 mm
Zilver	0.62 »
Goud	0.34 »
Aluminium	2.27 »
Platina	0.33 »
Verzilv. kwarts	1.17 »

Op dezelfde wijze bereken ik voor een aluminiumsnaar van 2 μ doorsnede 56 m.m. lengte en een veld van 18000 Gauss een uitslag van 0.57 m.m. In mijn vorige mededeeling gaf ik aan, dat ik met een dusdanige snaar bij de genoemde veldsterkte een uitslag van 0.40 m.m. verkreeg. Wordt hierbij uitsluitend de elasticiteit als beperkende oorzaak in aanmerking genomen dan toont het te verwachten getal 1.20 m.m. meer verschil met de werkelijke waarnemingen, dan bij het in acht nemen van den invloed der massa van de snaar.

Natuurkunde. — De heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer W. KOSTER DZ.: *„Over de theorie der hysteresis volgens* VOLTERRA".

(Mede aangeboden door den Heer EHRENFEST).

§ 1. VOLTERRA behandelt in hoofdstuk VI van zijn „Leçons sur les fonctions de lignes" de elastische hysteresis. Bij de door hem daar ontwikkelde methode worden de vergelijkingen, die de componenten van de elastische spanningen uitdrukken als functies van de grootheden, die den toestand van het elastische medium bepalen, herzien. Deze vergelijkingen hebben in de klassieke elasticiteitsleer den algemeenen vorm:

Spanningscomponent = lineaire homogene combinatie van de deformatiegrootheden. (Wet van HOOKE). VOLTERRA vervangt deze betrekking door de vergelijking:

$$t_{ih}(t) = \Sigma\, b_{ih/rs}\, \gamma_{rs}(t) + \int_0^t \Sigma\, \psi_{ih/rs}(t\tau)\, \gamma_{rs}(\tau)\, d\tau.$$

Hierin stellen $t_{ih}(t)$ de elastische spanningen op het tijdstip t voor, terwijl $\gamma_{rs}(t)$ de deformatiegrootheden op dat tijdstip en $\gamma_{rs}(\tau)$ dezelfde grootheden op een veranderlijk tijdstip τ aanduiden. Verder zijn de b's en de ψ's coëfficiënten; de ψ's noemt VOLTERRA herediteitscoëfficiënten.

Wij zullen in het volgende laten zien, dat deze onderstellingen van VOLTERRA ten gevolge kunnen hebben dissipatie van energie; nl. in het geval, dat zijn onderstellingen physische beteekenis bezitten.

Verder merken wij op, dat de gedachte, die ten grondslag ligt aan de hypothese van VOLTERRA, die van afstandswerking in den tijd is. Immers de bijdragen tot die $\int_0^t \Sigma\, \psi_{ih/rs}(t\tau)\, \gamma_{rs}(\tau)\, d\tau$ worden geleverd door deformatie's γ_{rs}, die bestonden op tijdstippen τ in het verleden. Deze afstandswerking in den tijd heeft iets onbevredigends; het moet daarzonder kunnen. Als op een bepaald oogenblik de toestand *volledig* is bepaald, dan zegt ons het causaliteitsbeginsel, dat, wat er volgen zal, oòk vast moet liggen. Alleen natuurlijk zal bij een bepaalde voorgeschiedenis op een éens gekozen tijdstip een

andere toestand heerschen, dan bij een andere voorgeschiedenis. Wij zullen later trachten elastische hysteresis voor den dag te brengen zonder afstandswerking in den tijd aan te nemen.

§ 2. Gaan wij nu eens over tot de behandeling van de lineaire elastische trilling, herzien voor hysteresis volgens VOLTERRA.

Dan geldt voor deze beweging de vergelijking:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\psi(t,\tau)\,d\tau.$$

Nu toont VOLTERRA aan, dat i. h. a. bij elastische hysteresis $\psi(t,\tau)$ moet zijn een functie alléén van $(t-\tau)$, hoewel er hereditaire verschijnselen zijn, waarbij dat niet het geval behoeft te zijn [1]). Van deze laatste afziende, schrijven wij dus in het vervolg $\psi(t-\tau)$. Het feit, dat ψ dezen vorm heeft, is trouwens begrijpelijk genoeg: indien men aanneemt, dat het er voor het vervolg alléén maar op aan komt, hoè lang geleden zekere krachten gewerkt hebben en niet, op wèlke absolute tijdsoogenblikken precies dat het geval is, zal ook maar alleen het tijdsverschil $t-\tau$ optreden, of anders gezegd, we denken ons, dat het effect voor het vervolg hetzelfde zal zijn, als we zekere voorgeschiedenis (mèt haar vervolg) een translatie in den tijd doen ondergaan.

Nemen we nu verder in bovenstaande vergelijking (1) eens in het bijzonder voor ψ den vorm der functie

$$\psi(t-\tau) = A\,e^{-\frac{t-\tau}{q}}.$$

Deze onderstelling is plausibel, want de term

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\psi(t\,\tau)\,d\tau$$

verantwoordt den invloed van de voorgeschiedenis op den toestand op het tijdstip t; of gepreciseerd:

het element $x(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau$ van die integraal geeft weer de bijdrage van den toestand op het tijdstip τ tot de waarde van de versnelling op het tijdstip t, (de term $\frac{d^2x}{dt^2}$ in vergelijking (1)). Het zal duidelijk zijn, dat, naarmate het tijdstip τ t. o. v. het tijdstip t langer geleden is, die invloed kleiner moet zijn; dit klopt inderdaad met onze onderstelling voor ψ:

---

[1]) C. f. VOLTERRA l. c. p. 114.

$$\psi = A e^{-\frac{t-\tau}{q}},$$

want dit wordt nul voor $t-\tau =$ oneindig en groeit met afnemende $t-\tau$.

Werken wij nu dus met deze ψ en gaan dan de vergelijking (1) oplossen, dan is hieruit dadelijk af te leiden:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{1}{q}\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a}{q} - A\right)x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zijnde een lineare differentiaalvergelijking van de 3[de] orde met constante coëfficiënten. Substitueeren wij $x = e^{pt}$, dan komt ter oplossing van p de 3[de] graadsvergelijking:

$$p^3 + \frac{1}{q}p^2 + ap + \left(\frac{a}{q} - A\right) = 0$$

Ons behoeven de gevallen alleen te interesseeren van physische beteekenis, dat zijn *gedempte trillingen*. Opdat die 3[de] graadsvergelijking deze levert is noodig, dat zij heeft één rëeelen negatieven wortel en twee toegevoegd complexe wortels, waarvan het reëele gedeelte negatief is [1]).

---

[1]) Een opmerking dient te worden gemaakt over de energie.

De vergelijking van § 2

$$q\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha q\frac{dx}{dt} + (\alpha - Aq)\,x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

levert, vermenigvuldigd met $\frac{dx}{dt}$,

$$q\frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (\alpha - Aq)\,x\,\frac{dx}{dt} = 0$$

of dus

$$-\alpha q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}(\alpha - Aq)\,x^2 + q\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right). \quad (2)$$

Wat achter de $\frac{d}{dt}$ staat moet de energie zijn (beteekenis kan alleen hebben $\alpha > Aq$) Deze term geeft de potentieele energie in de onderstelling, dat er *is* een elastische potentiaal $\frac{1}{2}(\alpha - Aq)x^2$ en dan dus een elastische kracht $(\alpha - Aq)x$, wat hier niet zoo is. Het komt mij dus voor, dat men als volgt moet interpreteeren: in het linkerlid staat de op het stelsel verrichte arbeid, rechts de energieverandering. Hoe moet ik mij nu dien verrichten arbeid uit het linkerlid denken? In de 1[e] plaats de arbeid $-\alpha q\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$, verricht door een wrijvingskracht evenredig met $\frac{dx}{dt}$; en dan in de 2e plaats nog de arbeid $-q\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2$, verricht door een kracht evenredig met $\frac{d^3x}{dt^3}$. In het rechterlid treedt dan natuurlijk bij de potentieële energie niet alleen op de potentieële energie, die bestaat t. o. v. de kracht $(\alpha - Aq)x$, maar

Voorwaarde, dat die vergelijking heeft 1 reëele en 2 toegevoegd complexe wortels is, dat haar discriminant D positief is, dus $D > 0$, waarin

$$D = \frac{\alpha}{3^3 q^4} - \frac{A}{3^3 q^3} + \frac{2\alpha^2}{3^3 q^2} - \frac{A\alpha}{3q} + \tfrac{1}{4} A^2 + \frac{\alpha^3}{3^3}. \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Sporen wij nu de voorwaarde op, dat de reëele wortel negatief is. Gaan wij daartoe het waardenbeloop van het linkerlid na. Stel

$$y = p^3 + \frac{1}{q} p^2 + \alpha p + \left(\frac{\alpha}{q} - A\right)$$

$$\text{voor } p = -\infty \qquad y = -\infty$$

$$\text{,, } p = 0 \qquad y = \frac{\alpha}{q} - A.$$

Moet de reëele wortel negatief zijn, dan moet dus $\frac{\alpha}{q} - A$ positief zijn of

$$\alpha > Aq, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

iets, wat ook voor den dag komt in de 1ste opmerking over de energie hieronder.

---

oòk die t. o. v. de kracht $q\,\frac{d^3x}{dt^3}$. Immers, het heele linkerlid van de vergelijking (1) interpreteer ik als een stel krachten, die elkaar in evenwicht houden:

$\frac{d^2x}{dt^2}$ kracht van D'ALEMBERT voor de beweging

$\alpha\, q\,\frac{dx}{dt}$ wrijvingskracht

$(\alpha - Aq)\,x$ quasi elastische kracht en

$q\,\frac{d^3x}{dt^3}$ nòg een tweede elastische kracht

Een 2e opmerking dient gemaakt over de limietgevallen. Als uitgangspunt hebben wij de vergelijking (1) van § 2 waarin

$$\psi = Ae^{-\frac{t-\tau}{q}}.$$

Wanneer wij q tot nul en A tot ∞ laten naderen, krijgen wij:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = A\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, e^{-\frac{t-\tau}{q}}\, dt = x(\tau)\, A \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{\xi}{q}} d\xi = + x(\tau) Aq$$

noemen we $\lim\, A\,q = \beta$, dan komt er

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\alpha - \beta)\, x = 0,$$

de vergelijking voor de gewone periodieke beweging. — Deze vergelijking komt trouwens ook direct voor den dag als we nemen vergelijking (2), beide leden met q vermenigvuldigen, en dan substitueeren $q = 0$ en $A\,q = \beta$.

Behandelen wij tenslotte de vergelijking (1) van § 2 met de algemeene $\psi\,(t-\tau)$

Ten slotte de voorwaarde, dat genoemd rëeele gedeelte negatief moet zijn; dat wordt:

$$\frac{1}{3q} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q + \sqrt{D}} + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}Q - \sqrt{D}} > 0 \quad . . \quad (III)$$

waarin

$$Q = \frac{2}{3^3 q^3} + \frac{2a}{3q} - A.$$

Resumeerende: als de a, A en q deze voorwaarden I, II en III vervullen, komt de hysteretische term, zooals VOLTERRA dien heeft aangenomen, zonder meer neer op demping van de trillende beweging.

Noemen we de wortels, $-p_1$, $-p_2 \pm q_2 i$, dan wordt dus de oplossing

$$x = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} \cos q_2 t + A_3 e^{-p_2 t} \sin q_2 t \quad . . . \quad (A)$$

Wat verder betreft initiaalvoorwaarden, is bijv. tot $t = 0$ (vanaf $t = -\infty$)

$$x = x_0 \qquad \dot{x} = 0$$

door de gevonden oplossing (A) hieraan te passen. Uit de integraalvergelijking volgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a x_0 = A x_0 \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{t-\tau}{q}} d\tau$$

---

benaderend door aan te nemen de onderstelling, dat $\psi(t-\tau)$ alléen voor waarden van $t-\tau$, die zeer klein zijn, van nul verschillende waarden heeft.

Noemen wij $t - \tau = \xi$, dan gaat onze vergelijking (1) over in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = \int_0^\infty \psi(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi \quad . . . . \quad (\lambda)$$

Volgens genoemde voorwaarde is:

$$\int_0^\infty \psi(\xi)\, x(t-\xi)\, d\xi = + \int_0^\infty \psi(\xi)\, d\xi\, x(t) - \int_0^\infty \xi\, \psi(\xi)\, d\xi \frac{dx}{dt}$$

Noem nu

$$\int_0^\infty \psi(\xi)\, d\xi = \beta \qquad \text{en} \qquad \int_0^\infty \xi\, \psi(\xi)\, d\xi = \gamma$$

dan krijgen wij na substitutie in de vergelijking (λ):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a - \beta)\, x = -\gamma \frac{dx}{dt},$$

d.w.z. een gedempte trilling.

Voor $\beta > \alpha$ hebben we de gedempte exponentiëele beweging.

Als bijzonder geval zit er nog in $\alpha = \beta$.

$t_1 < 0$ $$\frac{d^2x}{dt^2} = x_0 (Aq - a)$$

en deze waarde van $\frac{d^2x}{dt^2}$ moet gebruikt worden bij het aanpassen van A_1, A_2 en A_3 aan de randvoorwaarden. Voor $x = f(t)$, $\dot{x} = \varphi(t)$ kan men analoog te werk gaan.

Wij zullen nu verder, den *bijzonderen* vorm van $\psi(t-\tau)$ in het midden latende, een voorbeeld behandelen, dat door experiment te toetsen zou zijn, waardoor men dus gelegenheid zou hebben, de vorm van ψ te vinden. Men kan in dit geval gemakkelijk opschrijven de voorwaarde, waaronder de opzet van VOLTERRA neerkomt op demping.

Voor het voorbeeld, dat wij nu kiezen geldt weer de vergelijking (1), maar nu werke van $t = -\infty$ tot $t = 0$ een kracht nul; x en $\dot{x}$ zijn dan nul; op $t = 0$ werkt plotseling een verder constante kracht K. Voor de beweging nà het tijdstip nul geldt nu de vergelijking:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax + \int_0^t x(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau + K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Practisch mag men den term $\frac{d^2x}{dt^2}$ weglaten (dat is te zeggen, zoo dadelijk zullen we even precies nagaan, wat hierbij stilzwijgend wordt aangenomen). Er rest dan:

$$a\,x(t) - \int_0^t x(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau = K,$$

zijnde een lineaire integraalvergelijking van de 2de orde. De oplossing hiervan wordt:

$$x(t) = \frac{K}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{a^2}\int_0^t\int_0^\tau \psi(\tau)\,\psi(t-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau + \dots\right)$$

Nemen wij nu aan, dat a groot is met betrekking tot de hysteresis, dan mogen wij termen met hoogere machten van a in den noemer verwaarloozen. Wij krijgen voor 1e benadering:

$$x(t) = \frac{K}{a}\left(1 + \frac{1}{a}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Mag nu de term $\frac{d^2x}{dt^2}$ uit de vergelijking (A) hierboven werkelijk weggelaten worden? Maken wij daartoe door de zooeven gevonden

oplossing $x(t)$ twee keer te differentiëeren, $\frac{d^2x}{dt^2}$ op, dan ziet men dadelijk, dat het rechterlid bevat den factor $\frac{K}{a^2}$. Wanneer dit dus maar te verwaarloozen is, vergeleken bij den hysteretischen term

$$\int_0^t x(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau$$

uit vergelijking (A), dàn màg ook werkelijk $\frac{d^2x}{dt^2}$ uit vergelijking (A) weggelaten.

Onderzoeken wij nu ten slotte aan de oplossing (B) voor $x(t)$, wanneer deze een gedempte beweging voorstelt. Een beweging zal men gedempt noemen als de limiet van de snelheid voor $t=\infty$ gelijk nul is. Maken wij dus eerst uit de oplossing (B) voor $x(t)$ de $\frac{d^nx}{dt^n}$ op, dan krijgt men dadelijk als voorwaarde voor demping

$$\underline{\lim_{t=\infty} \psi(t) = 0} \text{ [1]}$$

$$\underline{\lim_{t=\infty} \psi^{(n)}(t) = 0}$$

Het gekozen voorbeeld, d.w.z. de beweging, waarbij van $t=-\infty$ tot $t=0$ werkt een kracht gelijk nul en verder x en $\dot{x}$ nul zijn, daarna echter plotseling een verder constante kracht K, zoodat voor de beweging nà het tijdstip nul geldt de vergelijking (A) blzd. 269 kan nu òòk nog behandeld worden in het bijzondere geval, dat wij aannemen $\psi = Ae^{-\frac{t-\tau}{q}}$. De vergelijking (A) gaat dan over in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = \int_0^t x(\tau)\,Ae^{-\frac{t-\tau}{q}}\,d\tau + K$$

Door te differentiëeren naar t en de integraal te elimineeren, leid ik af de vergelijking:

$$q\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + aq\frac{dx}{dt} + (a-Aq)\,x = K \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Het linkerlid van deze vergelijking is precies hetzelfde als het linkerlid van de vergelijking (2) blzd 266. Noem ik dit zoolang L, dan ziet vergelijking (3) van blzd 274 er dus uit $L=K$ en de algemeene oplossing daarvan wordt verkregen, door bij de algemeene oplossing van $L=0$ op te tellen een particuliere integraal van $L=K$. Deze vind ik direct:

[1]) Vergelijk overigens p. 9.

$$x = \frac{K}{a - Aq}$$

Verder herhalen zich nu de beschouwingen omtrent demping zooals die voorkwamen bij vergelijking (2) blzd. 266 volledig. Er worden letterlijk dezelfde voorwaarden opgeschreven voor demping.

Als pendant van de oplossing (A) blzd. 268 krijg ik nu hier:

$$x = A_1 e^{-p_1 t} + A_2 e^{-p_2 t} \cos q_2 t + A_3 e^{-p_2 t} \sin q_2 t + \frac{K}{a - Aq} \quad . \quad (A'),$$

òòk weer aan de initiaalvoorwaarden aan te passen.

Eindelijk zijn ook de opmerkingen over de energie en over de limietgevallen uit de noot van blzd. 266 en volgende hier te herhalen. Bij de energie treedt nu nog op een term Kx, die verantwoordt den arbeid, verricht door de kracht K. En wat de limietbewegingen betreft, dezelfde limietbewegingen treden ook hier weer op.

Nu wil ik weer eens uitgaan van de integro-differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met algemeene ψ en vragen naar de voorwaarde, waaronder deze volgens VOLTERRA voor hysteresis herziene trillingsvergelijking een gedempte beweging voorstelt.

Eerst beweer ik, dat er altijd een tijdstip τ is aan te geven, zóódanig, dat ik de vóorgeschiedenis vóór dien tijd τ mag verwaarloozen. Op physische gronden moet de functie ψ van dien aard zijn, dat

$$\lim_{t-\tau=\infty} \psi(t-\tau) = 0,$$

want de invloed van wat zéer lang geleden is, moet klein worden. Nu moet die ψ onder het integraalteeken in het rechterlid van (1) echter nog vermenigvuldigd worden met $x(\tau)$, de x op dat tijdstip τ in het verleden en als die zeer groot is, mag men het product $x(\tau)\,\psi(t-\tau)$ toch weer niet verwaarloozen. Nu merk ik op, dat het aantal malen, dat er in de voorgeschiedenis een $x(\tau)$ kan optreden gelegen boven een bepaalde, doch willekeurig groot te kiezen x beslist eindig moet zijn, om de eenvoudige reden, dat we met een physisch probleem te maken hebben. En dàn ga ik zoò ver in den tijd terug, dat ik dit eindig aantal gepasseerd ben!

Nu gaat de vergelijking (1) over in

$$\frac{d^2x}{dt^2} + an = \int_{0}^{t} x(\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau.$$

VOLTERRA leert in Fonct. de l. blz. 97—99 als oplossing van deze vergelijking:

$$x = a\,S_1\,(t/\alpha) + b\,S_2\,(t/\alpha)$$

waarin S_1 en S_2 zijn twee transcendente functie's van α als volgt:

$$S_1\,(t/\alpha) = t + \int_0^t (t-\tau)\,S\,(\tau/\alpha)\,d\tau$$

$$S_2\,(t/\alpha) = 1 + \int_0^t S\,(\tau/\alpha)\,d\tau.$$

Hierin is

$$S\,(\tau/\alpha) = \alpha F'\,(t) + \alpha^2\,F^{(2)}\,(t) + \ldots + \alpha^h\,F^{(h)}\,(t)$$

$$-\,F^{(1)}\,(t) = t + \int_0^t d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \psi\,(\xi_2)\,d\xi_2$$

$$F^{(2)}\,(t) = \int_0^t F^{(1)}\,(\xi_1)\,F^{(1)}\,(t-\xi_1)\,d\xi_1$$

. . . .

$$F^{(h)}\,(t) = \int_0^t F^{(h-k)}\,(\xi)\,F^{(h)}\,(t-\xi_1)\,d\xi_1$$

terwijl verder is

$$a = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} \qquad b = (x)_{t=0}$$

Kiezen we nu speciaal als tijdstip nul een oogenblik, waarop de snelheid $\frac{dx}{dt}$ nul is, dan zal dus a nul worden, zoodat de oplossing overgaat in:

$$x = b\,S_2\,(t/\alpha)$$

Nu was voorwaarde voor demping

$$\lim_{t=} \frac{d^n x}{dt^n} = 0$$

Hier wordt

$$\frac{dx}{dt} = b\,\frac{dS_2}{dt} = bS\,(t/\alpha).$$

Dus we krijgen als voorwaarden voor demping

$$\lim_{t=\infty} S(t/a) = 0$$

$$\lim_{t=\infty} S^{(n)}(t/a) = 0$$

§ 3. Na wat wij in het vorige over het lineaire systeem gezien hebben, ga ik nu in het algemeen aantoonen, dat bij de hysteresis volgens VOLTERRA geen elastische potentiaal bestaat, zoodat er dus energiedissipatie plaats heeft.

Uitgaande van de bewegingsvergelijkingen:

$$\varrho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t}\right) + \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} = 0 \text{ [1]}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\varrho\,(Y - . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

heeft men afgeleid (zie bv. RIEMANN WEBER. Die part. diff. Gleich. der math. Physik II § 65) de betrekking:

Arbeid, verricht door de massakrachten X, Y en Z, die op de volume-elementen werken + arbeid, verricht door de oppervlaktedrukken — verandering in kinethische energie —

$$-\int\left[t_{11}\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial t} + t_{12}\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial t} + \ldots\right] d\varkappa = 0 \text{ [1]})$$

Dan volgt uit de 2e hoofdwet, dat

$$dt\int\left(t_{11}\frac{\partial\gamma_{11}}{\partial t} + t_{12}\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial t} + \ldots\right) d\varkappa$$

voorstelt de in den tijd dt gewonnen potentiëele energie binnen in de ruimte $\varkappa$ ten gevolge van de elastische spanningen, zoodat wij krijgen:

$$\textit{Verandering in de potentieele energie} = dT' = \sum_{ih} t_{ih}\, d\gamma_{ih}$$

Hierin ga ik nu de voor lineaire hysteresis volgens VOLTERRA gecorrigeerde uitdrukkingen voor de spanningen t_{ih} substitueeren en krijg:

$$dT' = \sum_{ih}\left[\sum_{rs} b_{ih/rs}\,\gamma_{rs}(t)\right] d\gamma_{ih} + \sum_{ih}\left[\int_0^t \sum_{rs} \varphi_{ih/rs}(t\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau\right] d\gamma_{ih}$$

Vroeger waren de ψ's nul en ging de redeneering als volgt:

---

[1]) de t_{ih}'s zijn als steeds de elastische spanningen, de γ_{ih}'s de deformatie grootheden.

Zal er een elastische potentiaal T' zijn, dan moet het rechterlid een totale differentiaal zijn; dit vereischt een stel van 15 betrekkingen, integrabiliteitsvoorwaarden in de 36 coëfficiënten, nl. $b_{th/rs} = b_{rs/th}$; als die vervuld waren, was er een functie T' als elastische potentiaal op te lossen.

Wij zullen nù aantoonen, dat aan de integrabiliteitsconditie's niet voldaan kan worden. Daartoe beschouwen wij:

$$dT' = \sum_{th} \left\{ \sum_{rs} b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t) + \int_0^t \sum_{rs} \psi_{th/rs}(t\tau)\, \gamma_{rs}(\tau)\, d\tau \right\} d\gamma_{th} \quad . \quad (I)$$

Naar de grondgedachte van VOLTERRA verdeel ik het interval van nul tot t in n deelen $h_1 \ldots h_n$; laat de waarden van t in de deelpunten zijn respectievelijk $t_1 \ldots t_n$; dan is de vergelijking (I) op te vatten als limiet geval van het volgend stel differentiaalvergelijkingen:

$$dT' = \sum_{th} \sum_{rs} b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t_1)\, d\gamma_{th} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$dT' = \sum_{th} \left\{ \sum_{rs} \left[b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t_2) + \psi_{th/rs}(t_2 t_1)\, \gamma_{rs}(t_1)\, h_1 \right] \right\} d\gamma_{th} \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} dT' = \sum_{th} \Big\{ \sum_{rs} \big[b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t_3) + \psi_{th/rs}(t_3 t_1)\, \gamma_{rs}(t_1) h_1 + \\ + \psi_{th/rs}(t_3 t_2)\, \gamma_{rs}(t_2)\, h_2 \big] \Big\} d\gamma_{th} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

. . . .

$$\left. \begin{aligned} dT' = \sum_{th} \Big\{ \sum_{rs} \big[b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t_n) + \psi_{th/rs}(t_n t_1)\, \gamma_{rs}(t_1)\, h_1 + \\ + \psi_{th/rs}(t_n t_2) \gamma_{rs}(t_2) h_2 + \ldots + \psi_{th/rs}(t_n t_{n-1}) \gamma_{rs}(t_{n-1}) h_{n-1} \big] \Big\} d\gamma_{th} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (n)$$

Zooals bekend, zijn van (1) de integrabiliteitsvoorwaarden als volgt af te leiden:

Noem de oplossing ervan $T'^1(\gamma_{th}(t_1))$, dan is

$$dT' = \sum_{th} \frac{\partial T'}{\partial \gamma_{th}(t_1)}\, d\gamma_{th};$$

dit moet geïdentificeerd worden met (1); levert:

$$\frac{\partial T'}{\partial \gamma_{th}(t_1)} = \sum_{rs} b_{th/rs}\, \gamma_{rs}(t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

en dus

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma^{th}\, \partial \gamma_{rs}} = b_{th/rs};$$

op dezelfde wijze

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma_{rs}\, \partial \gamma_{th}} = b_{rs/th};$$

dus zooals bekend was:

$$b_{th/rs} = b_{rs/th}.$$

Integratie van (A) levert dan, zooals gewoon:

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{ih} \sum_{rs} b_{ih/rs} \gamma_{ih} \gamma_{rs}$$

Nu (2). Wat zijn hier in het rechterlid de onafhankelijk veranderlijken? De gedachte is, dat T^1 nu niet meer alléén een functie is van $\gamma_{rs}(t_2)$ maar óók van $\gamma_{rs}(t_1)$; deze laatste heb ik er dus bij te beschouwen als nieuwe onafhankelijk veranderlijken; de beteekenis van de differentiaal van γ_{ih}, zooals die in (2) staat is duidelijk: het is $d\gamma_{ih}(t_2)$. We krijgen:

Integrabiliteitsvoorwaarden:

Noem de oplossing weer

$$T' \left(\gamma_{ih}(t_1)\, \gamma_{ih}(t_2)\right)$$

$$dT' = \sum_{ih} \frac{\partial T'}{\partial \gamma_{ih}(t_1)} d\gamma_{ih}(t_1) + \sum \frac{\partial T'}{\partial \gamma_{ih}(t_2)} d\gamma_{ih}(t_2)$$

en dit moet geïdentificeerd worden met (2); levert:

$$\frac{\partial T'}{\partial \gamma_{ih}(t_1)} = 0$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \gamma_{ih}(t_1)} = \sum_{rs} \left[b_{ih/rs} \gamma_{rs}(t_2) + \psi_{ih/rs}(t_2 t_1)\, \gamma_{rs}(t_1)\, h_1\right]$$

Onder de diverse integrabiliteitsvoorwaarden zal ook voorkomen·

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma_{ih}(t_1)\, \partial \gamma_{rs}(t_2)} = \frac{\partial^2 T'}{\partial \gamma_{rs}(t_2)\, \partial \gamma_{ih}(t_1)}$$

Links krijgen we

$$\frac{\partial 0}{\partial \gamma_{rs}(t_2)} = 0$$

Rechts:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{ih}(t_1)} \frac{\partial T'}{\partial \gamma_{rs}(t_2)} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{ih}(t_1)} \sum_{rs} \left[b_{rs/rs} \gamma_{rs}(t_2) + \psi_{rs/rs}(t_2 t_1) \times \gamma_{rs}(t_1)\, h_1\right] =$$
$$= \psi_{rs/ih}(t_2 t_1)\, h_1$$

Dus moet $\psi_{rs/ih}(t_2\, t_1) = 0$. Evenzoo moeten alle ψ's wegvallen. Zoo toonen wij in (3) aan, waar ook de $\gamma_{rs}(t_3)$ als nieuwe onafhankelijk veranderlijken optreden, dat $\psi_{ih/rs}(t_3 t_1)$ zoowel als $\psi_{ih/rs}(t_3 t_2)$ moeten wegvallen. Alle ψ's moeten wegvallen. Bij de limiet krijgen wij, dat $\psi_{ih/rs}(t\tau)$ moet wegvallen, m.a.w.:

De vergelijking (I), waarin de ψ's *niet* wegvallen is nooit op te vatten als de limiet van een totale differentiaalvergelijking. Er is hier dus géén functie van de oogenblikkelijke en vroegere deformatie's te vinden, die de rol vervult van potentieele energie.

Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Juni 1920.

Natuurkunde. De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. C. BURGER · *„Het stollingsproces als een probleem van warmtegeleiding"*.

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

§ 1. *Inleiding*. Het evenwicht tusschen twee phasen is experimenteel en theoretisch uitvoerig onderzocht. Van de gevallen, waarin geen evenwicht bestaat, doch de éene phase wordt omgezet in de andere, is echter weinig bekend. Terwijl in het eerste geval de thermodynamische wetten als basis dienen van alle beschouwingen, mist men in het tweede geval dergelijke leidende beginselen. De onderzoekingen over de dynamica der phasenomzetting staan los naast elkaar en bepalen zich dikwijls tot het verzamelen van empirische gegevens, waarvan de beteekenis niet geheel duidelijk is.

Het zou zeer gewenscht zijn een algemeene dynamica te ontwikkelen, die de „thermodynamica", als het bijzondere geval harer statica zal moeten omvatten. Of dit van zuiver phenomenologisch standpunt mogelijk is, zal verder onderzoek moeten leeren.

In het volgende heb ik een algemeene methode uitgewerkt ter behandeling van het bijzondere geval van het stollen van een chemisch enkelvoudige stof.

Bij den overgang van een onderkoelde smelt in den vasten toestand, moet men streng onderscheiden tusschen:

1°. Het ontstaan van kiemen der vaste phase in de onderkoelde vloeistof[1]).

2°. Het verder groeien van ieder dezer kiemen en ook het groeien van een met opzet in de vloeistof gebracht stuk van de vaste stof[2]).

In deze mededeeling zal slechts het tweede punt behandeld worden. Daarbij zal geen rekening gehouden worden met de bijzonderheden, die in verband staan met de anisotropie van de vaste stof. Hierdoor vereenvoudigt men het probleem, doch doet men tevens afstand van de verklaring van het ontstaan van den kristalvorm.

De vraag, die men moet stellen, wanneer men het verloop van het stollingsproces wenscht na te gaan, is de volgende:

---

[1]) G. TAMMANN, Zeitschr. f. phys. Chem. 25, p. 442, 1898.

[2]) D. GERNEZ, Compt. rend. 95, p. 1278, 1882.
B. MOORE, Zeitschr. f Phys. Chem. 12, p. 545, 1893.

Gegeven een onderkoelde vloeistof, waarin zich een of meer stukken van de vaste stof bevinden. Op een bepaald oogenblik is de temperatuur gegeven als functie van de plaats. Gevraagd voor ieder volgend oogenblik de temperatuur te bepalen als functie van de plaats en de snelheid te vinden waarmede zich het grensvlak der beide phasen tengevolge van de stolling beweegt.

Kent men de algemeene principes en methoden, die kunnen dienen om dit vraagstuk op te lossen, dan zijn alle voorkomende gevallen in beginsel hiermede te behandelen. Deze behandeling vereischt slechts het overwinnen van mathematische moeilijkheden. De theorie moet voor een bijzonder geval ontwikkeld worden en met de experimenten vergeleken worden. Zooals in elke phenomenologische theorie het geval is, blijven ook hier zekere constanten of functies, die voor de stof kenmerkend zijn, à priori onbepaald. De vergelijking van theorie en waarnemingen leert ons deze constanten of functies kennen.

Men moet bij de beantwoording van de bovengenoemde vragen bedenken, dat in een stof, waarin de temperatuur van punt tot punt verschillend is, warmtegeleiding plaats heeft. Men mag de geleiding niet als bijkomstig beschouwen, want zonder transport van warmte kan geen stolling plaats hebben.

De temperatuur θ voldoet in een zich met snelheid V bewegende stof aan een gegeneraliseerde differentiaalvergelijking der warmtegeleiding:

$$c\varrho \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \Delta \theta - c\varrho \, div\, (\theta V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Deze vergelijking bevat de grootheden c, ϱ en λ, (resp. specifieke warmte, dichtheid en warmtegeleidingsvermogen) die betrekking hebben op de phase waarvoor (1) geldt. Een vergelijking van de gedaante van (1) bestaat voor de vaste zoowel als voor de vloeibare phase. In deze vergelijkingen treden constanten op, die slechts karakteristiek zijn voor een der phasen afzonderlijk en niet voor de heterogeene reactie tusschen de beide phasen.

Zooals bij ieder probleem van warmtegeleiding heeft men ook hier, naast de differentiaalvergelijking, grenscondities waaraan de temperatuur θ moet voldoen, nl.:

1°. De temperatuur is aan het scheidingsvlak van twee middenstoffen continu. Dit geldt zoowel voor het grensvlak der vaste en vloeibare phase als voor de vlakken volgens welke ieder dezer phasen den wand aanraakt van het vat, waarin zij besloten zijn.

2°. Aan een grensvlak is de normale componente van den warmtestroom continu, wanneer aan het vlak geen warmteontwikkeling

plaats heeft. Is dit wel het geval, dan wordt door de normale component van den warmtestroom in de twee stoffen aan beide zijden van het vlak te samen een hoeveelheid warmte afgevoerd, die gelijk is aan de warmteontwikkeling die aan dat vlak plaats heeft.

De grenscondities 1° en 2° zijn echter, tezamen met de vergelijking (1), nog niet voldoende om den toestand voor elk volgend oogenblik te bepalen. Men kent n.l. nog niet de snelheid waarmede zich het grensvlak der vaste phase beweegt, en weet daarom op een bepaald tijdstip ook niet aan welk vlak de voorwaarden 1° en 2° gelden. De snelheid van het scheidingsvlak der phasen is tijdens het stollen gericht van vast naar vloeibaar. Deze snelheid kan slechts afhangen van den toestand der materie aan dit vlak, dus van den aard van de stof en de temperatuur daar ter plaatse. Als derde grensconditie krijgt men dus het verband, dat moet bestaan tusschen de lineaire kristallisatie-(stollings-)snelheid en de temperatuur aan de grens.

Duidt men de waarde eener grootheid in de vaste phase aan door den index 1 en in de vloeibare phase door den index 2 en is ν de normaal aan het grensvlak vast-vloeibaar, dan heeft men dus aan dit vlak de grensvoorwaarden:

$$\overline{\theta_1} = \overline{\theta_2} \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

$$\lambda_1 \frac{\overline{\partial \theta_1}}{\partial \nu} - \lambda_2 \frac{\overline{\partial \theta_2}}{\partial \nu} = v \varrho_1 Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

$$v = f(\overline{\theta}) \text{ [2]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2c)$$

Daar n.l. $v\varrho_1$ de per tijdseenheid en oppervlakte-eenheid stollende massa is, stelt $v\varrho_1 Q$ het verschil der normaalcomponenten van den warmtestroom aan beide zijden van het grensvlak voor, als Q de smeltwarmte voorstelt bij de temperatuur $\overline{\theta}$, die aan dit vlak heerscht.

De differentiaalvergelijking (1) bepaalt nu met de grensvoorwaarden (2) het verloop van het stollingsproces. Men kan echter (1) en (2) niet oplossen wanneer men de functie f, die voor de stof kenmerkend is, niet kent. Men zou kunnen trachten verschillende onderstellingen te maken omtrent het verband tusschen $\overline{\theta}$ en v, bijv. dat $\overline{\theta}$ gelijk is aan de smelttemperatuur. Elke onderstelling voert tot een bepaalde waarde van de temperatuur als functie van plaats en tijd. Ieder dezer uitkomsten zou met de waarneming vergeleken kunnen worden en op deze wijze zou men kunnen vinden welk verband tusschen $\overline{\theta}$ en v bestaat.

Daar we à priori zelfs den vorm van de betrekking (2c) niet kennen,

---

[1]) Door een horizontale streep wordt de waarde aan de grens aangegeven.

[2]) Natuurlijk is omgekeerd $\overline{\theta} = \varphi(v)$.

is echter de volgende weg te verkiezen. Men kiest een waarde voor de snelheid v [1]). Beschouwt men verder v als gegeven, dan kan men uit (1), (2a) en (2b) de temperatuur bepalen, en dus ook de temperatuur $\bar{\theta}$ aan de grens. Door de stolling onder verschillende omstandigheden te laten plaats hebben, kan men verschillende waarden van v verkrijgen en bij ieder dezer waarden de bijbehoorende temperatuur $\bar{\theta}$ berekenen, en op deze wijze het verband tusschen v en $\bar{\theta}$ vinden. Ter toetsing der theorie kan men de temperatuur $\bar{\theta}$ experimenteel bepalen, doch dit is niet noodig om de door (2c) aangegeven betrekking voor een bepaalde stof te vinden.

§ **2**. *Theorie der stolling in een cylindrische buis.*

Een der eenvoudigste stollingsverschijnselen, dat ook experimenteel het uitvoerigste is bestudeerd, is het kristalliseeren van een onderkoelde vloeistof in een cylindrische buis.

Zij in het eene deel (A) van een rechte buis de vaste stof, in het ander deel (B) de onderkoelde vloeistof. Het geheel is geplaatst in een omgeving van constante temperatuur, die ook in A en B, binnen de buis, op oneindig grooten afstand van het grensvlak moet heerschen. Deze temperatuur moet natuurlijk onder het smeltpunt der gebruikte stof liggen, daar anders geen stolling plaats heeft [2]).

De stolling verloopt nu aldus. Aan het grensvlak der phasen komt warmte vrij (smeltwarmte). Deze vloeit naar beide zijden door de vaste stof en de vloeistof af en stroomt tenslotte door den wand van de buis naar de omgeving van constante temperatuur. In iedere loodrechte doorsnede van de buis is de temperatuur in de as van den cylinder het hoogst en neemt naar den omtrek af. Dit is ook het geval aan het grensvlak der phasen. De normale snelheid aan dit vlak kan dus niet overal dezelfde zijn, doch moet van binnen naar buiten toe- of afnemen naargelang de stollingssnelheid v met afnemende temperatuur toe- of afneemt. Beide gevallen kunnen zich voordoen. De snelheid v is natuurlijk nul bij het smeltpunt, neemt dan toe met dalende temperatuur, en gaat daarna, zooals de ervaring leert, weer afnemen om bij voldoende lage temperatuur asymptotisch tot nul te naderen.

Onderstel, dat de temperatuur der omgeving slechts weinig onder het smeltpunt der stof is, zoodat de kristallisatiesnelheid met afnemende

[1]) De snelheid v is eenvoudig experimenteel te bepalen en kan daarom geschikt als grondslag voor de berekening dienen.

[2]) Een smeltproces, analoog aan het hier behandelde stollingsproces, is onmogelijk daar een vloeistof wel onder het smeltpunt, doch een vaste stof niet boven het smeltpunt kan bestaan.

temperatuur toeneemt. De snelheid van het grensvlak moet dan in de as van de buis kleiner zijn dan aan den omtrek, d.w.z. dit vlak wordt hol naar de vloeistof. De vorm van het oppervlak kan echter tijdens het groeien niet onveranderd blijven; daar de snelheid in normale richting in de as van den cylinder het kleinste is en naar buiten toeneemt zal, zooals men gemakkelijk inziet, de kromming steeds toenemen en tenslotte misschien een holte ontstaan, die wordt afgesloten en daarna volgroeit. Tegelijk is de snellere groei aan den omtrek voortgegaan en herhaalt zich hetzelfde weer. Verder zal de groei niet symmetrisch zijn om de as. Groeit n.l. door een geringe storing de stof in een punt van den omtrek iets sneller dan in de andere punten, dan komt het oppervlak hier verder van de plaatsen waar de kristallisatie in hoofdzaak plaats heeft, d.w.z. het komt in punten waar de temperatuur lager en dus de stollingssnelheid grooter is. Dientengevolge heeft de groei in het beschouwde punt nog sneller plaats. De toestand is dus labiel. Een kleine toevallige storing zal een grooten invloed hebben op den vorm van het grensvlak en dus op het verloop van de stolling. In dit geval is de stolling een zeer onregelmatig verschijnsel en een theoretische behandeling van het probleem, dat op p. 277 is gesteld, is onmogelijk.

Geheel anders is dit echter, wanneer de temperatuur van de omgeving, en dus die in de buis, lager wordt gekozen, zoodat de stollingssnelheid met afnemende temperatuur geringer wordt. De normale snelheid is dan in de as van den cylinder, waar de hoogste temperatuur heerscht, het grootste. Het oppervlak der vaste phase wordt dus bol naar de vloeistof. Dit bolle oppervlak gaat zich nu evenwijdig aan de as verplaatsen en neemt daarbij een volkomen bepaalden vorm aan. De normale snelheid is bij deze verplaatsing het grootst in de as en neemt naar den omtrek af. Dit afnemen moet zoodanig zijn, dat de snelheid v in ieder punt de waarde heeft, die volgens ($2c$) bij de daar heerschende temperatuur $\overline{\theta}$ behoort. Er kan en zal een toestand ontstaan, waarbij het grensvlak zich eenparig en met constanten vorm evenwijdig aan de as beweegt. Elke storing in dezen toestand zal vanzelf weer verdwijnen. Men kan zich ook gemakkelijk er van overtuigen dat alles om de as van de buis symmetrisch moet zijn. Is dit op een oogenblik niet het geval, dan heeft de groei en warmtegeleiding zoodanig plaats, dat de symmetrie hersteld wordt.

Hoewel men zich op deze wijze duidelijk kan maken, dat de differentiaalvergelijking (1) met de grenscondities (2) den vorm van het grensvlak der phasen bij de stolling in een buis volkomen bepalen, levert deze bepaling groote mathematische moeilijkheden op.

Wij zullen daarom ter vereenvoudiging onderstellen, dat het oppervlak der vaste phase een plat vlak is, dat loodrecht op de as van de buis staat [1]). De constante snelheid v, waarmee dit vlak zich verplaatst, wordt volgens (2c) bepaald door de temperatuur $\overline{\theta}$ aan dit vlak.

Wanneer inderdaad een toestand zal ontstaan, waarbij het grensvlak zich, onder behoud van zijn vorm, eenparig beweegt, zal ook in vaste en vloeibare phase de geheele temperatuurverdeeling zich met deze snelheid moeten meebewegen, m. a. w. de temperatuur zal slechts afhangen van den afstand tot het grensvlak. Dat een oplossing van (1) en (2) met deze eigenschap inderdaad bestaat, zal nu aangetoond worden.

In de vaste stof, waar de materie stilstaat, en de toestand rondom de as symmetrisch is, neemt de differentiaalvergelijking (1) den vorm:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = a_1 \left\{ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

aan, waarin $a_1 = \dfrac{\lambda_1}{c_1 \varrho_1}$ is; ξ een coördinaat is, die wordt gemeten langs de as van de buis in de richting van de snelheid v waarmee zich het grensvlak verplaatst, en r de afstand tot de as voorstelt.

Bij het stollen heeft contractie plaats. Dientengevolge beweegt zich de vloeistof in een richting, tegengesteld aan die van de positieve ξ-as met een constante snelheid V, die men in de dichtheden ϱ_1 en ϱ_2 der vaste en vloeibare phase aldus kan uitdrukken:

$$V = -\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2} v.$$

De differentiaalvergelijking, die in de vloeistof geldt, wordt dus:

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = a_2 \left\{ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2} v \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Onderstelt men, dat de temperatuur in de vaste en vloeibare phase alleen afhangt van de afstanden x_1 resp. x_2 tot het grensvlak, dan kan men de differentiaalquotienten naar den tijd uitdrukken in die naar de plaats:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = v \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \quad ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -v \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Verder is:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \text{ resp. } \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

---

[1]) Daar in de meest voorkomende gevallen de snelheid v slechts weinig van de temperatuur afhangt, zal het grensvlak gewoonlijk slechts weinig gekromd zijn.

Substitueert men (5) in de vergelijkingen (3) en (4) en schrijft men in deze vergelijkingen:

$$v = v_1 \; ; \; \frac{\varrho_1}{\varrho_2} v = v_2,$$

dan vindt men:

$$v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = a_1 \left\{ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_1}{\partial r} \right) \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

$$- v_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} = a_1 \left\{ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Hierbij komen nog de grenscondities ($2a$) en ($2b$), die in dit geval luiden:

$$(\theta_1)_{x_1=0} = (\theta_2)_{x_2=0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8a)$$

$$- \lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right)_{x_1=0} - \lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right)_{x_2=0} = Q \varrho_1 v \quad . \; . \; . \; . \quad (8b)$$

Daar de vloeistof aan het grensvlak een normale snelheid V heeft, spreekt het niet vanzelf dat men ($2b$) ongewijzigd mag toepassen. Een nadere beschouwing leert echter, dat dit wel het geval is en dus ($8b$) juist is. [1])

Behalve aan de betrekkingen (6), (7) en (8) moeten de temperaturen nog voldoen aan andere voorwaarden, die in het oneindige en aan den wand van de buis gelden. Daar de buis in een omgeving van constante temperatuur staat, zal deze temperatuur in beide phasen moeten bestaan op oneindig grooten afstand van het grensvlak, waar zich de invloed van de ontwikkelde smeltwarmte niet doet gevoelen. Daar het nulpunt der temperatuur willekeurig is, kiezen wij hiervoor de temperatuur der omgeving, en krijgen zoo de voorwaarden:

$$(\theta_1)_{x=\infty} = 0 \quad ; \quad (\theta_2)_{x_2=\infty} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Minder eenvoudig is het, rekening te houden met den invloed van den wand der buis. Wil men het probleem exact oplossen, dan moet men ook een differentiaalvergelijking voor de temperatuur in den buiswand opstellen en deze temperatuur door grenscondities, die met ($2a$) en ($2b$) overeenkomen, aansluiten aan de temperatuur der vaste en vloeibare stof in de buis. Aan den buitenomtrek van den wand moet de temperatuur nul zijn, d.w.z. gelijk zijn aan die der omgeving.

Het uitvoeren van dezen gedachtegang, hoewel principieel niet onmogelijk, zou tot zeer uitvoerige berekeningen voeren. In de gevallen, die experimenteel onderzocht zijn, is echter de warmtege-

---

[1]) Verg. ook W. HERGESELL, Ann. de Phys. u. Chem. 15, 1882, p. 19.

leiding door den wand vrij sterk, omdat de wand niet zeer dik is en bestaat uit een stof (meestal glas) die de warmte vrij goed geleidt. De invloed van den warmteweerstand van den buiswand is dientengevolge gering en men kan zich bedienen van de volgende benadering. Onderstelt men, dat de warmtestroom in den wand radiaal is en stellen δ en λ_2 de dikte resp. het geleidingsvermogen van dezen wand voor, dan stroomt per tijds- en oppervlakte-eenheid een hoeveelheid warmte door den wand, die is gegeven door:

$$\frac{\lambda_2 \theta}{\delta}.$$

Hierin is θ de temperatuur van de stof aan de binnenzijde van den buiswand.

Is a de straal van het lumen van de buis, dan krijgt men de grenscondities:

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{\lambda_2}{\delta}\,\theta_1 \text{ resp. } -\lambda_2 \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{\lambda_2}{\delta}\,\theta_2 \quad . \quad (10)$$

Beide leden dezer vergelijking drukken nl. den warmtestroom per tijds- en oppervlakte-eenheid uit.

Om de differentiaalvergelijking (6) met de condities (8), (9) en (10) op te lossen, zoeken wij een bijzondere oplossing, welke een product is van twee factoren, een die van x_1 afhangt (X_1) en een die van r afhangt (R_1). Substitueert men:

$$\theta_1 = X_1\, R_1$$

in (6) dan kan men voor deze vergelijking schrijven:

$$\frac{r\dfrac{d^2R_1}{dr^2} + \dfrac{dR_1}{dr}}{rR_1} = \frac{\dfrac{v_1}{a_1}\dfrac{dX_1}{dx_1} - \dfrac{d^2X_1}{dx_1{}^2}}{X_1}.$$

Daar in deze betrekking het eerste lid slechts van r en het tweede slechts van x_1 afhangt, zijn beide leden constant, bijv. $-C$. Men krijgt dan voor X_1 en R_1 de vergelijkingen:

$$r\frac{d^2R_1}{dr^2} + \frac{dR_1}{dr} + Cr\,R_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a)$$

$$\frac{d^2X_1}{dr^2} - \frac{v_1}{a_1}\frac{dX_1}{dr} - CX_1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11b)$$

De oplossing van ($11a$) die voor $r=0$ eindig blijft, is de Bessel'sche functie van orde nul:

$$R_1 = J_0\,(r\sqrt{C}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Daar θ_1 voor alle waarden van x_1 aan (10) moet voldoen, is dit ook het geval met ieder der producten $X_1 R_1$, waaruit θ_1 is opge-

bouwd en dus ook met R_1. Substitueert men in (10) voor θ_1 de door (12) gegeven waarde van R_1, dan vindt men:

$$-\lambda_1 \sqrt{C}\, J'_0 (a\sqrt{C}) = \frac{\lambda_2 a}{d} J_0 (a\sqrt{C}).$$

Stelt men hierin,

$$a\sqrt{C} = \xi_1,$$

en:

$$\frac{\lambda_1 d}{\lambda_2 a} = \gamma_1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

dan neemt deze vergelijking de gedaante aan:

$$\gamma_1 \xi_1 J_1 (\xi_1) = J_0 (\xi_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel wortels, die wij, gerangschikt naar opklimmende grootte, zullen noemen:

$$\xi_1^{(1)}, \quad \xi_1^{(2)}, \ldots, \quad \xi_1^{(k)}, \ldots$$

Zij hangen af van de door (13) gedefinieerde grootheid γ_1.

Bij elke wortel ξ_1 behoort een waarde van de functie R_1. Deze functies worden:

$$R_1^{(k)} = J_0 \left(\frac{r \xi_1^{(k)}}{a} \right), \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad \ldots \quad (15)$$

Ook (11b) heeft, evenals (11a) twee bijzondere oplossingen waarvan één voor $x_1 = \infty$ nul wordt en de andere oneindig. In verband met (9) moet de eerste gekozen worden. Deze oplossing is, afgezien van een constanten factor:

$$X_1 = e^{-p_1^{(k)} x_1}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

p_1 is de positieve wortel van de vergelijking:

$$\{p_1^{(k)}\}^2 + \frac{v_1}{\alpha_1} p_1^{(k)} - \frac{\{\xi_1^{(k)}\}^2}{a^2} = 0,$$

die men vindt door (16) in (11b) te substitueeren en C te vervangen door:

$$\frac{\{\xi_1^{(k)}\}^2}{a^2}.$$

De waarde van $p_1^{(x)}$ is:

$$p_1^{(k)} = -\frac{v_1}{2\alpha_1} + \sqrt{\frac{v_1^2}{4\alpha_1^2} + \frac{\{\xi_1^{(k)}\}^2}{a^2}} \quad \ldots \quad (17)$$

De algemeene oplossing van het probleem moet worden samengesteld uit bijzondere oplossingen op de volgende wijze:

$$\theta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_1^{(k)} J_0 \left\{ \frac{r \xi_1^{(k)}}{a^2} \right\} e^{-p_1^{(k)} x_1} \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

De constanten $A_1^{(k)}$ kunnen slechts bepaald worden in verband

met de waarde van θ_1. De door (18) gegeven uitdrukking voldoet aan de grensvoorwaarde (10), die geldt aan het grensvlak der vaste stof en den buiswand en is ook in overeenstemming met (9).

Op analoge wijze vindt men de waarde van de temperatuur θ_2, die in de vloeistof heerscht. Deze is:

$$\theta_2 = \sum_{k=1}^{\infty} A_2^{(k)} J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_2^{(k)}}{a} \right\} e^{-p_2^{(k)} x_2} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

De grootheden $\xi_2^{(k)}$ zijn de wortels van de vergelijking:

$$\gamma_2\, \xi_2\, J_1(\xi_2) = J_0(\xi_2), \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

waarin:

$$\gamma_2 = \frac{\lambda_2 \delta}{\lambda_3 a} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Uit $\xi_2^{(k)}$ volgt $p_2^{(k)}$:

$$p_2^{(k)} = \frac{v_2}{2a_2} + \sqrt{\frac{v_2^2}{4a_2^2} + \frac{\{\xi_2^{(k)}\}^2}{a^2}} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Tenslotte moeten de constanten $A_1^{(k)}$ en $A_2^{(k)}$, die in (18) en (19) voorkomen, bepaald worden uit de grenscondities (8) aan het grensvlak der vaste en vloeibare phase. Met behulp van (18) en (19) worden deze condities:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_1^{(k)} J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_1^{(k)}}{a} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} A_2^{(k)} J_0 \left(\frac{r\, \xi_2^{(k)}}{a} \right) \quad \ldots \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[A_1^{(k)} \lambda_1 p_1^{(k)} J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_1^{(k)}}{a} \right\} + A_2^{(k)} \lambda_2 p_2^{(k)} J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_2^{(k)}}{a} \right\} \right] = Q\, \varrho_1\, v_1. \quad (24)$$

Beide vergelijkingen moeten gelden voor alle waarden van r.

De moeilijkheid om uit (23) en (24) de constanten $A_1^{(k)}$ en $A_2^{(k)}$ te vinden bestaat daarin, dat in deze vergelijkingen twee reeksen van eigenfuncties voorkomen, n.l. $J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_1^{(k)}}{a} \right\}$ en $J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_2^{(k)}}{a} \right\}$. Deze reeksen zijn ieder voor zich wel orthogonaal; de functies van de eene reeks zijn echter niet orthogonaal met die van de andere. De meest symmetrische weg zou bestaan in het opsporen van eigenfuncties, die behooren bij de geheele ruimte en niet zooals nu òf bij de ruimte 1 (vaste stof), òf bij de ruimte 2 (vloeistof). Er bestaat echter een eenvoudige — hoewel asymmetrische — methode, die met betrekkelijk geringe moeite tot het doel voert. Men kan nl. de eigenfuncties voor het eene gebied ontwikkelen in een reeks van eigenfuncties van het andere gebied. Men krijgt dan de volgende ontwikkeling:

$$J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_1^{(k)}}{a} \right\} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl}\, J_0 \left\{ \frac{r\, \xi_2^{(l)}}{a} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

De constanten a_{kl} vormen een tweevoudig oneindig systeem van gestallen, die niet afhangen van de veranderlijke $\frac{r}{a}$, maar wel van de door (13) en (21) gedefinieerde constanten γ_1 en γ_2. Deze hangen, gelijk wij reeds zagen, af van de afmetingen der gebruikte buis en van het geleidingsvermogen der stoffen, die in het probleem een rol spelen.

Ter bepaling van a_{kl} vermenigvuldigt men beide leden van (25) met $r J_0 \left\{\frac{r \xi_2^{(k)}}{a}\right\} dr$ en integreert naar r van nul tot a. Maakt men daarbij gebruik van bekende eigenschappen der Besselsche functies en van de vergelijkingen (14) en (20), dan vindt men:

$$a_{kl} = \frac{2 \xi_1^{(k)} \xi_2^{(l)} (\gamma_2 - \gamma_1) J_1 \{\xi_1^{(k)}\}}{\{(\xi_1^{(k)})^2 - (\xi_1^{(l)})^2\}\{1 + \gamma_2^2 (\xi_2^{(l)})^2\} J_1 \{\xi_2^{(l)}\}} \quad . \quad . \quad (26)$$

Door substitutie van (25) in (23) verkrijgt men:

$$A_2^{(k)} = \sum_{l=1}^{\infty} a_{lk} A_1^{(l)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Is aan deze betrekking tusschen de coëfficiënten $A_1^{(k)}$ en $A_2^{(k)}$ voldaan, dan geldt (23) voor alle waarden van r.

Ook in (24) moeten alle voorkomende functies van r naar $J_0 \left\{\frac{r \xi_2^{(k)}}{a}\right\}$ ontwikkeld worden. Voor $J_0 \left\{\frac{r \xi_1^{(k)}}{a}\right\}$ geeft (25) deze ontwikkeling; voor het tweede lid van (24) schrijven wij:

$$Q \varrho_1 v_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_0 \left\{\frac{r \xi_2^{(k)}}{a}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

De coëfficiënten β_k vindt men, door beide leden met $r J_0 \left\{\frac{r \xi_2^{(k)}}{a}\right\} dr$ te vermenigvuldigen en naar r te integreeren van nul tot a. Uit (20) en de eigenschappen der Besselsche functies volgt dan:

$$\beta_k = \frac{2 Q \varrho_1 v_1 \gamma_2}{\{1 + \gamma_2^2 (\xi_2^{(k)})^2\} J_0 (\xi_2^{(k)})} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Substitueert men (25) en (28) in de vergelijking (24), dan blijkt, dat men hieraan identiek voldoet, wanneer tusschen de nog onbekende coëfficiënten $A_1^{(k)}$ en $A_2^{(k)}$ de volgende betrekkingen bestaan:

$$A_2^{(k)} p_2^{(k)} + \sum_{l=1}^{\infty} A_1^{(l)} \lambda_1 p_1^{(l)} a_{lk} = \beta_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Drukt men tenslotte met behulp van (27) de constanten $A_2^{(k)}$ in $A_1^{(k)}$ uit, dan volgt uit (30):

$$\sum_{l=1}^{\infty} A_1^{(l)} a_{lk} (p_1^{(l)} \lambda_1 + p_2^{(k)} \lambda_2) = \beta_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

De vergelijkingen (31) zijn oneindig in aantal en bevatten oneindig veel onbekenden $A_1^{(l)}$. Daar wij geen orthogonale eigenfuncties gebruikt hebben, vinden wij de coëfficiënten A_1 niet expliciet uitgedrukt, doch als oplossingen van een systeem van lineaire vergelijkingen. Practisch is dit echter geen groot bezwaar. De grootheden a_{kl} zijn nl. klein voor $k \pm l$ en zijn slechts weinig verschillend van één als $k = l$. In de eerste der vergelijkingen (31) kan men dus als eerste benadering alle termen behalve de eerste in het eerste lid weglaten. De aldus gevonden waarde van $A_1^{(1)}$ substitueert men in de tweede vergelijking, waarin men alle termen volgend op den tweeden weglaat. Men krijgt uit deze vergelijking aldus een benaderde waarde van $A_1^{(2)}$. Zoo voortgaande vindt men een benadering voor alle getallen $A_1^{(l)}$. Nu herhaalt men de berekening, doch laat geen termen meer weg. De termen die bij de eerste benadering verwaarloosd waren, worden nu vervangen door de waarde, die zij bij eerste benadering bleken te bezitten. Door deze methode van successieve benadering die snel convergeert, vindt men de waarden der coëfficiënten $A_1^{(l)}$. De waarden der constanten $A_2^{(l)}$ (of $A_2^{(k)}$) vindt men vervolgens uit (27).

Door substitutie van de gevonden waarden van $A_1^{(k)}$ en $A_2^{(k)}$ in (18) en (19) vindt men de temperatuur θ_1 in de vaste stof en θ_2 in de vloeistof en is dus het probleem, dat wij ons gesteld hadden, opgelost.

De hierboven ontwikkelde theorie krijgt beteekenis, als zij dient tot verheldering van ons begrip omtrent het resultaat en de interpretatie van waarnemingen. Experimenten over de stolling in een buis en hun verband met de theorie vindt men in een volgende mededeeling.

Instituut voor theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Juni 1920.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer H. C. BURGER over: *„Temperatuurwaarnemingen bij stolling.”*

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

§ 1. Brengt men in een onderkoelde vloeistof die zich in een cylindrische buis bevindt, een kiem van de vaste stof, dan beweegt zich het grensvlak der vaste stof met eenparige snelheid. Deze snelheid (lineaire kristallisatiesnelheid) is door vele onderzoekers gemeten als functie van de temperatuur van de omgeving (thermostaat), waarin zich de buis bevond. De temperatuur, die tijdens de stolling in de beide phasen en aan hun grensvlak bestaat, hebben zij echter niet gemeten, hoewel toch juist de meting dezer temperatuur voor het juiste begrip van het stollingsproces van groote waarde is. Meermalen is de meening uitgesproken, dat aan het grensvlak vast-vloeibaar de smelttemperatuur zou heerschen [1]), zonder dat daarvoor gronden aangevoerd zijn. Zooals echter uit mijn waarnemingen blijkt is dit, althans voor de door mij onderzochte stof, niet het geval.

De geringe hoeveelheid stof en dus de geringe hoeveelheid warmte, die wordt ontwikkeld, maakt het noodzakelijk, dat het instrument waarmee de temperatuur gemeten wordt, een zeer kleine warmtecapaciteit heeft. Is dit nl. niet het geval, dan stoort men de temperatuurverdeeling in de stof door het inbrengen van het instrument dusdanig, dat de temperatuur die men waarneemt volstrekt niet gelijk is aan de temperatuur, die op dezelfde plaats zou heerschen, wanneer dit afwezig was. Bovendien moet de temperatuurmeting geschieden met een instrument dat geringe traagheid bezit, daar de temperatuur die men in een vast punt van de buis meet, snel met den tijd verandert. Verder moet men de temperatuur registreeren, daar een aflezing tengevolge van de snelle verandering onmogelijk is.

Dientengevolge moest de keus vallen op een temperatuurmeting met behulp van een thermoelement, dat een zoo klein mogelijke massa moest hebben. De stroom, die dit thermoelement tengevolge van de temperatuurstijging in de buis levert, moet worden waargenomen met een galvanometer, die voldoende snel is om het

---

[1]) W. HERGESELL, Ann. d. Phys. u. Chem., 15, 1882. p. 19.
G. TAMMANN, Kristallisieren und Schmelzen, 1903, p. 135.

stollingsproces te kunnen volgen zonder merkbare traagheid. Daar mij instrumenten ter beschikking stonden, die aan al deze eischen geheel voldeden[1]), kon ik met kans op succes een poging wagen om het gestelde probleem op te lossen.

De methode van waarneming was de volgende. In een glazen buis werden twee kleine gaatjes geboord in punten, die nauwkeurig diametraal tegenover elkaar waren gelegen. Door deze gaatjes werd het thermoelement gestoken. Dit bestond uit thermoblik van Dr. MOLL, dat voor dit onderzoek was uitgewalst tot een zoo gering mogelijke dikte. De thermoelementen, die bij de definitieve waarnemingen zijn gebruikt, hadden een dikte van 1.4 μ. Uit dit materiaal werden bandjes gesneden van ongeveer 0.1 m.M. breed, waarvan de eene helft bestond uit manganin en de andere uit constantaan. Een dergelijk bandje werd door de openingen gestoken, die in den wand van de glazen buis waren aangebracht. Alvorens het thermoelement vast te kitten moest worden zorg gedragen, dat het vlak uitgespannen was, loodrecht op de as van de buis en dat verder de soldeerplaats der metalen zich nauwkeurig in het centrum van de buis bevond. Het kitmiddel moest bestand zijn tegen de stof, waarmee de buis gevuld wordt (salol), en hechten aan glas en metaal. Het bleek mij dat een mengsel van waterglas en asbestpoeder aan deze eischen voldeed [2]).

Aan de uiteinden van het thermoelement, die buiten den buiswand uitstaken, werden koperdraden gesoldeerd, die naar den galvanometer leidden. De spoel van den galvanometer had een zeer klein traagheidsmoment, zoodat het instrument snel aanwijst. Om de snelheid nog te vergrooten, werden de ophangdraden van de spoel vrij dik gekozen. Hierdoor werd weliswaar de gevoeligheid verminderd, maar deze was toch groot genoeg om de temperatuurstijgingen, die waargenomen moesten worden, nauwkeurig te meten. De insteltijd van den galvanometer bedroeg ongeveer 0.07 sec.

De glazen buis werd nu gevuld met de gesmolten stof, waarvoor ik salol heb gekozen. Deze stof heeft eenige voordeelen n.l.:

1°. De kristallisatiesnelheid is klein en bedraagt in maximo 3.68 m.M. per minuut. Dientengevolge zijn de eischen, die aan de meetmethode

---

[1]) Het is mij zeer aangenaam Dr. W. J. H. MOLL hier mijn dank te kunnen betuigen voor het gebruik van de ongeëvenaarde combinatie van instrumenten van zijn vinding, zonder welke de meting der snelle plaatselijke temperatuurveranderingen mij zeker niet mogelijk zou zijn geweest.

[2]) De buis met salol moest tusschen twee waarnemingen in warm water worden gebracht om de salol weer te smelten. Om het hard geworden mengsel van asbest en waterglas tegen de inwerking van het warme water te beschutten, werd het aan de buitenzijde bedekt met Canadabalsem.

gesteld worden, niet zoo groot als bij sneller kristalliseerende stoffen. De instrumenten zijn echter voldoende snel om ook bij sneller kristalliseerende stoffen te kunnen dienen, hoewel dan natuurlijk de nauwkeurigheid geringer zal zijn.

2°. Salol laat zich uitstekend onderkoelen. Spontaan kristalliseeren, zonder dat met opzet vaste stof in de onderkoelde vloeistof gebracht wordt, kan bijna geheel uitgesloten worden. Slechts bij zeer sterke onderkoeling (meer dan 40°) wordt de spontane kiemvorming hinderlijk. Dit is echter slechts het geval als de stof voldoende droog wordt gehouden. Een geringe hoeveelheid water veroorzaakt direct de vorming van kiemen van de vaste stof in verschillende plaatsen van de vloeistof. De waarneming wordt daardoor onmogelijk.

3°. Het smeltpunt van salol is zeer geschikt gelegen (42°), zoodat men de waarnemingen in de nabijheid der kamertemperatuur kan verrichten.

De waarneming wordt nu op de volgende manier uitgevoerd. De kristallisatie wordt aan de bovenzijde [1]) van de vloeistof, die zich in het eene been van een *U*-vormig gebogen buis bevindt, ingeleid door het inbrengen van een kleine hoeveelheid der vaste stof. Daarna wordt de buis in een met water gevulden, goed geroerden thermostaat geplaatst. Dientengevolge worden de soldeerplaatsen van de uiteinden van het thermoelement en de koperdraden, die den stroom naar den galvanometer voeren, op de constante temperatuur van het water in den thermostaat gehouden. De galvanometer wijst dus het temperatuurverschil aan van de soldeerplaats in de as van de cylindrische buis en den thermostaat. De uitslag van den galvanometer werd photographisch geregistreerd, zoodat de geregistreerde kromme ons direct in staat stelt te overzien en te meten hoe de temperatuur in een vast punt van de as der buis in den loop van den tijd is veranderd.

De verkregen kromme heeft echter nog een andere beteekenis. Tijdens de stolling beweegt zich het grensvlak der vaste en vloeibare phase met constante snelheid en behoudt daarbij zijn vorm. Dit maakt het waarschijnlijk, dat zich de temperatuurverdeeling in de vaste stof en in de vloeistof ook onveranderd met deze snelheid zullen voortbewegen. Een theorie van het stollingsproces [2]) bevestigt deze onderstelling. De temperatuur, die in een vast punt wordt geregistreerd

---

[1]) De kristallisatie moet, ter vermijding van convectiestroomen in de vloeistof, van boven naar beneden voortschrijden en niet omgekeerd. De vloeistof heeft nl. aan het oppervlak der vaste phase, waar de smeltwarmte vrijkomt, de hoogste temperatuur. Is de warmste plaats van de vloeistof boven, dan kunnen geen convectiestroomen door temperatuurverschil optreden.

[2]) H. C. BURGER, dit versl. dl. XXIX, 1920, p. 276, verder geciteerd als l.c.

als functie van den tijd, is ook de temperatuurverdeeling die op een bepaald moment als functie van de plaats in de as van de buis bestaat. Deze temperatuurverdeeling schuift a. h. w. zonder te veranderen met eenparige snelheid langs het thermoelement en men neemt achtereenvolgens de temperaturen waar, die in de verschillende punten van de buis gelijktijdig bestaan.

Teneinde uit den uitslag van den galvanometer het temperatuurverschil tusschen de soldeerplaats en het water in den thermostaat te kunnen afleiden, moet men nog weten hoe groot de uitslag is, die met één graad overeenkomt. Hiertoe is bij begin en eind van iedere waarneming door een electromotorische kracht van bekende grootte (2×10^{-4} Volt) gedurende eenige secunden een stroom door de galvanometerketen gezonden. De uitslag die deze stroom geeft is meegeregistreerd.

Kent men de electromotorische kracht van het thermoelement voor één graad temperatuurverschil, dan kan men door vergelijking van de uitslagen tijdens het stollen en die welke de bekende electromotorische kracht heeft veroorzaakt, de temperatuur afleiden. Een bepaling van de electromotorische kracht met thermoblik van de soort waaruit de gebruikte thermoelementen waren gesneden, had tot resultaat dat deze 41.3×10^{-6} Volt bedraagt [1]).

Daar men bij deze waarnemingen snelle temperatuurveranderingen moet registreeren, moet de registreertrommel snel loopen. Daar dit moeilijk te bereiken is met een uurwerk dat van een onrust is voorzien, werd de onrust door een windvleugel vervangen. Het bezwaar van deze wijze van voortbewegen is echter, dat de beweging van de registreertrommel niet eenparig is. Om uit de verkregen temperatuurkrommen de temperatuur als functie van den tijd te kunnen bepalen, was het dus noodzakelijk op elke kromme tijdsignalen te zetten. Deze werden aldus verkregen. In de keten van de Nernst-lamp, die haar licht zendt naar den spiegel van den galvanometer en daarna in de registreertrommel, werd een weerstand geplaatst. De uiteinden van den weerstand waren verbonden met een klok die elke 10 sec. een contact tusschen deze uiteinden een oogenblik sloot. De intensiteit der lamp nam tengevolge van den verminderden weerstand, elke 10 sec. gedurende korten tijd toe, zoodat de geregistreerde lijn kleine verdikkingen vertoont, die zich herhalen op afstanden, die met dit tijdsverloop overeenkomen. Deze methode heeft het voordeel, dat in de geregistreerde kromme geen hiaten voorkomen.

---

[1]) Deze uitkomst is geheel in overeenstemming met hetgeen anderen aan niet gewalst materiaal hebben gevonden.

Een der geregistreerde lijnen wordt in Fig. 1 afgebeeld [1]).
Aan deze lijn zijn de volgende bijzonderheden waar te nemen.

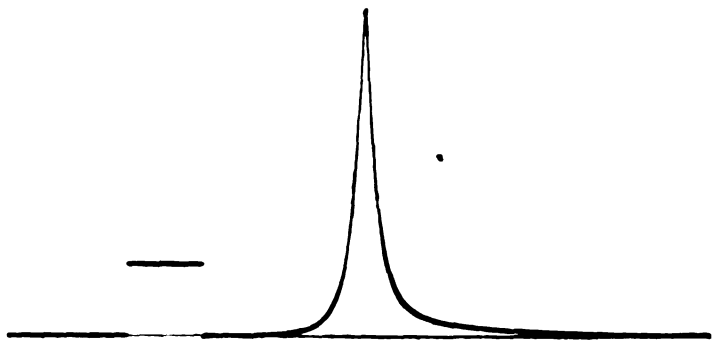


Fig. 1.

Aan de linkerzijde is de lijn horizontaal en recht [2]). Dit beteekent, dat de temperatuur in het begin van de waarneming constant is geweest. Deze constante temperatuur heerschte in de vloeistof, die in het begin het thermoelement omgaf, en was gelijk aan de temperatuur van den thermostaat. De grens der vaste phase was nog te ver verwijderd om door de daar ter plaatse vrij komende smeltwarmte de omgeving van het thermoelement te verwarmen. Nadert de vaste phase het thermoelement, dan begint de temperatuur te stijgen en de kromme vertoont een opstijgenden tak. Heeft het grensvlak der vaste en vloeibare phase het thermoelement bereikt, dan is de temperatuur maximaal; de kromme vertoont een scherpe punt. Daarna ziet men de temperatuur weer dalen en ten slotte aan de rechterzijde van de figuur weer een constante waarde bereiken nl. de temperatuur van den thermostaat. In dit laatste stadium van het proces bevindt zich het thermoelement in de vaste stof en het oppervlak der phasen is zoo ver verwijderd, dat de daar plaats hebbende warmteontwikkeling zich niet meer doet gevoelen.

Van het meeste belang is in deze kromme het maximum. Dit geeft de temperatuur der grens van de beide phasen aan. Deze temperatuur bepaalt de snelheid waarmede zich de grens in de richting van de vaste stof naar de vloeistof verplaatst. Het verband tusschen de temperatuur aan de grens der phasen en de lineaire kristallisatie-snelheid hangt af van den aard der stof en niet van

---

1) De kromme van fig. 1 werd in haar geheel in 9 minuten opgenomen.

2) De onderbreking in de horizontale lijn is veroorzaakt door een constante electromotorische kracht van 10^{-4} V., die ons, op de op p. 291 beschreven wijze, in staat stelt uit den uitslag van den galvanometer de temperatuur te vinden.

uitwendige omstandigheden. Dit is niet het geval met het verdere verloop van de kromme. Dit verloop hangt af van de eigenschappen der buis waarin de kristallisatie plaats heeft en kan berekend worden, wanneer men de noodige gegevens omtrent de kristalliseerende stof en de buis bezit [1]).

Daar het van gewicht is bij iedere waarneming de juiste waarde van de temperatuur van de grens te bepalen, dient men zich rekenschap te geven van de bronnen van fouten, die bij de meting een rol kunnen spelen.

De top van de geregistreerde kromme in Fig. 1 is scherp en maakt den indruk, dat traagheidsverschijnselen zelfs bij het snelste deel van het proces geen groote rol gespeeld hebben. Deze scherpte is echter schijn. Vergroot men de snelheid van de registreertrommel en verkleint men de gevoeligheid van den galvanometer, dan blijkt de top van de kromme min of meer afgerond te zijn, zooals men in Fig. 2 ziet.

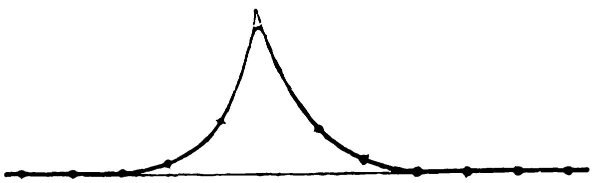


Fig 2.

Deze afronding treedt in Fig. 1 niet op, omdat daar de schaal van de figuur in horizontale richting kleiner en in verticale richting grooter is dan in Fig. 1. De oorzaak van de afronding is gelegen in de eindige afmetingen van het thermoelement.

Men kan door extrapolatie van de twee takken der kromme, zooals door de stippellijn in Fig. 2 is aangegeven, een ideale kromme teekenen, die het verloop van den uitslag van den galvanometer zou aangeven, wanneer het thermoelement oneindig klein en de galvanometer oneindig snel was. Dat deze extrapolatie niet tot een veel hooger temperatuur kan voeren, dan in de figuur is geteekend, kan blijken uit de volgende overwegingen en experimenten [2]).

1°. De traagheid van den galvanometer kan geen merkbare fout veroorzaken. De temperatuur verandert in zijn insteltijd (0.07 sec.) slechts met een zeer klein bedrag, zelfs op de oogenblikken van snelste stijging of daling.

---

[1]) l. c.

[2]) Het meest overtuigend blijkt dit echter uit de overeenstemming tusschen de berekende en waargenomen temperatuur (zie p. 298).

2°. Zooals men à priori kan inzien, heeft de breedte van het thermoelement slechts weinig invloed op de waargenomen temperatuur. Zoowel de hoeveelheid stof die verwarmd moet worden (metaal waaruit het thermoelement bestaat) als de hoeveelheid stof die de verwarming direct veroorzaakt (salol), zijn ongeveer evenredig met de breedte van het thermobandje. De temperatuurstijging zal dus van deze breedte niet afhangen.

Wel kan de breedte invloed hebben op de temperatuursverhooging van de soldeerplaats, omdat de warmte, die het thermobandje door den glaswand afvoert, met de breedte evenredig is. Zooals een benaderde berekening leert, is deze hoeveelheid warmte echter zeer gering, en zal zij dus het resultaat der meting niet merkbaar beïnvloeden.

Waarnemingen met thermoelementen van verschillende breedte (75 tot 200 μ) hebben bewezen, dat de temperatuurstijging een weinig afneemt, als de breedte van het element toeneemt. Deze invloed van de breedte moet zeer waarschijnlijk worden toegeschreven aan een kleine scheefheid van het thermobandje. Staat dit exact loodrecht op de as van de buis dan geeft het de temperatuur aan in een vlak, dat loodrecht staat op deze as en waarin de temperatuur slechts weinig van de plaats afhangt. Staat echter het bandje scheef, dan geeft het een gemiddelde temperatuur aan van verschillende loodrechte doorsneden van de buis. De dikte van de laag, waarover de temperatuur gemiddeld wordt, is evenredig met de breedte van het bandje. Dientengevolge is de top van de kromme, die eigenlijk volkomen scherp zou moeten zijn [1]), afgerond en wel des te meer naarmate het thermoelement, bij dezelfde scheefheid, breeder is. Wordt het thermoelement met zorg aangebracht, dan kan ook deze fout geen groot bedrag bereiken.

3°. De invloed van de dikte van het thermoelement laat zich à priori moeilijker schatten, dan die van de breedte. Het spreekt vanzelf, dat de temperatuurstijging, die met dik materiaal gemeten wordt, geringer is dan die welke met dunnere thermoelementen wordt bepaald. Of men echter de ware temperatuur voldoende benadert wanneer de dikte, zooals bij mijn eerste metingen het geval was, 5 μ bedraagt, kan eerst beoordeeld worden als men den invloed van de dikte op de temperatuurstijging onderzoekt. Daarom heb ik met dezelfde buis en bij dezelfde temperatuur van den thermostaat de meting herhaald met thermoelementen van verschillende dikte, varieerende van 1.4 tot 13 μ. Zooals te verwachten was nam

[1]) d.w.z. waar het differentiaalquotient van de temperatuur als functie van den tijd discontinu zou moeten zijn.

de temperatuurstijging met toenemende dikte van het thermoelement af. Het verschil in temperatuur bedroeg echter voor het dikste en dunste materiaal slechts eenige tiende graden. De metingen zijn daarna met thermoelementen van 1.4 μ dikte uitgevoerd. De temperatuur die deze dunne elementen aanwijzen verschilt zoo weinig van die, welke een oneindig dun thermobandje zou doen vinden, dat de overblijvende fout t. o. v. de overige fouten in de meting kan verwaarloosd worden.

§ 2. Wij zullen nu overgaan tot een discussie van de resultaten der metingen aan de hand der theorie [1]).

Om echter de theorie te kunnen toepassen en de temperatuur, die is waargenomen, ook te kunnen berekenen moet een aantal grootheden gemeten worden, die in de theorie voorkomen.

Deze grootheden zijn:

1. de lineaire kristallisatiesnelheid van salol bij verschillende temperaturen van den thermostaat en in buizen van verschillende uit- en inwendige afmetingen;

2. de specifieke warmte van de vaste stof en van de vloeistof;

3. de smeltwarmte van salol;

4. de dichtheid van de vaste stof en van de vloeistof.

5. het warmtegeleidingsvermogen van de vaste stof en van de vloeistof [2]):

6. de in- en uitwendige straal van de buis.

De uitkomsten dezer metingen waren de volgende:

1. De lineaire kristallisatiesnelheid werd bepaald in drie verschillende buizen, die ook voor de temperatuurwaarnemingen gebruikt zijn. De temperatuur van den thermostaat varieerde van ongeveer 0° tot 29°. Metingen van de kristallisatiesnelheid boven een temperatuur van 22° à 29°, afhankelijk van de dikte der buis, hebben geen zin. Komt men nl. te dicht bij het smeltpunt (42°), dan verloopt de kristallisatie onregelmatig en is de kristallisatiesnelheid niet constant. Men kan dan ook waarnemen, dat het oppervlak der vaste phase, dat bij lager temperaturen bol en glad is en een gedefinieerden vorm bezit, hol wordt en onregelmatig van vorm. De theorie [3]) is in staat van dit feit rekenschap te geven.

De maximale kristallisatiesnelheid bleek, onafhankelijk van de

---

[1]) l. c.

[2]) Het is mij een aangename plicht Mej. A. M. HUFFNAGEL nogmaals mijn dank te betuigen voor de moeite, die zij zich gegeven heeft, om deze grootheden te meten.

[3]) l. c.

doorsnede van de buis [1]) 3.68 m.M. per min. te bedragen. Dit getal geldt voor zuivere salol. Verontreinigingen verkleinen de maximale kristallisatiesnelheid. Daarom is de stof voor het gebruik omgekristalliseerd tot de kristallisatiesnelheid niet meer veranderde [2]).

2. De bepaling der specifieke warmte geschiedde op de gewone wijze in een met water gevulden calorimeter. De vloeibare salol was in een glazen buis ingesmolten om kristallisatie van de onderkoelde stof te verhinderen.

De gevonden getallen bedragen voor vaste en vloeibare stof resp.

$$c_1 = 0.35$$
$$c_2 = 0.37$$

3. Om de smeltwarmte te meten, werd een buis, gevuld met gesmolten onderkoelde salol, in den calorimeter gebracht en daarna werd gewacht tot de temperatuur constant was geworden. Door een kiem van de vaste stof in de onderkoelde salol te brengen, werd de kristallisatie ingeleid. Uit de optredende temperatuurverhooging volgde de smeltwarmte. Deze hangt van de temperatuur af en wel is de toename per graad gelijk aan het verschil $c_2 - c_1 = 0.02$ der specifieke warmten der vloeibare en vaste phase. Voor het gestelde doel kan men volstaan met de waarde der smeltwarmte bij een niet te ver onder het smeltpunt liggende temperatuur te bepalen bijv. 16°.

Bij deze temperatuur is voor de smeltwarmte Q gevonden;

$$Q = 18.2 \text{ cal.}$$

4. De dichtheid van de vloeistof is in onderkoelden toestand met een pyknometer bepaald en bedroeg bij kamertemperatuur:

$$\varrho_2 = 1.205$$

Uit de contractie bij stolling in een cylindrische buis werd de verhouding der dichtheden van vaste en vloeibare phase gevonden.

De dichtheid van de vaste stof bleek te zijn:

$$\varrho_1 = 1.285.$$

---

[1]) De temperatuur van den thermostaat, waarbij dit maximum optrad, hangt wel van de afmetingen der buis af.

[2]) Groote voorzorg moet worden genomen om de stof niet te veel boven zijn smeltpunt te verwarmen, daar bij hoogere temperatuur een verandering plaats heeft, die de kristallisatiesnelheid sterk vermindert. Dit verschijnsel kan misschien verklaren waarom TAMMANN een kleinere waarde (3.46 m.M. per min.) voor de maximale kristallisatiesnelheid gevonden heeft. Wanneer men de stof, die door te sterke verwarming veranderd is, herhaalde malen omkristalliseert onder vermijding van temperaturen boven 100°, neemt de kristallisatiesnelheid toe. Voor de voldoende gezuiverde stof wordt steeds weer de waarde 3.68 m.M. per min. voor de maximale kristallisatiesnelheid gevonden.

5. Het geleidingsvermogen is gemeten t. o. v. dat van glycerine. Deze relatieve metingen zijn verricht op de volgende wijze.

Tusschen drie evenwijdige kopèren platen bevonden zich de stoffen met bekend resp. onbekend geleidingsvermogen. De bovenste plaat wordt electrisch verwarmd, de onderste wordt met water gekoeld. De temperatuurverschillen tusschen de platen zijn thermoelectrisch gemeten. Uit de temperatuurverschillen en de dikten der lagen vindt men de verhouding van het geleidingsvermogen der beide stoffen. Neemt men voor glycerine de waarde:

$$\lambda = 72.5 \times 10^{-5}$$

voor het geleidingsvermogen, dan vindt men voor vaste resp. vloeibare salol:

$$\lambda_1 = 60 \times 10^{-5}$$
$$\lambda_2 = 43 \times 10^{-5}.$$

Hierbij dient opgemerkt te worden, dat de moeilijkheden, die zich voordoen bij metingen van warmtegeleiding, grooter zijn dan die bij de overige metingen, die in het voorgaande ter sprake zijn gekomen. Een eventueele fout moet dus grootendeels aan de metingen van het geleidingsvermogen worden toegeschreven.

6. De uitwendige middellijn der gebruikte buizen is gemeten met een micrometerschroef. De inwendige middellijn is bepaald door weging van een hoeveelheid kwik, die een bekende lengte van de buis gevuld heeft.

Het geleidingsvermogen van glas, dat ook invloed heeft op de gemeten temperatuur, is niet bepaald. Weliswaar zijn voor deze grootheid verschillende waarden gevonden naar gelang van de soort van glas dat is onderzocht, doch de invloed van de warmtegeleiding in den glaswand is vrij gering, zoodat men kan volstaan met een gemiddelde waarde. Hiervoor is genomen:

$$\lambda_g = 180 \times 10^{-5}.$$

Met behulp van de resultaten der genoemde metingen, kan men de temperatuur bij de stolling in een bepaalde buis numeriek berekenen. Daar de metingen zijn verricht in een punt van de as der buis moet men in de formules $r = 0$ stellen. De berekening is slechts voor een enkel geval geheel uitgevoerd. De vergelijking van theorie en directe waarneming kan n.l. geen nieuwe resultaten opleveren doch slechts de juistheid van theorie en waarnemingen bevestigen.

De buis waarvoor de berekening is uitgevoerd, had tot inwendigen straal:

$$a = 0.88 \text{ mM}.$$

De dikte van den glaswand bedroeg:

$$\delta = 0.91 \text{ mM}.$$

De temperatuur van den thermostaat was tijdens deze waarnemingen 16°. Bij deze temperatuur was de kristallisatiesnelheid in de gebruikte buis maximaal. Een fout in de temperatuur van den thermostaat heeft dus weinig invloed op de temperatuurstijging in de stollende stof.

De temperatuurstijging wordt gemeten als functie van den tijd. Daar de kristallisatiesnelheid bekend is, kan men de temperatuur in de buis als functie van de plaats gemakkelijk vinden, daar de temperatuurverdeeling die op één oogenblik bestaat, eenparig voorbij het thermoelement schuift.

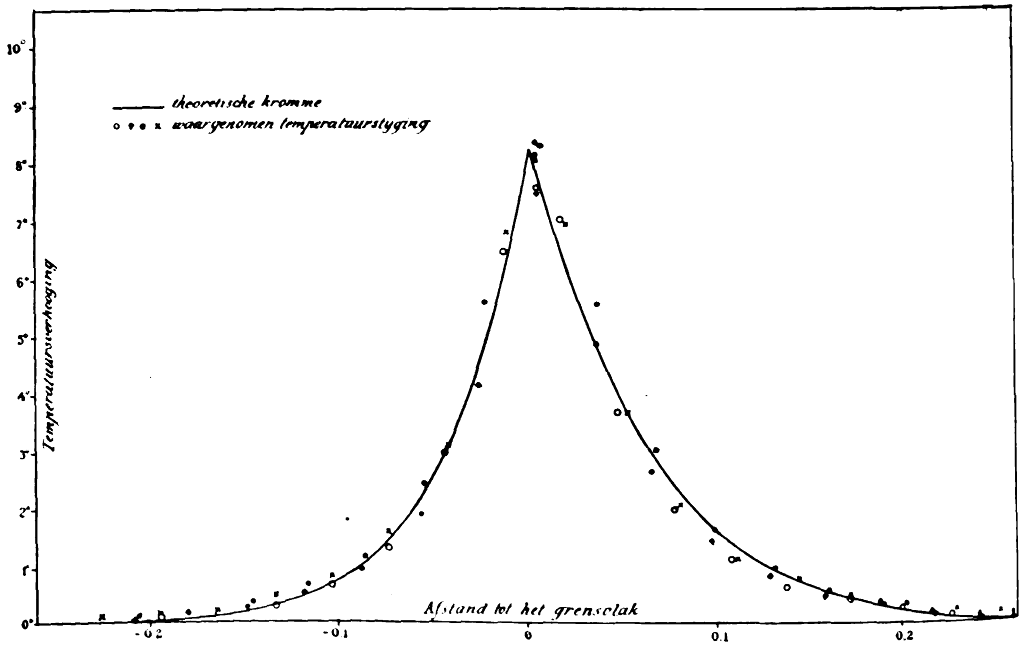


Fig. 3.

In de geregistreerde kromme is om de 10 sec. een tijdsein gegeven. Op het oogenblik van deze seinen is de temperatuur berekend en bovendien is dit ook gedaan op de tusschengelegen tijdstippen, zoodat de temperatuur om de 5 seconden bekend is. De aldus verkregen waarden zijn voor vier krommen uitgezet (fig. 3) met verschillende teekens. In dezelfde figuur is ook de berekende kromme opgenomen. De ordinaat stelt de temperatuursverhooging voor en de abcis den afstand tot het grensvlak der phasen in cM. De overeenstemming der metingen met de theoretische kromme bevestigt de juistheid van theorie en waarneming.

Ook zonder de berekening van de theoretische temperatuurverdeeling geheel uit te voeren, zijn een paar bijzonderheden, die zich bij de temperatuurmeting voordoen, uit de theorie te verklaren.

1°. Bij dezelfde temperatuur van den thermostaat is de temperatuur van de grens der phasen (maximum-temperatuur in de geregistreerde kromme) des te hooger, naarmate de inwendige straal a van de gebruikte buis grooter is. Metingen met buizen waarvan de inwendige straal a varieerde van 0.45 tot 2.8 m.M. hadden tot resultaat, dat de temperatuurstijging aan het oppervlak der vaste phase ongeveer evenredig was met a.

Dit waargenomen feit is met de theorie [1]) in overeenstemming, zooals op de volgende wijze kan blijken.

Is de glaswand van de buis niet al te dik, dan mag men bij benadering onderstellen, dat de temperatuur voor $r=a$, d. i. aan het grensvlak van salol en glas, gelijk is aan die van de omgeving. De getallen $\xi_1^{(k)}$ en $\xi_2^{(k)}$, die in de theorie voorkomen, worden dan gelijk aan de wortels van de Besselsche functie J_0 en dus onafhankelijk van a [2]). Verder zijn in de constanten $p_1^{(k)}$ en $p_2^{(k)}$ de termen met v klein t. o. v. den term $\frac{\xi^2}{a^2}$. Verwaarloost men de termen met v, dan is bij benadering:

$$p=\frac{\xi}{a}.$$

Ook de constanten α_{kl} en β_k zijn bij benadering van a onafhankelijk, omdat dit met $\xi^{(k)}$ het geval is.

Beperkt men zich tot den eersten en grootsten term van de reeks, die de temperatuurstijging θ geeft als functie van den afstand x tot de grens der beide phasen, dan vindt men voor de temperatuur aan deze grens:

$$\theta=\frac{\beta_1}{\alpha_{11}\{p_1^{(1)}\lambda_1+p_2^{(1)}\lambda_2\}}=\frac{\beta_1\, a}{\alpha_{11}\,\xi\,(\lambda_1+\lambda_2)}$$

Uit deze formule blijkt, dat inderdaad θ ongeveer evenredig is met den straal a van het lumen van de gebruikte buis.

2°. De geregistreerde krommen zijn asymmetrisch. De stijgende tak (temperatuur in de vloeibare phase) is steiler dan de dalende tak (temperatuur in de vaste phase). Dit verschil is des te geringer naarmate de kristallisatiesnelheid v kleiner is.

De theorie geeft volkomen rekenschap van deze waargenomen feiten. De meer of mindere steilheid der beide takken van de kromme

[1]) l. c.

[2]) l. c. p. 284, verg. 14.

hangt n.l. af van de grootheden $p_1^{(k)}$ en $p_2^{(k)}$. Uit de formules 17 en 22 blijkt, dat tengevolge van den term voor het wortelteeken:

$$p_1^{(k)} < p_2^{(k)}. \quad ^{1)}$$

Het verschil van p_1 en p_2 is des te grooter, naarmate v grooter is. Als v nul is vindt men:

$$p_1^{(k)} = \frac{\xi_1^{(k)}}{a} \quad ; \quad p_2^{(k)} = \frac{\xi_2^{(k)}}{a},$$

dus in dit geval zijn $p_1^{(k)}$ en $p_2^{(k)}$ bijna gelijk en moet de geregistreerde kromme uit twee bijna identieke helften bestaan.

Zooals reeds vroeger (p. 293) is opgemerkt, zal de snelheid waarmee

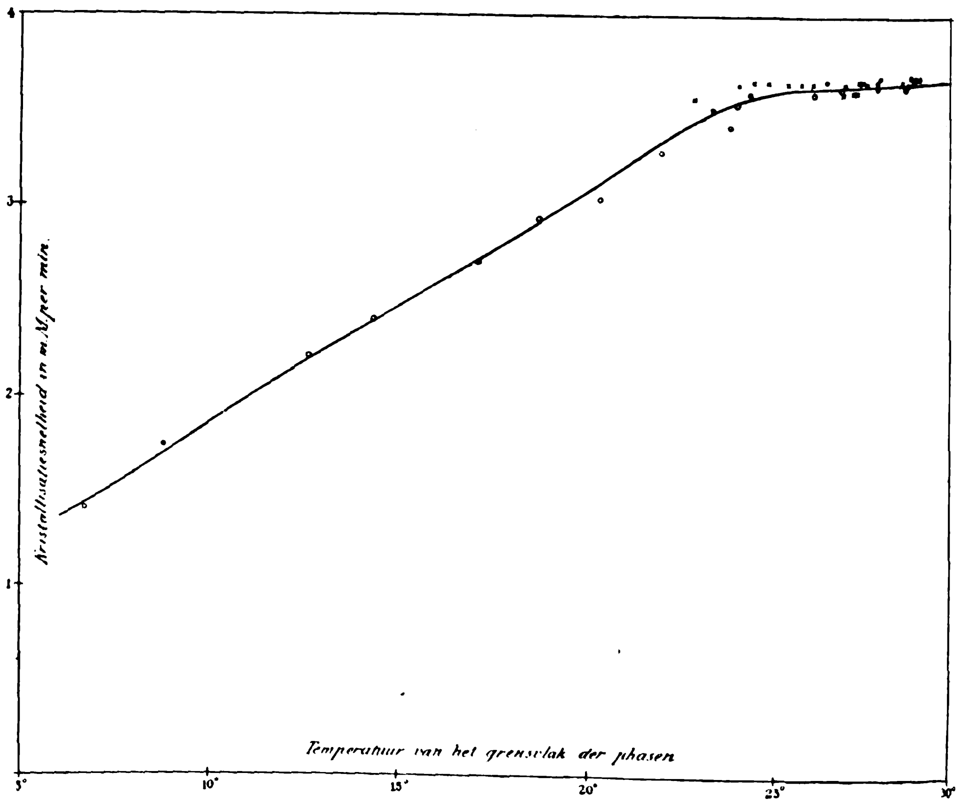


Fig. 4.

de grens der phasen zich voortbeweegt, afhangen van de temperatuur, die aan dat grensvlak heerscht. Het doel van mijn onderzoek was, naast het toetsen van de theorie van het warmtegeleidingsprobleem, dat zich bij het stollen voordoet, ook het bepalen van het functioneele verband tusschen kristallisatiesnelheid en grenstemperatuur. Dit ver-

---

1) $\xi_1^{(k)}$ en $\xi_2^{(k)}$ verschillen slechts weinig.

band is door den aard der stof (salol) geheel bepaald, en hangt niet af van de bijzonderheden der waarnemingsmethode [1]).

Elke geregistreerde kromme kan dienen ter bepaling van een punt der kromme, die het verband tusschen kristallisatiesnelheid en grenstemperatuur aangeeft. De som van de temperatuur van den thermostaat en de temperatuurstijging, die uit de kromme volgt, geeft de grenstemperatuur. De temperatuur van den thermostaat en de afmetingen van de buis bepalen de kristallisatiesnelheid, die aan de resultaten der daartoe verrichte metingen (p. 295) ontleend kan worden.

In fig. 4 is de abcis de temperatuur van het grensvlak der phasen en de ordinaat de kristallisatiesnelheid. Zooals uit de figuur blijkt, bereikt de temperatuur bij geen der metingen het smeltpunt (42°), doch blijft daar altijd ver onder [2]) De waarnemingen die temperaturen van de grens opleveren boven 29° hebben geen waarde tengevolge van het op p. 295 genoemde verschijnsel en zijn daarom in fig. 4 niet opgenomen. Wil men het deel der kromme boven 29° bepalen dan zal men een andere experimenteele methode moeten volgen, waarbij het stollingsproces ook dicht bij het smeltpunt een mathematisch gedefinieerd verloop heeft, en niet van toevallige storingen afhangt.

Den instrumentmaker van het Physisch Laboratorium, den Heer G. Koolschijn, dank ik voor de vele moeite, die hij heeft besteed aan het boren der gaatjes in de door mij gebruikte buizen.

Instituut voor theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Juni 1920.

---

[1]) J. Perrin, Ann. de Phys. Tome XI, serie 9, p. 96. 1919.

[2]) In fig. 4 zijn de waarnemingen, die met verschillende buizen zijn gedaan, met verschillende teekens aangegeven.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: *„Over de kritische grootheden in het geval van associatie, wanneer de moleculaire attractie bij dissociatie der moleculen tot de geïsoleerde atomen een belangrijke vergrooting ondergaat, mede in verband met de kritische grootheden van kwik"* II. (*Slot*).

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

§ 9. Algemeene betrekking voor den dissociatiegraad x der dubbelmoleculen.

Is Z de totale thermodynamische potentiaal van het mengsel van dubbel- en enkelvoudige moleculen, dan is, naar bekend kan worden ondersteld [1]:

$$Z = n_1 C_1 + n_2 C_2 - \int p\, dv + pv + RT(n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2),$$

wanneer n_1 en n_2 de molecuulgetallen resp. der enkelvoudige- en dubbelmoleculen voorstellen, en C_1 en C_2 gegeven zijn door

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -k_1 T(\log T - 1) + (e_1)_0 - T(s_1)_0 \\ C_2 &= -k_2 T(\log T - 1) + (e_2)_0 - T(s_2)_0 \end{aligned}\right\}.$$

Hierin zijn k_1 en k_2 de warmtecapaciteiten bij oneindig groot konstant volume, $(e_1)_0$ en $(e_2)_0$ de energiekonstanten, $(s_1)_0$ en $(s_2)_0$ de entropiekonstanten der componenten.

Bij *evenwicht* tusschen de beide componenten is

$$\mu_1 - {}^1\!/_2\, \mu_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

wanneer μ_1 en μ_2 de beide *moleculaire* potentialen (nl. $\mu_1 = \frac{\partial Z}{\partial n_1}$ en $\mu_2 = \frac{\partial Z}{\partial n_2}$) der componenten voorstellen. [μ_1 heeft dus bij kwik betrekking op 200,6 Gr., μ_2 daarentegen op $2 \times 200,6$ Gr. kwik]. Nu is

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= C_1 - \frac{\partial \omega}{\partial n_1} + RT(1 + \log(n_1 + n_2)) + RT \log c_1 \\ \mu_2 &= C_2 - \frac{\partial \omega}{\partial n_2} + RT(1 + \log(n_1 + n_2)) + RT \log c_2 \end{aligned}\right\},$$

aangezien bv. $\frac{\partial}{\partial n}(n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2) = 1 + \log(n_1 + n_2) +$

[1] Zie o.a. Arch. TEYLER (2) 11, 3ième Partie, p. 1—97 (1908).

$+ \log \frac{n_1}{n_1+n_2} = 1 + \log(n_1+n_2) + \log c_1$ is, terwijl ω geschreven is voor $\int pdv - pv$. Derhalve wordt (a):

$$(C_1 - {}^1/_2\, C_2) - \left(\frac{\partial\omega}{\partial n_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial n_2}\right) + \tfrac{1}{2} RT(1+\log(n_1+n_2)) + \tfrac{1}{2} RT \log \frac{c_1^{\,2}}{c_2} = 0.$$

Verder is blijkbaar $n_1 = {}^1/_2 \times 2x = x$, $n_2 = {}^1/_2\,(1-x)$, daar uit 1 enkelvoudig molecuul $= {}^1/_2$ dubbelmolecuul voortkomen ${}^1/_2\,(1-x)$ dubbelmoleculen en ${}^1/_2 \times 2x$ enkelvoudige moleculen.

Nu is $\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial n_1}\frac{dn_1}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial n_2}\frac{dn_2}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial n_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial\omega}{\partial n_2}$, zoodat wij verkrijgen:

$$(C_1 - {}^1/_2\, C_2) - \frac{\partial\omega}{\partial x} + \tfrac{1}{2} RT(1 + \log \tfrac{1}{2}(1+x)) + \tfrac{1}{2} RT \log \frac{c_1^{\,2}}{c_2} = 0,$$

d. w. z.

$$\frac{1}{2}\log\frac{c_1^{\,2}}{c_2} = \frac{\tfrac{1}{2}C_2 - C_1}{RT} + \frac{\frac{\partial\omega}{\partial x}}{RT} - \tfrac{1}{2}(1 + \log \tfrac{1}{2}(1+x)) \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Uit $p = \frac{{}^1/_2\,(1+x)\,RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ volgt voor $\omega = \int pdv - pv$ [waar in $\int pdv$ x konstant moet worden gehouden, aangezien in de oorspronkelijke vergelijking voor Z (welke op *elk* willekeurig mengsel betrekking heeft, al of niet in evenwicht) natuurlijk de latere eventueele evenwichtstoestand der componenten, gegeven door (a), niet in aanmerking komt, zoodat n_1 en n_2, en dus x konstant blijven]:

$$\omega = \tfrac{1}{2}(1+x)\,RT\left[\log(v-b) + \int_{(x=konst.)} \frac{db}{v-b}\right] + \frac{a}{v} - pv.$$

In het algemeen is b nl. nog een functie van v, en zal derhalve in $\int pdv$ het stuk $\int \frac{dv}{v-b}$ door $\int \frac{d(v-b)}{v-b} + \int \frac{db}{v-b} = \log(v-b) + \int \frac{db}{v-b}$ voorgesteld worden.

[Wij herinneren er aan, dat in de aangenomen toestandsvergelijking de grootheden v, a en b van het mengsel betrekking hebben op enkelvoudige moleculaire hoeveelheden (bv. 200,6 Gr. kwik). De oorspronkelijke vergelijking $p = \frac{RT}{v'-b'} - \frac{a'}{v'^2}$ (zie het eerste gedeelte van dit Artikel in het voorgaande Verslag) gaat nl. met $v' = nv$, $b' = nb$, $a' = n^2 a$, waarin n de associatiegraad $2:(1+x)$ is, in de

aangegeven vergelijking over. Komen bv. uit 1 enkelvoudig $= \frac{1}{2}$ dubbelmolecuul voort $\frac{1}{2}(2x)$ enkelvoudige en $\frac{1}{2}(1-x)$ dubbelmoleculen, dan is — wanneer b_1 het co-volume van 1 enkelvoudig molecuul en b_2 dat van 1 dubbelmolecuul voorstelt — $b = xb_1 + \frac{1}{2}(1-x)\,b_2$, welke grootheid derhalve betrekking heeft op de oorspronkelijke enkelmoleculaire hoeveelheid. Maar b' heeft op de moleculaire hoeveelheid betrekking, welke na de associatie gemiddeld 1 molecuul oplevert, en welke $2:(1+x)$ maal grooter is dan de enkelvoudige moleculaire hoeveelheid. [d.w.z. bij $x=0$ (louter dubbelmoleculen) 2 maal grooter; bij $x=1$ (louter enkelvoudige moleculen) 1 maal grooter; enz.]. Er zijn nl. uit het oorspronkelijke enkelvoudige molecuul $\frac{1}{2}(1+x)$ nieuwe moleculen gevormd, zoodat ieder nieuw molecuul gemiddeld met $2:(1+x)$ enkelvoudige correspondeert].

Thans kunnen wij $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ berekenen. Daar b een functie is van v (door b_1 en b_2) en van x, en ook v een functie van x vanwege de toestandsvergelijking $v = f(p, T, x, a, b)$, waarin ook a en b functies zijn van x, zoo zal, $\int\limits_{x=konst.}\frac{db}{v-b} = \int\limits_{x=konst.}\frac{\frac{db}{dv}}{v-b}\,dv = \theta$ stellende, vooreerst (daar blijkbaar $\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)_x = \frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x$ is)

$$\frac{d}{dx}\left(log(v-b)+\theta\right) = \frac{1}{v-b}\left[\frac{dv}{dx}-\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x\frac{dv}{dx}-\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v\right]+\left[\frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x\frac{dv}{dx}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v\right]$$

zijn, derhalve

$$= \frac{1}{v-b}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v.$$

Voor de verdere berekening van $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v$ moet θ bekend zijn, d.w.z. b in functie van v. Nemen wij daarvoor aan de vroeger [1]) door mij afgeleide benaderde betrekking

$$\frac{v-b}{v-b_0} = \beta\frac{b}{b_0},$$

waarin β een coëfficient is, welke van den aard der stof afhangt, dan volgt uit $b = \frac{b_0 v}{\beta v + (1-\beta)b_0}$ gemakkelijk $\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x = \frac{(1-\beta)\,b_0^2}{N^2}$ en $v-b = \frac{\beta v\,(v-b_0)}{N}$. Daardoor wordt

[1]) Zie Recueil. des Trav. Chim. N⁰. 3 en 5 van 1920.

$$\theta = \int\limits_{x=konst} \frac{(1-\beta)\, b_0^2}{\beta v\,(v-b_0)\,(\beta v + (1-\beta)\, b_0)}\, dv = \int \left[\frac{\beta}{\beta v + (1-\beta) b_0} - \frac{1/\beta}{v} + \frac{1/\beta - 1}{v - b_0}\right] dv,$$

d.w.z.

$$\theta = log\,(\beta v + (1-\beta)\, b_0) - \frac{1}{\beta}\, log\, v + \frac{1-\beta}{\beta}\, log\,(v - b_0),$$

hetgeen behoorlijk $= 0$ wordt voor $\beta = 1$ (ideale stoffen, waar b onafhankelijk is van v).

Hiervoor kan men ook schrijven, aangezien (zie boven) $\beta v + (1-\beta) b_0 = \frac{b_0 v}{b}$ is:

$$\theta = log\frac{b_0 v}{b} - \frac{1}{\beta}\, log\, v + \frac{1-\beta}{\beta}\, log\,(v - b_0) = -\frac{1-\beta}{\beta}\, log\frac{v}{v - b_0} - log\frac{b}{b_0}.$$

Nu is $v = \frac{(1-\beta) b}{1 - \beta\, b/b_0}$, derhalve $v - b_0 = \frac{b - b_0}{1 - \beta\, b/b_0}$, en wordt

$$\theta = -\frac{1-\beta}{\beta}\, log\frac{(1-\beta) b}{b - b_0} - log\frac{b}{b_0} = \frac{1-\beta}{\beta}\, log\,(b - b_0) - \frac{1}{\beta} log b + log b_0 - \frac{1-\beta}{\beta} log (1-\beta).\text{[1]}$$

Voor $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v$ vinden wij alzoo:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{b - b_0}\left(\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v - \left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v\right) - \frac{1}{\beta}\frac{1}{b}\left(\frac{\partial b}{dx}\right)_v + \frac{1}{b_0}\left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v,$$

of ook

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v = \frac{b_0/\beta - b}{b\,(b - b_0)}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v - \frac{b_0/\beta - b}{b_0\,(b - b_0)}\left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v.$$

Nu is $v - b = b\,(b - b_0) : (b_0/\beta - b)$ (zie de noot), derhalve eindelijk:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v = \frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v - \frac{b}{b_0}\frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v.$$

Voor $\frac{d}{dx}(log\,(v-b) + \theta)$ kan dus eenvoudig geschreven worden

---

[1]) Men zou ook direct in $\theta = \int \frac{db}{v-b}$ $v - b$ hebben kunnen vervangen door $v - b = b\,\frac{\beta(b/b_0 - 1)}{1 - \beta b/b_0}$ (afgeleid uit de boven gegeven uitdrukking voor v) en schrijven $\theta = \int \frac{b_0 - \beta b}{\beta b (b - b_0)}\, db = \int \left(\frac{1/\beta - 1}{b - b_0} - \frac{1/\beta}{b}\right) db = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) log\,(b - b_0) - \frac{1}{\beta}\, log\, b$, maar dan zou de voor de differentiatie t. o. v. x essentieele constante term (d. w. z. konstant t. o. v. v) $log\, b_0$ ontbroken hebben, en zou ook θ niet $= 0$ zijn geworden voor $\beta = 1$ (de integraal is nl. onbepaald).

$\frac{1}{v-b}\frac{dv}{dx}-\frac{b}{b_0}\frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v$, d.w.z. $\frac{1}{v-b}\frac{dv}{dx}-\frac{b}{b_0}\frac{\Delta b_0}{v-b}$. Want daar $b_0 =$ $= x(b_1)_0 + {}^1/_2(1-x)(b_2)_0$, zoo is $\left(\frac{\partial b_0}{\partial x}\right)_v = (b_1)_0 - {}^1/_2(b_2)_0$, welke grootheid wij door Δb_0 zullen voorstellen. Dit is dus de volumevermeerdering, wanneer $^1/_2$ dubbelmolecuul in 1 enkelvoudig molecuul overgaat. Voor $\frac{d\omega}{dx}$ wordt alsnu uit de boven gegeven uitdrukking voor ω gevonden:

$$\frac{d\omega}{dx} = \tfrac{1}{2} RT\,[log\,(v-b + \theta] + \tfrac{1}{2}(1+x)\,RT\left[\frac{1}{v-b}\frac{dv}{dx} - \frac{b}{b_0}\frac{\Delta b_0}{v-b}\right] - \\ - \frac{a}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{v}\frac{da}{dx} - p\frac{dv}{dx}.$$

Hierin vallen alle termen met $\frac{dv}{dx}$ weg tengevolge der toestandsvergelijking, en wij behouden:

$$\frac{1}{RT}\frac{d\omega}{dx} = \tfrac{1}{2}[log\,(v-b) + \theta] - \tfrac{1}{2}(1+x)\frac{b}{b_0}\frac{\Delta b_0}{v-b} + \frac{1}{RTv}\frac{da}{dx}.$$

Wat de grootheid a aangaat, zoo is

$\sqrt{a} = x\sqrt{a_1} + {}^1/_2(1-x)\sqrt{a_2} = {}^1/_2\sqrt{a_2} + x(\sqrt{a_1} - {}^1/_2\sqrt{a_2}) = {}^1/_2\sqrt{a_2} + x\Delta\sqrt{a}$, wanneer $\sqrt{a_1}$ op 1 enkelvoudig molecuul en $\sqrt{a_2}$ op 1 dubbelmolecuul betrekking heeft, en $\Delta\sqrt{a}$ dus de *vergrooting* der aantrekking voorstelt, wanneer $^1/_2$ dubbelmolecuul overgaat in 1 enkelvoudig molecuul (atoom.) Aangezien bij kwik $^1/_2\sqrt{a_2} = 10 \,.\, 10^{-2}$, en $\sqrt{a_1} = 40 \,.\, 10^{-2}$ ongeveer is, zoo heeft aldaar $\Delta\sqrt{a}$ de buitengewoon hooge waarde $30 \,.\, 10^{-2}$, d.w.z. $\Delta\sqrt{a}$ driemaal grooter dan $\sqrt{a_1}$.

Uit $a = (\sqrt{a})^2$ volgt dus $^{da}/_{dx} = 2\sqrt{a} \,.\, \Delta\sqrt{a}$, en zoo wordt de vergelijking (b) ten slotte:

$$\frac{1}{2}\,log\,\frac{x^2}{1-x^2} = C + \frac{1}{2}\left[log\,\frac{v-b}{{}^1/_2(1+x)} + \theta\right] - \tfrac{1}{2}(1+x)\frac{b}{b_0}\frac{\Delta b_0}{v-b} + \frac{2\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{RTv}, \quad (c)$$

wanneer wij $\frac{{}^1/_2 C_2 - C_1}{RT} - \tfrac{1}{2} - log\,2$ tot één konstante (temperatuurfunctie) C vereenigen, en voor c_1 en c_2 resp. schrijven $c_1 = x : {}^1/_2(1+x)$ en $c_2 = {}^1/_2(1-x) : {}^1/_2(1+x)$.

Het is nu deze laatste vergelijking, welke tot grondslag zal dienen ter bepaling van den dissociatiegraad x der dubbelmoleculen, d.w.z. ter bepaling der grootheid $\frac{dx}{dv}$, welke in de uitdrukkingen voor $\frac{dp}{dv}$ en $\frac{d^2p}{dv^2}$ zal voorkomen. In de genoemde vergelijking zal de

grootheid Δb_0 wel altijd uiterst gering zijn en in de meeste gevallen kunnen verwaarloosd worden, terwijl daarentegen in dit bijzondere geval, waar de dissociatie der dubbelmoleculen Hg_2 tot *geïsoleerde atomen* Hg leidt, $\Delta\sqrt{a}$ een zeer groote waarde zal bezitten, welke de wijziging der kritische grootheden geheel beheerscht.

§ 10. Bepaling van $\left(\frac{dx}{dv}\right)_t$.

Differentieeren wij nu de betrekking (c), d.w.z. $x = f(v,T)$ bij T constant t.o.v. v, er weer op lettende dat $b = f(v,x)$ en $a = f(x)$ is. Wij verkrijgen dan:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+\frac{2x}{1-x^2}\right)\frac{dx}{dv}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v-b}\left\{1-\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x-\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v\frac{dx}{dv}\right\}+\right.$$
$$\left.+\left\{\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)_x+\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_v\frac{dx}{dv}\right\}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\frac{dx}{dv}-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta b_0}{\beta(v-b_0)}\frac{dx}{dv}+\frac{(1+x)\Delta b_0}{\beta}\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{v-b_0}\right)\right]-\frac{2\sqrt{a}.\Delta\sqrt{a}}{RTv^2}+\frac{2(\Delta\sqrt{a})^2}{RTv}\frac{dx}{dv},$$

wijl voor $\frac{b}{b_0}\frac{1}{v-b}$ ook kan geschreven worden (zie § 9) $\frac{1}{\beta(v-b_0)}$.

Daar nu verder $\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)_x=\frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x$ en $\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_v=\frac{1}{v-b}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v-\frac{\Delta b_0}{\beta(v-b_0)}$ (zie § 9), zoo is

$$\left(\frac{1}{x(1-x^2)}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{dv}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v-b}-\frac{\Delta b_0}{\beta(v-b_0)}\frac{dx}{dv}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta b_0}{\beta(v-b_0)}\frac{dx}{dv}-\frac{(1+x)\Delta b_0}{\beta}\frac{1-\Delta b_0\frac{dx}{dv}}{(v-b_0)^2}\right]-\frac{2\sqrt{a}.\Delta\sqrt{a}}{RTv^2}+\frac{2(\Delta\sqrt{a})^2}{RTv}\frac{dx}{dv},$$

of ook

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{1+{}^1/_2\,x(1-x)}{x(1-x^2)}+\frac{\Delta b_0}{\beta(v-b_0)}+\frac{(1+x)(\Delta b_0)^2}{\beta(v-b_0)^2}-\frac{2(\Delta\sqrt{a})^2}{RTv}\right]\frac{dx}{dv}=\\=\frac{1}{2}\frac{1}{v-b}+\frac{1}{2}\frac{(1+x)\Delta b_0}{\beta(v-b_0)^2}-\frac{2\sqrt{a}.\Delta\sqrt{a}}{RTv^2}\end{aligned}\right\}.$$

Zien wij in het vervolg ter vermijding van onnoodige complicaties af van alle termen met Δb_0 — hetwelk men des te eerder kan doen, wijl bij het *grensvolume* $v_0 = b_0$ het covolume van $^1/_2$ dubbelmolecuul wel gelijk zal zijn aan dat van 1 enkelvoudig molecuul, en trouwens $\Delta\sqrt{a}$ zeer groot is t.o.v. Δb_0 — dan wordt derhalve:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{v-b} - \frac{2\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{RTv^2}}{\frac{1+{}^1/_2\,x(1-x)}{x(1-x^2)} - \frac{2(\Delta\sqrt{a})^2}{RTv}},$$

d. w. z.

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{1}{v-b}\,\frac{{}^1/_2 x(1-x)\left(1-\frac{v-b}{v}\,\frac{4\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{RTv}\right)}{(1-{}^1/_2 x) - 2x(1-x)(\Delta\sqrt{a})^2 : RTv} =$$

$$= \frac{1}{v-b}\,\frac{x(1-x)\left(RTv - 4\frac{v-b}{v}\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}\right)}{(2-x)\,RTv - 4x\,(1-x)\,(\Delta\sqrt{a})^2},$$

omdat $1+{}^1/_2\,x(1-x) : (1+x) = 1-{}^1/_2 x$ is. Stelt men ter bekorting

$$\frac{v-b}{v}\sqrt{a} = \alpha \quad \text{en} \quad \Delta\sqrt{a} = \Delta,$$

dan wordt ten slotte:

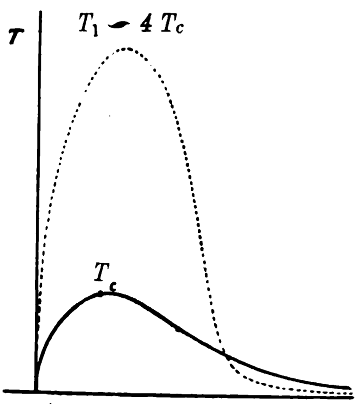
$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{1}{v-b}\,\frac{x(1-x)(RTv - 4\alpha\Delta)}{(2-x)\,RTv - 4x(1-x)\,\Delta^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Is nu $\Delta = 0$ of te verwaarloozen, zooals in alle gevallen van dissociatie, waar het *niet* tot geïsoleerde atomen komt, dan is $\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{1}{v-b}\,\frac{x(1-x)}{2-x}$, de van vroeger bekende uitdrukking, welke steeds positief is, en $=0$ wordt voor $x=0$ en $x=1$.

Maar is Δ groot, zooals bij $Hg_2 \rightarrow 2Hg$, dan zal $^{dx}/_{dv}$ tengevolge van $RTv - 4\alpha\Delta = RTv - 4\frac{v-b}{v}\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a} = v\left[RT - 4\frac{a}{v}\,\frac{v-b}{v}\,\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right]$ bij lagere temperaturen of betrekkelijk kleine waarden van v *negatief* kunnen worden. Bij kwik, waar $\sqrt{a} = {}^1/_2\sqrt{a_2} + x\,.\,\Delta\sqrt{a} = (10+30x)\,.\,10^{-2}$ is, zal bij geringe waarden van x $\Delta\sqrt{a} : \sqrt{a}$ tot $30:10=3$ naderen, zoodat alsdan de overgang van positief tot negatief bereikt wordt wanneer $RT = 12\,\frac{a}{v}\,\frac{v-b}{v}$ is. Is $v = v_c$, dan zal met $v_c = 1{,}8\,b_c$, en $a = {}^3/_4\,a_c$, $b = {}^3/_4 b_c$ ongeveer, deze temperatuur gegeven zijn door $RT = 12 \times \frac{0{,}75}{1{,}8}\,\frac{a_c}{b_c}\,\frac{1{,}8-0{,}75}{1{,}8} = \frac{35}{12}\,\frac{a_c}{b_c}$. En aangezien bij kwik $RT_c = \frac{8}{27}\,\frac{a_c}{b_c} \times 2 \times (1{,}25 \text{ ongeveer}) = \frac{20}{27}\,\frac{a_c}{b_c}$ is (zie het eerste gedeelte in het voorgaand Verslag), zoo wordt $T = {}^{63}/_{16}\;T$ ongeveer, d.w.z.

$$T \sim 4\,T_c\;(by\;v = v_c),$$

zoodat bij een volume $= v_c$ eerst boven circa 6700° abs. de grootheid ${}^{dx}/_{dv}$ weer positief zou worden.



$v = b$ $\qquad$ $v \rightarrow \infty$

FIG. 1

Bij de *kritische temperatuur* zelf is ${}^{dx}/_{dv}$ derhalve altijd *negatief*, wanneer $\Delta\sqrt{a}$ een zoo hooge waarde heeft als bij kwik en andere dergelijke stoffen. Dan neemt dus de dissociatiegraad der dubbelmoleculen Hg_2 *af*, wanneer het volume grooter wordt, in plaats van — zooals gewoonlijk — toe te nemen.

Aangezien $a(v-b) : v^2$ (a en b konstant ondersteld) hare maximumwaarde heeft bij $v = 2b$, zoo zal voor waarden van v, zoowel $< 2b$ als $> 2b$ ongeveer, de overgangstemperatuur lager uitvallen dan die (T_1) bij $v = 2b$, welke laatste slechts weinig hooger zal zijn dan die bij $v = v_c$ (ongeveer $4\,T_c$) [1]). Zie Fig. 1.

De afname van x bij toenemend volume vindt zijn verklaring natuurlijk daarin, dat bij vergooting van den dissociatiegraad x bij toenemend volume ook a grooter wordt. Maar daardoor wordt het volume weer kleiner, waarbij de afname tenslotte de oorspronkelijke toename overtreft.

Bij hooge temperatuur zal de druk betrekkelijk groot zijn, zoodat alsdan $p + {}^a/_{v^2}$ tengevolge van een vergrooting van a weinig verhoogd zal

---

[1]) De rechtertak van de (in de figuur gestippelde) overgangskromme zal wat meer naar links vallen, en T_1 wellicht *iets* lager dan uit de bovenstaande berekening zou volgen, aangezien x dan niet meer dicht bij 0 kan aangenomen worden. De snijding met den damptak der saturatielijn heeft bij $T = 0{,}8\ T_c$ ongeveer plaats. Uit $pv = {}^1/_2(1 + x)\ RT$ en $p = p_c\, e^{-4{,}14(1/m-1)}$, waar 4,14 de dampdrukfactor $f = 1{,}8 \times 2{,}303$ en $m = T : T_c$ is, volgt nl. $p_c\, v\, e^{-etc.} = {}^1/_2\,(1 + x)\, mRT_c$. Stelt men bij benadering $x = {}^1/_2$, dan wordt (met $v = nv_c$ en $RT_c : p_c v_c = s$) $n\, e^{-etc.} = {}^3/_4\ m\, s$. Nu is bij kwik $s = 2{,}62$ (zie het geciteerde eerste deel), zoodat ten slotte $n = 1{,}965\, m\, e^{4{,}14(1/m-1)}$ is (saturatiekromme). Dit moet nu worden gecombineerd met $RT = 4\, \frac{a}{v}\, \frac{v-b}{v}\, \frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$. Hierin is $\Delta\sqrt{a} = 30\,.\,10^{-2}$, terwijl met $x = {}^1/_2$ $\sqrt{a} = 25.10^{-2}$ wordt. Stelt men bij het snijpunt $a = 1{}^1/_4\, a_c$, $b = 1{}^1/_4\, b_c$ ongeveer, dan wordt dus $mRT_c = 6\, \frac{a_c}{nv_c}\, \frac{nv_c - 1{}^1/_4 b_c}{nv_c}$, d.w.z. met $v_c = 1{,}8\, b_c$ en $RT_c = \frac{20}{27}\, \frac{a_c}{b_c}$ (zie boven) $m = 2{,}5\, \frac{1{,}8n - 1{}^1/_4}{n^2}$ (overgangskromme). Aan beide vergelijkingen wordt voldaan door $m = 0{,}778$, $n = 4{,}99$ (snijpunt), zoodat dit bij $T = 0{,}8\ T_c$ ongeveer zal liggen, waarbij $v = 5v_c$ is.

worden; $v-b$ en dus ook v zal dan betrekkelijk weinig verlaagd worden. Daarom zal bij hooge temperatuur (hooger dan de kritische overgangstemperatuur $T'_1 = 4\ T_c$ bij H_g) $^{dx}/_{dv}$ altijd positief zijn. Ditzelfde is ook het geval bij groote waarden van v, want dan heeft $^a/_{v^2}$ naast p slechts geringen invloed.

Wat de waarden van v dicht bij b betreft, zoo zal ook hier $^{dx}/_{dv}$ steeds positief uitvallen, aangezien v niet kleiner dan b kan worden en x niet kleiner dan 0. Door vergrooting van a zal dan het volume wel iets geringer worden; maar deze vermindering zal slechts uiterst gering kunnen zijn, daar v reeds bijna $= b$ is.

Opmerking. Daar in de vergelijking (c) de konstante C (door $(^1/_2 C_2 - C_1) : RT$) den term $(^1/_2 (e_2)_0 - (e_1)_0) : RT = - Q_0 : RT$ zal bevatten, waarin Q_0 de — steeds positieve — dissociatiewarmte voorstelt (zie § 9), terwijl θ den term $(^1/_\beta - 1)\ log\ (v-b)$ bevat (want $v-b = (v-b_0) \times \beta\ ^b/_{b_0}$), zoo zal $x : \sqrt{1-x^2}$ van den vorm $k \times (v-b)^{^1/_{2\beta}} \times e^{\left(-Q_0 + \frac{2\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{v}\right) : RT}$ zijn, waarin k dus noch $v-b$, noch T exponentieel zal bevatten. Is dus de term met $\Delta\sqrt{a}$ kleiner dan Q_0, dan zal bij $T = 0$, $v = b$ x exponentieel tot 0 naderen. (Mocht de term met $\Delta\sqrt{a}$ grooter dan Q_0 zijn, dan nadert $1-x$ exponentieel tot 0). Het differentiaalquotient $^{dx}/_{dv}$ zal derhalve volgens (1), daar het den factor $x(1-x) : (v-b)$ bevat, in alle gevallen bij $T = 0$, $v = b$ exponentieel tot 0 naderen. Is echter $T > 0$, dan hangt bij $v = b$ alles van den exponent van $v - b$ af, welke blijkbaar $^1/_{2\beta} - 1$ zal zijn. Bij „ideale" stoffen, waar $\beta = 1$, is die exponent negatief en nadert dus $^{dx}/_{dv}$ tot ∞. Maar bij „gewone" stoffen, waar $^1/_\beta$ zich tusschen ruim 2 en ruim 4 beweegt (naarmate, met het oog op den in β voorkomenden factor $1 : a$, de temperatuur hooger of lager is), zal de bedoelde exponent positief uitvallen, en alzoo $^{dx}/_{dv}$ tot 0 naderen.

§ 11. Het differentiaalquotient $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t$ en de waarde van RT_c.

Uit de toestandsvergelijking $p = \frac{^1/_2 (1+x)\ RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$ volgt nu:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{^1/_2 RT}{v-b}\left(\frac{dx}{dv}\right)_t - \frac{^1/_2 (1+x)\ RT}{(v-b)^2}\left(1 - \left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x - \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v \left(\frac{dx}{dv}\right)_t\right) +$$

$$+ \frac{2a}{v^3} - \frac{2\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{v^2}\left(\frac{dx}{dv}\right)_t.$$

Wederom $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v = \Delta b = 0$ stellende, evenals vroeger Δb_0, en voor $\left(\frac{\partial b}{\partial v}\right)_x$ schrijvende b', zoo is dus

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dv}\right)_t \left[\frac{RT}{v-b} - \frac{4\sqrt{a}\,.\,\Delta\sqrt{a}}{v^2}\right] - \frac{{}^1/_2\,(1+x)\,RT}{(v-b)^2}(1-b') + \frac{2a}{v^3}\,.$$

Thans voor ${}^{dx}/_{dv}$ hare waarde uit (1) substitueerend, zoo vinden wij:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{1}{2}\frac{x(1-x)}{v-b}\frac{RTv - 4a\Delta}{(2-x)\,RTv - 4x\,(1-x)\,\Delta^2}\left[\frac{RT}{v-b} - \frac{4a\Delta}{v\,(v-b)}\right] -$$

$$- \frac{{}^1/_2\,(1+x)\,RT}{(v-b)^2}(1-b') + \frac{2a}{v^3},$$

voor $\sqrt{a}$ (zie § 10) $a\ {}^v/_{v-b}$ en voor $\Delta\sqrt{a}$ eenvoudig Δ schrijvend; derhalve ook:

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_t = \frac{1}{2v\,(v-b)^2}\left[\frac{x\,(1-x)\,(RTv-4a\,\Delta)^2}{(2-x)\,RTv-4x\,(1-x)\,\Delta^2} - (1+x)\,RTv\,(1-b') + 4a^2\right].$$

Dit moet nu in het kritische punt $= 0$ zijn; wij hebben alzoo:

$$x(1-x)\,(RTv-4a\Delta)^2 = [(2-x)RTv - 4x\,(1-x)\,\Delta^2]\,[(1+x)\,RTv)\,1-b') - 4a^2],$$

d.w.z., na eenige herleiding en deeling van beide leden door RTv:

$$x\,(1-x)\,RTv - 8\,x\,(1-x)\,a\,\Delta = (2-x)\,(1+x)\,RTv\,(1-b') - 4\,(2-x)\,a^2 -$$

$$- 4\,x\,(1-x^2)\,(1-b')\,\Delta^2,$$

en hieruit

$$\underline{\tfrac{1}{4}\,RT_c\,v_c} = \frac{(2-x)\,a^2 - 2\,x\,(1-x)\,a\,\Delta + x\,(1-x^2)\,(1-b')\,\Delta^2}{(2-x)\,(1+x)\,(1-b') - x\,(1-x)}, \quad (2)$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven:

$$\tfrac{1}{4}\,RT_c\,v_c = a\,\Delta + \frac{(a-(1+x)\,(1-b')\,\Delta)\,((2-x)\,a - x\,(1-x)\,\Delta)}{(2-x)\,(1+x)\,(1-b') - x\,(1-x)}\,. \quad (2a)$$

Dit is dus reeds de uitdrukking voor RT_c, uitgedrukt in v_c, b_c, etc. Ter contrôle diene dat bij $\Delta = 0$ deze overgaat in

$$RT_c = \frac{4\,(2-x)\,a^2}{Nv_c} = \frac{4(2-x)\,a_c}{N}\frac{(v_c-b_c)^2}{v_c^3},$$

onze vroegere uitdrukking (Arch. Teyler l. c.), afgeleid voor het geval dat er geen verandering in de moleculaire attractie plaats vindt tengevolge der dissociatie der dubbelmoleculen.

Is ook $x = 1$ (alle moleculen enkelvoudig), dan wordt

$$RT_c = \frac{2a_c}{1-b'_c}\frac{(v_c-b_c)^2}{v_c^3} = \frac{2}{1-b'_c}\frac{(r-1)^2}{r^3}\frac{a_c}{b_c},$$

zooals wij eveneens vroeger hebben gevonden. (Zie o.a. ook K. A. v. W. 9 Mei 1913, p. 1434, en 12 Febr. 1914, p. 795). De waarde van $r = v_c : b_c$ kan hierin natuurlijk eerst bepaald worden, wanneer

wij ook nog $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_t = 0$ hebben gesteld. Bij ideale stoffen is $b'_c = 0$, $r = 3$, dus $RT_c = \frac{8}{27}\frac{a_c}{b_c}$. Bij gewone stoffen, waar b'_c tot $^1/_8$, r tot 2 nadert, wordt $RT_c = \frac{8}{28}\frac{a_c}{b_c}$; beide bekende uitdrukkingen.

Wij willen nu eerst nog even de gevonden waarde van RT_c in (1) substitueeren, ten einde de waarde van $^{dx}/_{dv}$ in het kritisch punt te bepalen. Schrijft men ter bekorting:

$$\left.\begin{array}{l} a - (1+x)(1-b')\Delta = A \ ; \quad (2-x)\,a - x\,(1-x)\,\Delta = B \\ (2-x)(1+x)(1-b') - x\,(1-x) = 2 - (2-x)(1+x)\,b' = N \end{array}\right\},$$

dan wordt dus, na substitutie van

$$\tfrac{1}{4}\,RT_c\,v_c = a\,\Delta + \frac{AB}{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2b)$$

in

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{x\,(1-x)}{v-b}\,\frac{^1/_4\,RTv - a\,\Delta}{(2-x)\,^1/_4\,RTv - x\,(1-x)\,\Delta^2},$$

verkregen:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{x\,(1-x)}{v-b}\,\frac{AB:N}{(2-x)\,a\,\Delta + (2-x)\,AB:N - x\,(1-x)\,\Delta^2}.$$

Hierin is $(2-x)a\,\Delta - x\,(1-x)\,\Delta^2 = B\Delta$, derhalve is ook

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_t = \frac{x\,(1-x)}{v-b}\,\frac{A}{N\Delta + (2-x)\,A} = \frac{x\,(1-x)}{v-b}\,\frac{A}{B},$$

omdat $N\Delta + (2-x)\,A$ blijkbaar $= B$ is. Wij hebben derhalve ten slotte voor $\left(\frac{dx}{dv}\right)_t$ bij het kritisch punt de hoogst eenvoudige uitdrukking

$$\underline{\left(\frac{dx}{dv}\right)_t}_c = \frac{x\,(1-x)}{v_c-b_c}\,\frac{A}{B} = \frac{x\,(1-x)}{v_c-b_c}\,\frac{a-(1+x)(1-b')\,\Delta}{(2-x)\,a - x\,(1-x)\,\Delta}, \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin x, b', a en Δ alle op T_c betrekking hebben.

Het spreekt vanzelf dat het onnoodig is een uitdrukking voor p_c af te leiden, daar deze onmiddellijk uit de toestandsvergelijking na substitutie der verkregen waarde van RT_c volgt. (Zie de eerste Verhandeling).

§ 12. Het tweede differentiaalquotient $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_t$ en de waarde van $r = v_c : b_c$.

Zoals reeds boven is opgemerkt, kunnen wij de einduitdrukking voor RT_c eerst bepalen nadat ook v_c in b_c is uitgedrukt. Maar daartoe

is noodig de kennis van het tweede differentiaalquotient, hetwelk bij het kritisch punt weer $=0$ moet worden gesteld.

Aangezien $\left(\frac{dp}{dv}\right)_t=0$ identiek is met de daaruit afgeleide betrekking (2) of (2*b*), zoo is $\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_t = 0$ identiek met $\frac{d}{dv}\Big[{}^1/_4 RTv - -\left(\alpha\Delta+\frac{AB}{N}\right)\Big]=0$. Nemen wij (2) in plaats van (2*b*), dan is dus te differentieeren t. o. v. v (T konstant):

$$^1/_4\, RTv\, N=(2-x)\,\alpha^2-2\,x\,(1-x)\,\alpha\,\Delta+x\,(1-x^2)\,(1-b')\,\Delta^2,$$

hetgeen geeft, wanneer wederom evenals in § 11 $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)_v=\Delta\, b=0$ wordt gesteld, zoodat b alleen een functie is van v:

$$\tfrac{1}{4}RT(N+N'v)=2\,(2-x)\,\alpha\,\alpha'-\alpha^2\left(\frac{dx}{dv}\right)_t-2x\,(1-x)\,\alpha'\Delta+2\,(2x-1)\,\alpha\,\Delta\left(\frac{dx}{dv}\right)_t-$$
$$-x\,(1-x^2)\,b''\,\Delta^2-(3\,x^2-1)\,(1-b')\,\Delta^2\left(\frac{dx}{dv}\right)_t.$$

Na vermenigvuldiging met v en substitutie van $^1/_4\, RTv$ door hare waarde (2*b*) verkrijgt men:

$$\left(\alpha\Delta+\frac{AB}{N}\right)\left(N+x\,(1-x)\,(2\,x-1)\,\frac{v}{v-b}\;b'\,\frac{A}{B}-(2-x)\,(1+x)\,b''\,v\right)=$$
$$=2\,\alpha'\,v\,B-v\left(\frac{dx}{dv}\right)_t\Big[\alpha^2-2(2x-1)\alpha\Delta+(3x^2-1)(1-b')\Delta^2\Big]-x(1-x^2)b''v\Delta^2.$$

Immers uit $N=2-(2-x)\,(1+x)\,b'$ volgt $N'=-(2-x)(1+x)\,b''+ +(2x-1)\,b'\left(\frac{dx}{dv}\right)_t$, derhalve wordt $N'v$, met $\left(\frac{dx}{dv}\right)_t=\frac{x\,(1-x)}{v-b}\,\frac{A}{B}$, hetgeen boven is neergeschreven. Verder is $(2-x)\,\alpha-x\,(1-x)\,\Delta$ door B vervangen.

Voor $\alpha'=\left(\frac{d\alpha}{dv}\right)_t=\frac{d}{dv}\left(\frac{v-b}{v}\sqrt{a}\right)_t$ vinden wij $\left(\frac{1-b'}{v}-\frac{v-b}{v^2}\right)\sqrt{a}\;+ +\frac{v-b}{v}\,\Delta\sqrt{a}\left(\frac{dx}{dv}\right)_t$, derhalve

$$\alpha'v=\alpha\left(\frac{v}{v-b}(1-b')-1\right)+x(1-x)\frac{A}{B}\,\Delta=\alpha\,\frac{v}{v-b}(1-b')-\frac{1}{B}\Big(\alpha B-x(1-x)A\Delta\Big),$$

zoodat wij vinden:

$$\left(\alpha\Delta+\frac{AB}{N}\right)\left(N+x\,(1-x)\,(2\,x-1)\,\frac{v}{v-b}\,b'\,\frac{A}{B}\right)-$$
$$-\frac{(1+x)\,b''\,v}{N}\Big[2-x)\,(N\,\alpha\,\Delta+AB)-x\,(1-x)\,N\,\Delta^2\Big]=$$

$$= 2B\left[a\frac{v}{v-b}(1-b') - \frac{aB - x(1-x)A\Delta}{B}\right] -$$

$$- x(1-x)\frac{v}{v-b}\frac{A}{B}\left[a^2 - 2(2x-1)a\Delta + (3x^2-1)(1-b')\Delta^2\right].$$

Schrijft men thans ter bekorting C voor

$$Na\Delta + AB = (2-x)a^2 - 2x(1-x)a\Delta + x(1-x^2)(1-b')\Delta^2$$

(volgens (2) en (2b)), dan wordt

$$C + x(1-x)(2x-1)\frac{v}{v-b}b'\frac{AC}{NB} - (1+x)\frac{B^2}{N}b''v =$$

$$= 2Ba\frac{v}{v-b}(1-b') - 2C - x(1-x)\frac{v}{v-b}\frac{A}{B}[a^2 - \text{etc.}],$$

omdat $aB - x(1-x)A\Delta = C$ is, en $(2-x)C - x(1-x)N\Delta^2 = B^2$.

Derhalve is ook

$$3C - (1+x)\frac{B^2}{N}b''v = 2aB\frac{v}{v-b}(1-b') - x(1-x)\frac{A}{B}\frac{v}{v-b}\left[(2x-1)b'\frac{C}{N} + (a^2 - \text{etc.})\right].$$

Nu kan voor $(2x-1)b'C + N(a^2 - \text{etc.})$ geschreven worden $B^2(1-b') - A^2(x^2-4x-2)$, zoodat wij hebben:

$$3C - \frac{(1+x)B^2}{N}b''v = 2aB\frac{v}{v-b}(1-b') - x(1-x)\frac{A}{B}\frac{v}{v-b}\frac{B^2(1-b') - A^2(x^2-4x+2)}{N} \quad (a)$$

Voor wij verder gaan, zullen wij op deze vergelijking eerst een contrôle-berekening toepassen. Wanneer $\Delta = 0$ is, dan wordt $A = a$, $B = (2-x)a$, $C = (2-x)a^2$, zoodat (a) alsdan overgaat in

$$3(2-x)a^2 - \frac{(1+x)(2-x)^2a^2}{N}b''v = 2(2-x)a^2\frac{v}{v-b}(1-b') -$$

$$- \frac{x(1-x)}{2-x}\frac{v}{v-b}\frac{(2-x)^2a^2(1-b') - a^2(x^2-4x+2)}{N},$$

d.w.z. na deeling door $(2-x)a^2$:

$$3 - \frac{(1+x)(2-x)}{N}b''v = 2\frac{v}{v-b}(1-b') - x(1-x)\frac{v}{v-b}\frac{(1-b') - (x^2-4x+2):(2-x)^2}{N},$$

waarin $N = (2-x)(1+x)(1-b') - x(1+x) = 2 - (2-x)(1+x)b'$ is. Dit geeft alzoo:

$$3 - \frac{b''v}{1-b'}\frac{1}{1 - \frac{x(1-x)}{(2-x)(1+x)(1-b')}} = \frac{v}{v-b}\left[2(1-b') - \frac{x(1-x)(1-b')}{N} + \right.$$

$$\left. + \frac{x(1-x)((2-x)^2-2)}{(2-x)^2N}\right],$$

of

$$3-\frac{b''v}{1-b'}\,\frac{1}{1-\tau}=\frac{v}{v-b}\left[2\,(1-b')-\frac{x\,(1-x)}{(2-x)^2}\,\frac{2-(2-x)^2\,b'}{2-(2-x)\,(1+x)\,b'}\right].$$

Bij ideale stoffen, waar $b'=0, b''=0$, zou

$$3=\frac{v}{v-b}\left[2-\frac{x\,(1-x)}{(2-x)^2}\right]=\frac{v}{v-b}\,\frac{8-9x+3x^2}{(2-x)^2}$$

worden, identiek met hetgeen wij vroeger (Arch. TEYLER en K. A. v. W., l.c.) hebben afgeleid.

Is $x=0$ of 1, dan wordt

$$3-\frac{b''v}{1-b'}=2\,\frac{v}{v-b}(1-b'),$$

en ook dit is een bekend resultaat (K. A. v. W., l.c.), hetwelk met $b'=0$, $b''=0$ overgaat in $3=2\,\frac{v}{v-b}$, d.w.z. $v_c=3b_c$.

Wij zullen nu bovenstaande vergelijking (a) nog eenigszins herleiden. Deelen wij door $(2-x)a^2$, dan wordt (voor de beteekenis van τ, zie hieronder):

$$3\left[1-\frac{2x(1-x)}{2-x}\frac{\Delta}{a}+\frac{x(1-x^2)(1-b')}{2-x}\frac{\Delta^2}{a^2}\right]-\frac{(1+x)(2-x)\left(1-\frac{x(1-x)}{2-x}\frac{\Delta}{a}\right)^2}{(2-x)(1+x)(1-b')(1-\tau)}\,b''v=$$

$$=\frac{v}{v-b}(1-b')\left[2\left(1-\frac{x(1-x)}{2-x}\frac{\Delta}{a}\right)-\frac{x(1-x)}{2-x}\,\frac{1-(1+x)(1-b')\frac{\Delta}{a}}{1-\frac{x(1-x)}{2-x}\frac{\Delta}{a}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{(2-x)\left(1-\frac{x(1-x)}{2-x}\frac{\Delta}{a}\right)^2-\frac{x^2-4x+2}{(2-x)(1-b')}\left(1-(1+x)(1-b')\frac{\Delta}{a}\right)^2}{(2-x)(1+x)(1-b')(1-\tau)}\right],$$

waarin $\frac{\Delta}{a}=\frac{v}{v-b}\,\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ is. Stelt men nu:

$$(1+x)(1-b')\frac{\Delta}{a}=\varrho\quad;\quad\frac{x\,(1-x)}{2-x}\,\frac{\Delta}{a}=\sigma\quad;\quad\frac{x\,(1-x)}{(2-x)\,(1+x)\,(1-b')}=\tau,$$

zoodat $\sigma=\tau\varrho$ is, dan wordt het bovenstaande:

$$3\,(1-2\sigma+\varrho\sigma)-\frac{(1-\sigma)^2}{1-\tau}\,\frac{b''v}{1-b'}=$$

$$=\frac{v-b}{v}(1-b')\left[2\,(1-\sigma)-x\,(1-x)\,\frac{1-\varrho}{1-\sigma}\,\frac{(1-\sigma)^2-\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2(1-b')}(1-\varrho)^2}{(2-x)(1+x)(1-b')(1-\tau)}\right],$$

of

$$3\,(1+\tau\varrho\,(\varrho-2))-\frac{(1-\sigma)^2}{1-\tau}\,\frac{b''v}{1-b'}=$$

$$=\frac{v}{v-b}\,(1-b')\left[2\,(1-\sigma)-\frac{\tau}{1-\tau}\,\frac{1-\varrho}{1-\sigma}\left\{(1-\sigma)^2-\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2\,(1-b')}(1-\varrho)^2\right\}\right].$$

Stelt men verder $\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\varphi$, dan is $\frac{\Delta}{\alpha}=\varphi\,\frac{v}{v-b}$, derhalve $\frac{v}{v-b}\times$ $\times\,(1-b')=\frac{\Delta}{\alpha}\,\frac{1-b'}{\varphi}=\frac{\varrho}{\varphi(1+x)}$, en wordt ten slotte met $-\frac{b''v}{1-b'}=\beta$ en $\frac{x^2-4x+2}{(2-x)^2(1-b')}=\frac{1}{1-b'}\left(1-\frac{2}{(2-x)^2}\right)=\omega$:

$$3\,(1+\tau\varrho\,(\varrho-2))+\frac{(1-\tau\varrho)^2}{1-\tau}\,\beta=$$

$$=\frac{\varrho}{\varphi\,(1+x)}\left[2\,(1-\tau\varrho)+\frac{\tau}{1-\tau}\,\frac{\varrho-1}{1-\tau\varrho}\left\{(1-\tau\varrho)^2-\omega\,(\varrho-1)^2\right\}\right], \quad (4)$$

wanneer $1-\varrho$ door $-(\varrho-1)$ wordt vervangen, aangezien ϱ altijd >1 is. In deze laatste vergelijking is nu $\varrho=\varphi(1+x)(1-b')\times$ $\times\,\frac{v_c}{v_c-b_c}$, direct in verband staande met $r=v_c:b_c$, de hoofdonbekende; d.w.z. zij drukt ϱ (derhalve $r=v_c:b_c$) uit in b', b'' (of β), x [1]) en den parameter $\varphi=\frac{\Delta\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, in verband staande met $\frac{\Delta\sqrt{a}}{{}^1/_2\sqrt{a_1}}$, daar $\sqrt{a_2}={}^1/_2\sqrt{a_1}+x\,\Delta\sqrt{a}$ is. Bij kwik is dus $\varphi=\frac{3}{1+3x}$, daar alsdan $\Delta\sqrt{a}:{}^1/_2\sqrt{a_1}=30:10=3$ is.

Bij kleine waarden van x is τ zeer gering; φ is alsdan in de buurt van 3, en ω in die van $1:2\,(1-b')$.

Drukken wij nu ook nog de in § 11 gevonden waarden van RT_c en $\left(\frac{dx}{dv}\right)_{t_c}$ in de zooeven aangenomen hulponbekenden uit, dan kan men in de eerste plaats voor (2) schrijven:

$$RT_c=\frac{4}{v_c}\,\frac{(2-x)\,a^2\,(1+\tau\varrho\,(\varrho-2))}{(2-x)\,(1+x)\,(1-b')\,1-\tau)}=\frac{2}{1+x}\,\frac{2\,(v_c-b_c)^2a_c}{v_c^3\,(1-b')}\,\frac{1+\tau\varrho\,(\varrho-2)}{1-\tau},$$

d. w. z.

$$RT_c=\frac{2}{1+x}\cdot\frac{2\,(r-1)^2}{(1-b')r^3}\,\frac{a_c}{b_c}\times\frac{1+\tau\,\varrho\,(\varrho-2)}{1-\tau}, \quad (5)$$

[1]) De waarde van x in het kritische punt zal door (c) bepaald zijn, en behalve van T_c en v_c ook van de energie- en entropiekonstanten (in C begrepen) afhangen.

waarin $\sqrt{a_c} = \frac{1}{2}\sqrt{a_2} + x\,\Delta\sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{a_2}\,(1+3x)$ en $r = v_c : b_c$ bepaald is door (4).

En in de tweede plaats kan voor (3) geschreven worden:

$$\left(\frac{dx}{dv}\right)_{t_c} = \frac{1}{v_c - b_c}\,\frac{x(1-x)}{2-x}\,\frac{1-\rho}{1-\tau\rho}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

waarin $\rho = \varphi(1+x)\,(1-b')\,\dfrac{v_c}{v_c - b_c} = \dfrac{3(1+x)}{1+3x}\,(1-b')\,\dfrac{r}{r-1}$ is (zie boven). Bij kwik, waar $\varphi_0 = 3$ is, zal derhalve bij T_c $1-\rho$ steeds negatief zijn, en derhalve ook ${}^{dx}/_{dv}$.

§ 13. Berekening van eenige numerieke waarden.

Aangezien de waarde van x bij T_c altijd zeer klein is, zoo kan men benaderd schrijven voor (4), wanneer $1-\tau = 1$ en $1+x = 1$ wordt gesteld:

$$3(1+\tau\rho(\rho-2)) + \beta(1-\tau\rho)^2 = \frac{\rho}{\varphi}\left[2(1-\tau\rho) + \tau\,\frac{\rho-1}{1-\tau\rho}\left\{(1-\tau\rho)^2 - \omega(\rho-1)^2\right\}\right],$$

en hieruit volgt voor τ $\left(= \dfrac{x}{2(1-b')},\ \text{wanneer } x \text{ klein is, zie boven}\right)$:

$$\tau = \frac{\dfrac{2\rho}{\varphi}(1-\tau\rho) - (3+\beta(1-\tau\rho)^2)}{3\rho(\rho-2) - \dfrac{1-\tau\rho}{\varphi}\,\rho(\rho-1) + \dfrac{\omega}{1-\tau\rho}\,\dfrac{\rho(\rho-1)^3}{\varphi}} =$$

$$= \frac{2\left[(1-\tau\rho) - \dfrac{3+\beta(1-\tau\rho)^2}{2}\,\dfrac{\varphi}{\rho}\right]}{3\varphi(\rho-2) - (1-\tau\rho)(\rho-1) + \dfrac{\omega}{1-\tau\rho}(\rho-1)^2}.$$

Bij zeer kleine waarden van x kan ook $1-\tau\rho = 1$ worden gesteld, en wordt benaderd:

$$\tau = \frac{2\left[1 - \dfrac{3+\beta}{2(1-b')}\,\dfrac{r-1}{r}\right]}{3\varphi(\rho-2) - (\rho-1) + \omega(\rho-1)^2}.$$

Voor ω kan bij kleine x geschreven worden $1 : 2(1-b')$. Nu is ρ groot (6 à 7), en men kan gemakkelijk berekenen dat in den noemer de beide eerste termen tegenover $\omega(\rho-1)^2$ kunnen worden weggelaten, mits men ter compensatie dezen laatste met een factor 1,35 ongeveer voorziet. Schrijft men nog δ voor $1 - \dfrac{3+\beta}{2(1-b')}\,\dfrac{r-1}{r}$

$\left[\text{bij } x = 0\,(\tau = 0) \text{ wordt } \delta = 0 \text{ en is } \frac{r}{r-1} = \frac{3+\beta}{2(1-b')}\right]$, dan is dus

$$\tau = \frac{2\delta}{1{,}35 \times \frac{1}{2(1-b')}(\rho-1)^2}, \text{ derhalve } \underline{\tau(\rho-1)^2 = 3(1-b')\delta}.$$

Nu kan voor den factor $(1+\tau\rho(\rho-2)):(1-\tau)$ in (5) bij kleine waarden van τ geschreven worden $1+\tau(\rho-1)^2$, hetgeen met het oog op bovenstaande benaderde betrekking $1+\frac{3(1-b')\delta}{\rho-1}$ wordt.

Bij geringe waarden van x is $\rho = 3(1-b')\frac{r}{r-1}$. Daar dit ongeveer 6 is, zoo kan voor $\rho-1$ worden gezet $2{,}5\,(1-b')\frac{r}{r-1}$, zoodat wij voor den bedoelden factor benaderd $1+\frac{6}{5}\frac{r-1}{r}\delta$ verkrijgen. De in het eerste gedeelte van dit opstel bedoelde factor θ in $RT_c = \frac{2}{1+x}\,\frac{8}{27}\frac{a_c}{b_c} \times \theta$ zal dus blijkbaar volgens (5) bedragen, wanneer voor δ hare waarde wordt gesubstitueerd:

$$\theta = \frac{2(r-1)^2}{(1-b')r^2} \times \frac{27}{8}\left[1+\frac{6}{5}\frac{r-1}{r}\left\{1-\frac{3+\beta}{2(1-b')}\frac{r-1}{r}\right\}\right],$$

geldig bij zeer kleine waarden voor x. Hieraan voldoet alleen een geringe waarde van r, b.v. $r = 1{,}5$. Is dan $\beta = 0$ geworden en $b' = {}^1/_2$, zoo wordt

$$\theta = 1\left[1+\frac{2}{5}(1-1)\right] = 1,$$

terwijl bij $r = 1{,}5$ (zie het eerste deel dezer Verhandeling in het voorgaande Verslag) θ juist $= 1$ zou moeten wezen. Wellicht is x niet zoo klein, dat de bovenstaande verwaarloozingen en benaderingen geoorloofd zijn, en dan is het mogelijk dat $r > 1{,}5$ uitvalt. Maar de berekeningen worden alsdan zeer ingewikkeld.

In elk geval bevatten de formules (4), (5) en (6) de volledige oplossing van het door ons gestelde probleem.

La Tour près Vevey, voorjaar 1920.

Scheikunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt, namens den Heer A. SMITS, een mededeeling aan: *„Over de geldigheid van de verdeelingswet voor het evenwicht tusschen een mengkristalphase en een koëxisteerende vloeistof.”* I.

(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

Sedert 1911 heb ik mij meer in het bijzonder beziggehouden met onderzoekingen, die in verband met de theorie der allotropie tot doel hadden de studie van den vasten toestand.

Deze onderzoekingen hebben geleid tot opvattingen omtrent den vasten toestand, die niet te vereenigen zijn met het beeld door BRAGG gegeven naar aanleiding van de door hem gevonden Röntgenspectra.

Door den Heer SCHEFFER en mij [1]) is er op gewezen, dat wanneer men een groepeering van *atomen* in de netpunten van een kristalnet aanneemt, terwijl de bindingen overeenkomstig de valentie worden genegeerd, groote moeilijkheden ontstaan. Wij hebben bij die gelegenheid alleen om de richting aan te geven, waarin naar onze meening de oplossing moest worden gezocht een model gegeven, en het is duidelijk, dat het al of niet aannemelijke van dit model de door ons geopperde bezwaren tegen de voorstelling van BRAGG volkomen onaangetast laten. Alleen om deze bezwaren in het licht te stellen werd onze mededeeling geschreven. Wij zijn nog in een tijd van tasten en het komt mij voor, dat het Röntgenonderzoek van de vaste stof in den tegenwoordigen vorm ons nog niet in staat stelt den werkelijken innerlijken toestand te leeren kennen.

Dit neemt niet weg, dat dit onderzoek van het allerhoogste belang moet worden geacht en dat men de hoop mag koesteren, in deze richting voortgaande, eenmaal den weg te vinden, die voert tot datgene, wat ons het meest interesseert n.l. tot de wijze, waarop de chemische kracht-werking in de vaste stof tot uiting komt.

Terwijl elders de bezwaren tegen de opvatting van BRAGG uitvoerig zullen worden besproken en aangevuld, wil ik er hier reeds op wijzen, dat men zou kunnen zeggen, dat de bezwaren voor een bepaalde groep van verbindingen n.l. die, welke uit twee elementen zijn opgebouwd en zich in ionen kunnen splitsen, *ten deele* opge-

---

[1]) Proc. Kon. Akad. Amsterdam **19**, 432 (1916).

heven zouden kunnen worden, wanneer n.l. aangenomen werd dat deze dissociatie in den vasten toestand een *volledige* was.

Het is duidelijk, dat dan voor deze groep van stoffen zooals KCl NaCl etc. het valentie-bezwaar zou vervallen, maar dan zouden zich geen atomen, doch ionen in de netpunten bevinden en een chemische binding zou dan *niet* voorkomen. Het vervangen der atomen door ionen in het beeld van BRAGG zou dus reeds een belangrijke wijziging zijn voor genoemde stoffen in de goede richting.

In den laatsten tijd heeft DEBIJE [1]) resultaten gepubliceerd, die schijnen te bewijzen, dat dit inderdaad het geval is bij LiF.

Het is bijna onnoodig op te merken, dat voor alle andere verbindingen, die uit meer dan twee elementen zijn opgebouwd en samengestelde ionen leveren, de valentie toch tot uiting moet komen, daar ook bij *volledige* dissociatie in den vasten toestand dit samengesteld ion als groep aanwezig moet zijn. Maar ook bij een uit twee elementen samengestelde verbinding als HgJ_2, kan de aanname van een *volledige* dissociatie in ionen niet tot een oplossing voeren, omdat het bestaan van innerlijke evenwichten hiermede niet kan worden verklaard.

Ik wil dit betoog hier echter niet verder voortzetten, het diende alleen om er nog eens aan te herinneren, dat van chemische zijde, op zéér exceptioneele gevallen na, de valentie-werking in de vaste stof niet kan worden prijsgegeven, en het is daarom duidelijk, dat het aanbeveling verdient te zoeken naar andere methoden, die ons wellicht iets omtrent den innerlijken toestand van de gekristalliseerde stof kunnen leeren.

Zoo had ik reeds voor eenige jaren het plan opgevat na te gaan of de verdeelingswet van NERNST van toepassing is op de koexistentie van een mengkristalphase met een oplossing.

Het is duidelijk, dat de verdeelingswet van NERNST voor dit geval alleen dan geldig *kan* zijn, wanneer men de gewone thermodynamische beschouwingen, die bij evenwichten tusschen een gas en een vloeistofphase of tusschen twee vloeistofphasen tot deze wet voeren, ook mogen worden toegepast op de vaste stof. Dit is de fundamenteele vraag!

VAN 'T HOFF [2]) die de eerste was, die er in 1890 op wees dat er toestanden zijn, die men kan aangeven met de benaming van *vaste oplossingen*, was de meening toegedaan, dat op deze toestanden de theorie der verdunde vloeibare oplossingen van toepassing is.

---

[1]) Phys. Zeitschr. **19**. 474. (1918).

[2]) Z. f. Physik. Chem. **5**, 322 (1890).

BAKHUIS ROOZEBOOM [1]), die een jaar later zijn belangrijke experimenteele onderzoekingen over *mengkristallen* aanving, behandelde feitelijk de mengkristallen reeds thermodynamisch op dezelfde wijze als de vloeibare oplossingen waren behandeld, en men zou kunnen zeggen, dat het experiment deze handelwijze heeft gerechtvaardigd, daar de afgeleide typen inderdaad werden gevonden, en aldus een verregaande overeenstemming bleek te bestaan tusschen de evenwichten van een vaste met een vloeibare phase eenerzijds, en twee vaste phasen anderzijds.

Reeds een paar jaar na deze publicaties begon FOCK [2]) een onderzoek omtrent de verdeeling van een derde stof tusschen mengkristallen en oplossingen, doch in geen enkel geval werd voor de verdeelingskoëfficient een konstante waarde gevonden. Was derhalve op dit onderzoek geen kritiek uit te oefenen geweest, dan had men daaruit de conclusie kunnen trekken, dat de verdeelingswet hier niet van toepassing is.

De resultaten van het onderzoek van FOCK waren echter niet in staat te overtuigen, 1o. daar hij naliet de evenwichten te onderzoeken, waarin de stof, waarop hij de verdeelingswet wilde toepassen in kleine concentraties aanwezig was, 2o. daar hij de moeilijkheden ter verkrijging van een homogene mengkristalphase onderschatte.

BELLATI en LUSANNA [3]) en evenzoo ROTHMUND trachtten uit de verlaging van het overgangspunt van KNO_3 de molecuulgrootte van de opgeloste stof te weten te komen door toepassing van de bekende formule van VAN 'T HOFF voor de vriespuntsverlaging, waarin dan voor Q de overgangswarmte werd gesubstitueerd.

ROTHMUND [4]) zag echter spoedig in, dat deze formule niet geldt, indien zich mengkristallen afzetten, en kwam voor dit geval tot de formule

$$\Delta T = \frac{RT^2}{M_1 Q}(x_2 - x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waarin

M_1 = mol gew. van een oplosmiddel.
x_1 = samenstelling van de eerste phase.
x_2 = „ „ „ tweede „

Deze formule is juist en volgt onmiddellijk uit de algemeene vergelijking voor tweephasen-koëxistentie van VAN DER WAALS SR.

---

[1]) Z. f. Physik. Chem. **8**, 504 (1891).
[2]) Z. f. phys. Chem. **12**, 657 (1893)
Z. f. Kryst. **28**, 336 (1897).
[3]) Atti de Reale Instituto Veneto [7] **26**, 995 (1891).
[4]) Z. f. phys. Chem. **24**, 705 (1897).

$$v_2 - v_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{dv}{dx_1}\right)_{P.T.}\Bigg\} dp = \Bigg\{\eta_2 \cdot \eta_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{d\eta}{dx_1}\right)_{P.T.}\Bigg\} dT +$$

$$+ (x_2 - x_1)\left(\frac{d^2\zeta}{dx_1^2}\right)_{P.T.} dx_1 .$$

Bevatten n.l. de beschouwde mengkristallen zeer weinig van de tweede komponent d.w.z., zijn x_1 en x_2 klein, dan laat zich bovenstaande verg. vereenvoudigen, want tengevolge van de kleinheid van x_1 mogen wij dan schrijven ;

$$\left(\frac{d^2\zeta}{dx_1^2}\right)_{P.T.} = \frac{RT}{x_1\,(1 - x_1)}$$

en verwaarloozen wij nu x_1 t. o. v. 1, dan wordt de koëfficient van dx_1

$$RT\,\frac{x_2 - x_1}{x_1}.$$

Beschouwen wij nu het evenwicht tusschen een mengkristalphase en een vloeistof, of tusschen twee mengkristalphasen bij konstanten druk, dan krijgen wij

$$(\eta_2 - \eta_1)\,dT = -\,RT\,\frac{x_2 - x_1}{x_1}\,dx_1$$

en daar $T(\eta_2 - \eta_1) = -\,M_1\,Q$, ontstaat

$$dT = \frac{RT}{M_1 Q}\cdot\frac{x_2 - x_1}{x_1}\;dx_1$$

of

$$\Delta T = \frac{RT^2}{M_1 Q}\,(x_2 - x_1).$$

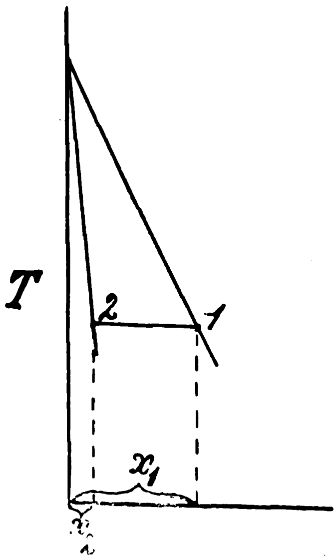
Dit is de formule door ROTHMUND, langs anderen weg afgeleid. Voor de moleculaire verlaging, dus voor de verlaging, veroorzaakt door 1 gr. mol van de tweede komponent op 1000 gr. van de eerste krijgt men dan de verg.

$$\frac{dT}{dx_1} = \frac{RT^2}{1000\,Q}\,\frac{x_2 - x_1}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hieruit zien wij, dat wanneer de tweede phase geen mengkristal is en dus $x_2 = O$ deze formule overgaat in die van VAN 'T HOFF.

Beschouwen wij de vriespuntverlaging, te weeg gebracht door toevoeging van een tweede stof, die mengkristallen vormt met de eerste, dan is dus alleen de tweede phase een mengkristal en de eerste een vloeistof. Houden wij ons echter bezig met een verlaging van een overgangspunt, dan is de eerste phase een mengkristal en de tweede zal dit in het algemeen ook zijn, evenals bij de stolling (Zie de hier volgende Figuur).

Uit bovenstaande betrekkingen volgt, dat wanneer wij verdunde mengkristalphasen thermodynamisch mogen behandelen als verdunde vloeibare oplossingen, uit de verlaging van het stolpunt en uit die van het overgangspunt, bij analyse van de koexisteerende phasen, en bij meting van de warmtegrootheid Q, de molecuulgrootte van de in de tweede phase in geringe koncentratie aanwezige tweede stof t. o. v. de molecuulgrootte van dezelfde stof in de eerste phase kan worden gevonden.



Rothmund die het systeem $CBr_4 - C\,Cl_4$ onderzocht, heeft x_2 en x_1 niet kunnen bepalen. Hij kon het stollingstraject niet waarnemen en vond alleen de stolpuntsverlaging evenredig met de totaal-samenstelling. Ook was hem de waarde van Q onbekend, zoodat hij de formule (1) niet kon toetsen.

Reinders [1]) heeft bij gelegenheid van zijn onderzoek van het stelsel $HgJ_2 - HgBr_2$, de formule van Rothmund voor het eerst toegepast en wel op de verlaging van het overgangspunt.

Daar het onderzoek van Reinders niet bepaald ten doel had de formule van Rothmund te toetsen en daarvoor ook niet nauwkeurig genoeg was, laat zich uit dit deel van zijn interessante verhandeling slechts concludeeren, dat de formule van Rothmund hier *vermoedelijk* zal worden bevestigd en aannemende, dat hier werkelijk tot een molecuulgrootte zou mogen worden besloten, tot het resultaat zal voeren, dat de molecuulgrootte van het kwikbromide in de twee mengkristalphasen dezelfde is.

Uit het voorgaande volgt, dat zich hier een groote leemte voordeed en wij nog in het geheel niet instaat waren te zeggen, tot welke resultaten de toepassing van de, laat ons zeggen *grenswetten*, op de evenwichten met mengkristallen voeren.

En omdat juist de studie van de verdunde mengkristallen ons, naar mijn meening, een dieper inzicht in den vasten toestand zal kunnen geven, besloot ik met de grootst mogelijke zorg te doen nagaan of de verdeelingswet ook bij koëxistentie met mengkristalphasen doorgaat.

Het was van te voren te zeggen, dat het onderzoek zeer moeilijk en

[1]) Zeitschr. f. physik Chem. 32, 494 (1900).

tijdroovend zou zijn, want alleen dan kunnen betrouwbare resultaten worden verwacht, wanneer het mengkristal volkomen homogeen is, zoodat de inwendige samenstelling met die van het oppervlak overeenkomt. Om dit te bereiken was het noodig de mengkristallen zich onder sterk roeren uiterst langzaam te laten vormen.

Mijn 1ste assistent, de Heer G. MEIJER, aan wien ik dit onderzoek als dissertatie-onderwerp gaf, is nu zoo gelukkig geweest bij het stelsel dichloorbenzol-dibroombenzol-alcohol resultaten te verkrijgen, die voor het eerst een ondubbelzinnig antwoord geven op de hier gestelde vraag. Aan den kant van dichloorbenzol bleek de verdeelingswet binnen de waarnemingsfouten op te gaan voor de verdeeling van dibroombenzol tusschen oplossing en mengkristal, en het zelfde werd

TABEL I.
UITKOMSTEN AAN DEN DIBROOMKANT.

Gr. dichloorbenzol per 1000 cm^3 mengkristal	Gr. dichloorbenzol per 1000 cm^3 opl.	Totaal conc. in gr. per 1000 cm^3 oplossing	$K \times 10$ $K = \frac{C_L}{C_S}$	$K \times 10^4$ $K = \frac{C_L^2}{C_S}$	$K \times 10^{-1}$ $K = \frac{C_L}{C_S^2}$
38.7	4.76	52.7	1.23	5.90	3.17
48.7	6.31	53.7	1.30	8.18	2.66
54.8	6.71	54.2	1.23	8.21	2.23
55.0	6.64	54.1	1.21	8.02	2.19
57.6	8.12	55.8	1.41	11.44	2.45
61.7	8.32	55.8	1.35	11.22	2.19
75.3	9.47	56.7	1.26	11.91	1.69
83.6	10.11	58.1	1.21	12.23	1.45
100.2	13.69	59.2	1.37	18.70	1.36
118.3	13.97	59.5	1.18	16.49	0.99
123.7	16.83	64.0	1.36	22.81	1.09
190.5	24.97	71.0	1.31	32.73	0.69
286.3	33.96	79.7	1.19	40.29	0.41
—	—	—	—	—	—
564.8	42.95	87.5	0.76	34.43	0.14

gevonden voor de verdeeling van dichloorbenzol aan den dibroomkant. Bij grootere koncentraties werden, van beide kanten komende, zooals trouwens te verwachten was, steeds grootere afwijkingen ge-

vonden. Dit resultaat werd verkregen onder aanname, dat de moleculgrootte van dichloor-resp. dibroombenzol in de mengkristalphase evengroot is als die in de koexisteerende oplossing.

De voorgaande Tabel I geeft een beknopt overzicht.

Uit deze tabel volgt, dat alleen het quotient $\frac{C_L}{C_S}$ een zeer weinig schommelende waarde oplevert, en aangezien de tweede decimaal, hier wel gegeven, doch tengevolge van de analyse-fout geheel onzeker is, zien wij, dat niettegenstaande de experimenteele moeilijkheden van het onderzoek de schommelingen in de waarden, voor bovengenoemd quotient, boven verwachting gering genoemd moeten worden, zoodat de verkregen uitkomsten er met zekerheid op wijzen, dat dit quotient in het hier onderzochte concentratie gebied, dat in de verzadigde oplossing loopt tot 0.231 gr mol per liter en in de mengkristalphase tot 1.947 gr. mol per liter inderdaad een konstante grootheid is. Bij grootere concentraties vertoont het quotient $\frac{C_L}{C_S}$ een verloop, zooals ook te verwachten was; het quotient wordt dan kleiner, zooals de laatste waarde aangeeft.

Nu dit resultaat verkregen was werd natuurlijk vermoed, dat ook aan den dichloorkant een aansluiting aan de verdeelingswet gevonden zou worden. Het onderzoek van den Heer Meijer leverde in overeenstemming met deze verwachting de resultaten op die in Tabel II vereenigd zijn.

Ook hier levert alleen het quotient $\frac{C_L}{C_S}$ over een bepaald concentratietraject n.l. tot een dibroomconc. in de oplossing van 0,04 gr. mol en in het mengkristal van 0,72 gr. mol waarden, die slechts binnen de analyse-fouten schommelen, zoodat wij kunnen concludeeren, dat dit quotient, dat natuurlijk een andere waarde heeft dan het overeenkomstige aan den dibroomkant, in werkelijkheid een constante grootheid is. Ook dit quotient vertoont weer een verloop bij grootere dibroom-concentraties.

De hier medegedeelde resultaten zijn van groot belang. Zij geven ons het recht te concludeeren, dat ook voor het verdunde bestanddeel in een verdund mengkristal het *paradox van Gibbs* geldig blijkt te zijn, en dat wij dus voor het evenwicht tusschen een mengkristalphase en een verzadigde oplossing mogen schrijven

$$RT \ln x_L + F(v \,.\, T)_L = v\, RT \ln x_S + Q(v \,.\, T)_S \,.$$

In een volgende mededeeling zal worden nagegaan, welke conclusies uit de grootte van den factor v getrokken mogen worden met be-

TABEL II.
UITKOMSTEN AAN DEN DICHLOORKANT.

Gr. dibroomb. per 1000 cm³ mengkristal	Gr. dibroomb per 1000 cm³ oplossing	Totaal conc. in gr. per 1000 cm³ oplossing	K 10² $K = \frac{C_L}{C_S}$	K $K = \frac{C_L^2}{C_S}$	K.10 $K = \frac{C_L}{C_S^2}$
29.58	1.713	142.7	5.85	9.92	19.6
78.42	4.437	143.1	5.66	2.52	7.2
79.18	4.496	142.7	5.68	2.56	7.2
103.7	5.785	141.1	5.58	3.23	5.4
99.04	5.460	128.5	5.51	4.77	5.6
155.0	8.521	139.7	5.50	4.68	3.5
167.6	9.912	136.7	5.91	5.86	3.5
170.8	9.599	137.1	5.62	5.40	3.3
—	—	—	—	—	—
173.8	9.305	136.8	5.35	4.98	3.1
217.3	11.39	135.6	5.24	5.83	2.4
265.5	14.24	135.6	5.36	7.64	2.0
329.2	17.17	133.6	5.22	8.96	1.6
385.0	20.01	132.5	5.20	10.40	1.4
460.2	23.67	131.5	5.15	12.17	1.1
491.7	23.71	127.4	4.82	11.43	0.98
506.4	23.51	128.5	4.64	10.92	0.92
507.3	24.28	125.4	4.79	11.62	0.94
528.3	25.57	128.5	4.84	12.37	0.92
643.7	28.22	125.4	4.38	12.37	0.68
651.1	28.90	125.4	4.44	12.83	0.68
676.9	26.09	125.4	3.89	10.06	0.57
686.7	29.52	125.1	4.30	12.69	0.63

trekking tot de molecuulgrootte van het verdunde bestanddeel in de mengkristalphase.

Intusschen zet de Heer MEYER het onderzoek voort met andere stoffen, waaronder ook electrolyten.

Laboratorium van algemeene en organische chemie der Universiteit.

Amsterdam, 28 Mei 1920.

Scheikunde. — De Heer ZEEMAN biedt, namens de Heeren A. SMITS en J. SPUYMAN, een mededeeling aan: *„De thermo-electrische bepaling van overgangspunten"*. I.

(Mede aangeboden door den Heer HOOGEWERFF).

In 1912 werd door middel van zéér tijdroovende dilatometrische bepalingen het overgangspunt van tetrogonaal in rhombisch tin bepaald. Kleine hoeveelheden kwik versnelden deze transformatie, doch brachten tevens een verlaging van het overgangspunt te weeg. Door extrapolatie op de kwikhoeveelheid $=0$ werd als overgangstemperatuur **200°.5** gevonden, terwijl de daarop volgende proeven met zuiver tin, die veel bezwaren opleverden, tenslotte ± **202°.8** gaven [1]. Ofschoon gebleken is, dat ook in andere gevallen kwik een katalysator is voor den overgang van de eene metaalmodificatie in de andere, zoodat dit middel dikwijls met succes zal kunnen worden toegepast, leek het zéér gewenscht te zoeken naar een andere betrouwbare en snellere methode.

Dat thermo-elementen alleen bruikbaar zijn over een temperatuurtraject, waar binnen geen overgangspunten der gebruikte metalen voorkomen, is bekend en evenzoo is vroeger uit een discontinuïteit van de verandering van de electromotorische kracht met de temperatuur reeds tot het bestaan van een overgangspunt besloten.

Zoo werd o.a. bij het onderzoek van de thermo-elementen Nikkel-Koper [2]) en Nikkel-Lood [3]) een discontinuïteit gevonden tusschen 350° en 360°, welke op een overgangspunt van Nikkel wijst, waarmede de studie van de magnetische en mechanische eigenschappen en ook het onderzoek van de lengteverandering, door JÄNECKE [4]) verricht, in overeenstemming zijn. BRIDGMAN [5]) onderzocht verder de thermo-electrische kracht van thermo-elementen onder druk en zoo kunnen wij dus zeggen, dat het thermo-element reeds meerdere malen is gebruikt om een overgangspunt op te sporen.

Dat men echter bij rationeele toepassing in de thermo-electrische methode, zoowel om hare nauwkeurigheid als snelheid een methode bij uitnemendheid heeft om overgangspunten bij metalen op te sporen, dit was nog niet bekend.

---

1) SMITS en DE LEEUW, Kon. Akad. v. Wet. 26 Oct. 1912. 661.
2) HARRISON, Phil. mag. **3,** 192, 1902; WIENER Z. f. anorg. Chem. **83,** 310 (1913).
3) Proc. Roy. Soc. Edinburg, **8,** 182 (1872—1873).
4) Z. f. Electr. Chem. 9 (1919).
5) Proc. Amer. Acad. **53,** 269 (1918).

Dit bleek ons bij het volgende onderzoek dat ten doel had, het bovengenoemde overgangspunt van tin ook langs termo-electrischen weg op te sporen. Daartoe werd eerst nagegaan welk metaal met tin gecombineerd een goed resultaat beloofde. Om redenen, die later bij de theoretische behandeling van deze methode zullen worden uiteengezet, werd als tweede metaal *ijzer* gekozen.

Het onderzoek omtrent de electro-motorische kracht van dit element bij verschillende temperaturen gaf het volgende resultaat.

IJZER-TIN.

Temperatuur	E. K. in milli-Volts
139.8°	1.30
146.8°	1.31
172.4°	1.39
183.5°	1.46
196.6°	1.63
199.2°	1.69
204.0°	1.72
208.4°	1.74
212.6°	1.79
Na plotseling afkoelen	
180.0°	1.65
180.0°	1.59
180.0°	1.53
180.0°	1.46
180.0°	1.43
170.4°	1.38

Geven we dit in een grafische voorstelling weer, dan krijgen we fig. 1, waaruit wij zien, dat het overgangspunt zeer duidelijk voor den dag komt en wel gelegen bij **200°.2**, welke uitkomst dus zeer goed met de geëxtropoleerde waarde, die uit het dilatormeter-onderzoek van kwikhoudend tin volgde, overeenstemt. Wat hier ook mooi tot uiting kwam was dit, dat, wanneer van een temperatuur boven het smeltpunt van tin gelegen snel werd afgekoeld, de transformatie achterwege bleef en de metastabiele verlenging van den bovensten tak

een eind kon worden gevolgd. Werd dan de temperatuur konstant

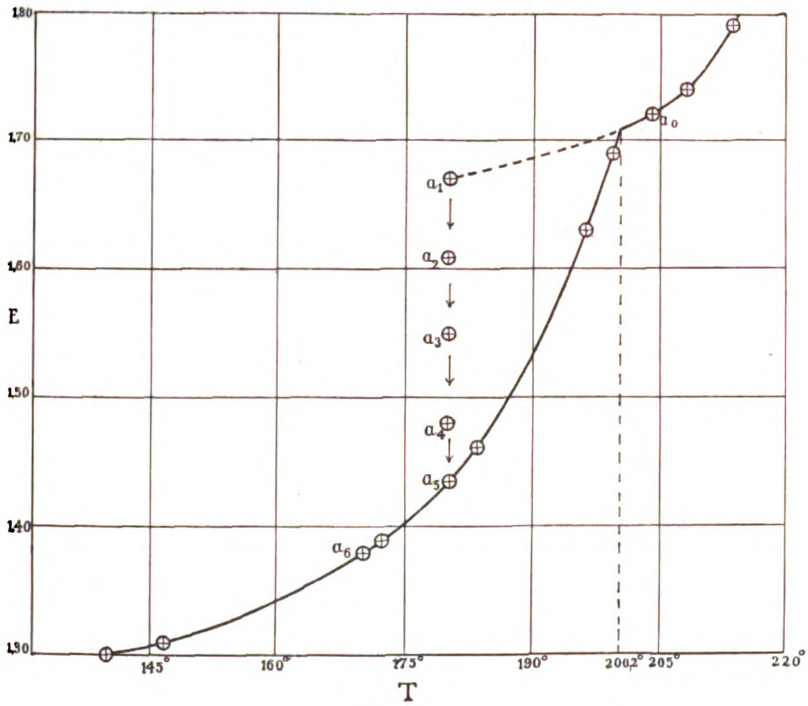


Fig. 1.

gehouden, dan nam de E.K. af, totdat de stabiele tak was bereikt (zie de punten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6).

In de tweede plaats werd tin gecombineerd met koper, waarbij het volgende gevonden werd.

KOPER-TIN.

Temperatuur	E. K. in milli-Volts
158.0°	0.52
183.0°	0.63
198.0°	0.71
218.8°	0.79
210.0°	0.75
207.0°	0.74
191.0°	0 67
181.0°	0.62
153.0°	0.50
150.2°	0.49
202.0°	0.73

Stellen wij deze uitkomsten weer grafisch voor, dan komt, zooals fig. 2 doet zien, in overeenstemming met het voorgaande doch minder

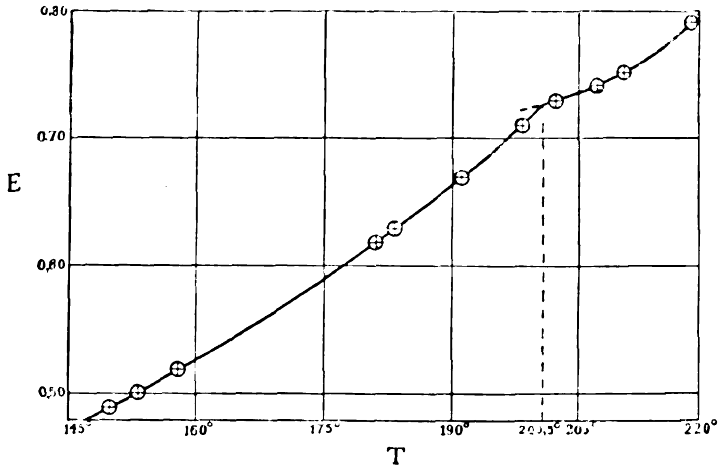


Fig. 2.

duidelijk het overgangspunt van tin bij **200°.5** voor den dag.

Toen op deze wijze de betrouwbaarheid van deze gevoelige en vlugge methode was bewezen, hebben wij haar toegepast om na te gaan of bij koper, in de omgeving van 70°, aanduidingen voor een overgangspunt konden worden waargenomen. Zooals bekend, wees het dilatrometrisch onderzoek [1]) op een overgangspunt, doch het onderzoek omtrent het electrisch geleidingsvermogen [2]) gaf geen enkele aanwijzing, evenmin als de onderzoekingen van BRIDGMAN.

Bij toepassing van de thermo-electrische methode werd een draad van zeer zuiver koper gecombineerd met denzelfden ijzerdraad, dien wij bij tin gebruikten en terwijl nu de laschplaats ijzer-koper in een thermostaat een paar uur op verschillende konstante temperaturen konstant werd verhit, werden de twee andere laschplaatsen, ijzer-koper$_{I}$ en koper$_{I}$-koper$_{II}$ op —80° konstant gehouden [3]).

Het resultaat van dit onderzoek, waarbij het zuivere koper ook met een electrolyt in contact werd gebracht, zal in een volgende mededeeling besproken worden.

Laboratorium voor algemeene en anorganische chemie der Amsterdamsche Universiteit.

Amsterdam, 23 Mei 1920.

[1]) COHEN, Verslagen Kon. Akad. v. Wet. 22, 627 (1914). Z. f. phys. Chem. **87**, 419 (1914).

[2]) BURGESS, Journ. of the Washington Acad. of Sciences 5, 657 (1915).

[3]) Koper I is zeer zuiver koper en Koper II is technisch rood koper.

Wiskunde. — De Heer Arnaud Denjoy biedt eene mededeeling aan: „*Sur une classe de fonctions admettant une dérivée seconde généralisée*”.

Considérons une série trigonométrique partout convergente

$$f(\theta) = a_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

où $A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$; a_0, a_n, b_n étant indépendants de θ. Soit $B_n = - b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta$. Intégrons terme à terme la série (1), et posons:

$$\varphi(\theta) = a_0 \theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en tout point θ où la série du second membre converge. Aux points où cette série diverge, nous dirons que $\varphi(\theta)$ n'existe pas. C est quelconque, indépendant de θ. Intégrant une fois de plus, nous trouvons:

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2}\theta^2 + C\theta + C' - A_1 - \ldots - \frac{A_n}{n^2} \ldots \quad . \quad . \quad (3)$$

C' étant, comme C, indépendant de θ.

Riemann a montré que la fonction continue $F(\theta)$ admet $f(\theta)$ pour dérivée seconde généralisée, c'est-à-dire que, si

$$R(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) + F(\theta - u) - 2F(\theta)}{u^2},$$

on a $f(\theta) = \lim_{u=0} R(\theta, u)$, quel que soit θ indépendant de u.

Nous nous proposons dans cette note d'étudier les propriétés différentielles du premier ordre de la fonction $F(\theta)$. Il est bien connu que, si $F(\theta)$ possède au point θ_0 une dérivée $F'(\theta_0)$, la série (2) converge au même point et l'on a $\varphi(\theta_0) = F'(\theta_0)$. La réciproque est exacte. Donc, $\varphi(\theta)$ et la dérivée de F existent ou non simultanément, et coïncident chaque fois qu'elles existent.

Posons

$$Q(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u}$$

On montre que:

$$Q[\theta, u] - \left(a_0 \theta + C + B_1 \ldots + \frac{B_n}{n}\right)$$

tend vers 0 avec u, si $n|u|$ reste compris entre deux nombres

positifs indépendants de u. Les propriétés différentielles du premier ordre de $F(\theta)$ et le mode de convergence ou de divergence de la série (2) sont ainsi étroitement liés.

n étant choisi comme il vient d'être dit, la différence

$$Q[\theta + \mu u, \lambda u] - \left(a_0 \theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n}\right)$$

tend aussi vers 0 avec u, *uniformément* dans le champ: θ quelconque, $\mu, \lambda, \frac{1}{\lambda}$ bornés. Enfin, si $p_0 + p_1 + \ldots + p_r = 0$, l'expression

$$p_0 Q[\theta, u] + p_1 Q[\theta + \mu_1 u, \lambda_1 u] + \ldots + p_r Q[\theta + \mu_r u, \lambda_r u]$$

tend *uniformément* vers 0 avec u dans le champ: θ quelconque,

$$\sum_0^r |\mu_i + 2\lambda_i| |p_i| , \quad \sum_0^r \mu_i^2 |p_i| , \quad \sum_0^r \lambda_i^2 |p_i| , \quad \sum_0^r \left|\frac{p_i}{\lambda_i}\right|$$

tous bornés ($\mu_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$).

La démonstration se fait en remarquant que, si $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \varrho_n$, ϱ_n tend vers 0, d'après la convergence de la série (1). Donc, si

$$\sum_1^n \varrho(m) = n\,\omega(n) , \quad \sum_1^n m\,\varrho(m) = n^2 \omega'(n) , \quad \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varrho(m)}{m^2} = \frac{\omega''(n)}{n},$$

les coefficients $\omega(n)$, $\omega'(n)$, $\omega''(n)$ tendent vers 0 quand n croît.

On a:

$$A_m(\theta + u) = A_m(\theta) \cos mu + B_m(\theta) \sin mu.$$

D'où

$$A_m[\theta + (\lambda + \mu) u] - A_m[\theta + \mu u] = A_m(\theta) [\cos m\,\overline{\mu + \lambda}\, u - \cos m \mu u] +$$
$$+ B_m(\theta) [\sin m (\mu + \lambda) u - \sin m \mu u].$$

Si $m \leqq n$, nous transformons les coefficients de $A_m(\theta)$ et $B_m(\theta)$ par les formules:

$$\cos \beta - \cos \alpha = \delta \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{2} (\delta^2 < 1)$$

$$\sin \beta - \sin \alpha = (\beta - \alpha) \left[1 - \theta \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{6}\right] \quad (0 < \theta < 1).$$

Si $m > n$, nous remplaçons les mêmes coefficients par 2δ, $2\delta'$ avec δ^2, $\delta'^2 < 1$.

Les résultats énoncés paraissent alors en évidence. Sous leur forme la plus simple ($p_0 = -p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_2 = \ldots = 0$), la propriété que $Q[\theta, u] - Q[\theta, \lambda u]$ tend *uniformément* vers 0 avec u, dans le champ: θ quelconque, λ et $\frac{1}{\lambda}$ bornés, donne lieu à la remarque suivante.

Soit d un *nombre dérivé* (extrême ou médian) [1]) de F au point θ. Il existe alors une suite de nombres de même signe $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ tendant vers 0 et tels que: $\lim_{n\,\infty} Q[\theta, h_n] = d$. Soit α un nombre supérieur à 1, aussi grand que nous le voudrons, indépendant de n. Considérons l'ensemble E formé des intervalles i_n et i'_n ainsi définis: i_n est l'intervalle $\theta + \frac{|h_n|}{\alpha}$ à $\theta + \alpha\,|h_n|$; i'_n est l'intervalle $\theta - \alpha\,|h_n|$ à $\theta - \frac{|h_n|}{\alpha}$. θ est évidemment un point limite de E. Or, quelle que soit la façon dont un point $t = \theta + h$ tende vers θ sans quitter E, $Q[\theta, h]$ tend vers d.

Nous disons alors que $F(\theta)$ admet au point θ une *dérivée spéciale* à E, égale à d.

La propriété étant exacte quel que soit α invariable, il est possible de choisir α croissant indéfiniment avec n, assez lentement pour que la propriété subsiste sur l'ensemble E_d ainsi obtenu. Donc,

Si d est un nombre dérivé extrême ou médian de $F(\theta)$, d est la dérivée de $F(\theta)$ spéciale à un ensemble E_d dont l'épaisseur supérieure au point θ est 1 bilatéralement [2]).

Supposons que le *rapport* $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ *soit borné indépendamment de* n (mais non de θ). Alors, si $1 < \left|\frac{h_{n+1}}{h_n}\right| < l$, choisissons $\alpha > \sqrt{l}$, et

---

[1]) On appelle *nombre dérivé* de F l'une quelconque des valeurs limites d de $\frac{F(\theta+u) - F(\theta)}{u} = Q(\theta, u)$ quand u tend vers 0 avec un signe invariable, θ demeurant fixe. d est un nombre dérivé *droit* si $u > 0$, *gauche* si $u < 0$. d est un *dérivé extrême*, soit *supérieur*, soit *inférieur*, si d est l'une des limites extrêmes, soit la plus grande, soit la plus petite, de $Q(\theta, u)$ quand u tend vers 0, avec un signe déterminé.

Tout nombre compris entre les dérivés extrêmes de F pour un côté donné, est appelé nombre *dérivé médian* pour le même côté.

[2]) Soit $m(x)$ la mesure de la partie d'un ensemble donné E comprise entre un point fixe a et un point quelconque x. $m(x)$ a le signe de $x - a$, à moins d'être nul. On appelle *épaisseur supérieure droite, épaisseur inférieure droite, epaisseur supérieure gauche, épaisseur inférieure gauche* de E en un point x_0, les nombres dérivés de même qualification respective de la fonction $m(x)$ en x_0. Ces nombres dérivés appartiennent au segment (0,1), (c'est à dire à l'ensemble des nombres μ tels que $0 \leq \mu \leq 1$). On dit que E possède en x_0 une épaisseur (sous-entendu bilatérale) ou une épaisseur droite, ou une épaisseur gauche égales à λ en x_0, si $m(x)$ admet en x_0 le nombre λ respectivement pour dérivée (ordinaire, bilatérale) ou pour derivée droite ou pour dérivée gauche. On sait que les points de E où E n'a pas l'épaisseur 1 forment un ensemble de mesure nulle (LEBESGUE).

construisons comme il a été dit plus haut les intervalles i_n, i'_n. Quelque soit n, i_n et i_{n+1} ont une partie commune, et il en est de même de i'_n et de i'_{n+1}. L'ensemble E formé des i_n et des i'_n contient tout l'intervalle $\theta - a\,|h_1|$ à $\theta + a\,|h_1|$, sauf le point θ. Donc *$F(\theta)$ admet d pour dérivée* (ordinaire, ou générale) *au point θ.*

En nous plaçant à un autre point de vue, il nous sera possible d'étendre et de préciser les propriétés connues de l'ensemble E où existe $\varphi(\theta)$.

Considérons la courbe Γ représentant géométriquement $F(\theta)$. θ est porté en abscisse, $F(\theta)$ en ordonnée. Soit M le point (θ, F). Pour une valeur déterminée de θ, la fonction $R(\theta, u)$ est continue en u, quel que soit u, pourvu que l'on pose $R(\theta, 0) = f(\theta)$. Soit $\psi(\theta)$ le maximum de $|R(\theta, u)|$ pour toutes les valeurs de u. D'après

$$R(\theta, u) = \frac{Q[\theta, u] - Q[\theta, -u]}{u},$$

nous avons, quel que soit u:

$$|Q(\theta, u) - Q(\theta, -u)| < \psi(\theta)\,|u|.$$

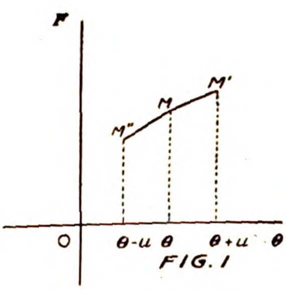


FIG. 1

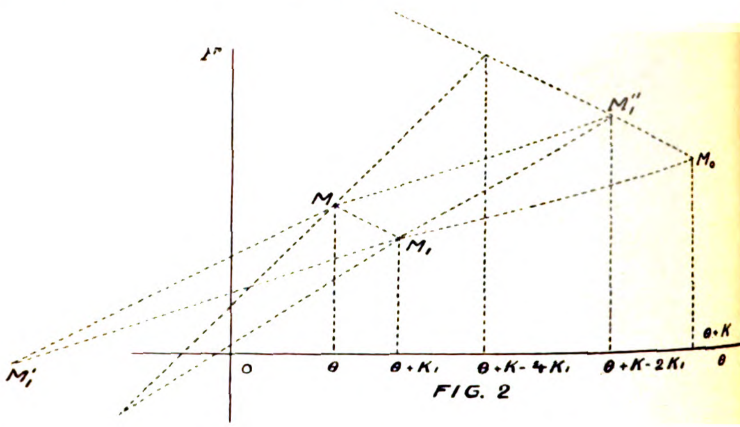


FIG. 2

Donc les points M' et M'' d'abscisses respectives $\theta + u$ et $\theta - u$ sont sensiblement alignés avec le point M. Les deux droites MM', MM' ont des pentes d'autant plus voisines l'une de l'autre que $|u|$ est plus petit (Fig. 1).

Donc de la position de M' d'abscisse $\theta + u$, nous déduirons avec une certaine approximation connue, la position de M' d'abscisse $\theta - u$. Sur l'axe des θ, nous pouvons considérer $\theta - u$ comme l'image de $\theta + u$ par rapport au point θ, regardé comme réfléchissant. M'' est sensiblement le symétrique de M' par rapport à M.

Considérons maintenant deux points M et M_1 de la courbe Γ, ayant pour abscisses $\theta, \theta + k_1$. Soit A un nombre supérieur à

$\psi(\theta)$ et à $\psi(\theta + k_1)$. Désignons par M_0 un autre point de la courbe, et soit $\theta + k$ son abscisse.

Formons sur l'axe des θ, les images du point $\theta + k$, par une succession de réflexions alternées sur les points-miroirs $(\theta, \theta + k_1)$. Nous obtenons, selon que la première réflexion a lieu sur θ ou sur $\theta + k_1$, deux suites de points-images:

$$\theta - k, \qquad \theta + k + 2\,k_1, \quad \theta - k - 2\,k_1, \quad \theta + k + 4\,k_1, \ldots$$

et

$$\theta - k + 2\,k_1, \quad \theta + k - 2\,k_1, \quad \theta - k + 4\,k_1, \quad \theta + k - 4\,k_1, \ldots$$

Les points représentatifs de F pour ces deux suites d'abscisses, seront, avec une certaine approximation que notre objet est d'étudier, 1° dans le premier cas, le symétrique M' de M_0 par rapport à M, puis le symétrique M'' de M' par rapport à M_1, puis le symétrique de M'' par rapport à M_1, et ainsi de suite, 2° dans le second cas, le symétrique M'_1 de M_0 par rapport à M_1, puis le symétrique M''_1 de M'_1 par rapport à M, etc.

Dans ce qui suit, nous ne restreindrons pas la portée de nos conclusions en considérant uniquement les points-images déduits de $\theta + k$ par un nombre pair de réflexions sur le couple $(\theta, \theta + k_1)$. Ces points-images ont pour abscisses des nombres en progression arithmétique de raison $2k_1$, formant la suite $\theta + k + 2m\,k_1$, m étant un entier de signe quelconque. Un tel point-image est obtenu par $|m|$ réflexions doubles de $\theta + k$ sur le couple $(\theta, \theta + k_1)$, la première réflexion se faisant sur θ ou sur $\theta + k_1$, selon que m est positif ou négatif. Exprimons les ordonnées des points de la courbe Γ correspondant aux points-images: $\theta + k + 2mk_1$.

Nous avons par hypothèse, quel que soit u:

$$F(\theta + u) + F(\theta - u) = 2\,F(\theta) + \delta A u^2 \qquad \delta^2 < 1$$

$$F[\theta - u] + F(\theta + 2\,k_1 + u) = 2\,F(\theta + k_1) + \delta' A\,(u + k_1)^2 \qquad \delta'^2 < 1$$

D'où:

$$F[\theta + u] - F[\theta + 2k_1 + u] = -\,2\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A\,[u^2 + (u + k_1)^2]$$

Supposons d'abord m positif. Donnons à u successivement les valeurs $k, k + 2k_1, \ldots, k + 2\,(m - 1)\,k_1$. Il vient:

$$F[\theta + k] - F(\theta + 2mk_1 + k) = -\,2m\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A \omega,$$

avec

$$\omega = k^2 + (k + k_1)^2 + \ldots [k + (2m - 1)\,k_1]^2.$$

Supposons m négatif et égal à $-m'$. Dans la relation précédente, nous remplaçons m par m' et k par $k - 2m'k_1$. Il vient:

$$F(\theta + k) - F(\theta + 2mk_1 + k) = -\,2m\,[F(\theta + k_1) - F(\theta)] + \delta A \omega_1.$$

avec

$$\omega_1 = (k - k_1)^2 + \ldots + (k + 2mk_1)^2.$$

Les deux formules coïncident indépendamment de m, sauf par les coefficients ω et ω_1. Si $m=0$, on a $\omega=\omega_1=0$.

Nous écrivons ainsi la relation générale :

$$\frac{F(\theta+k)-F(\theta)}{k}=\frac{F(\theta+2m\,k_1+k)-F(\theta)}{2m\,k_1+k}\cdot\frac{2m\,k_1+k}{k}+$$
$$+\frac{F(\theta+k_1)-F(\theta)}{k_1}\times\frac{-2mk_1}{k}+\delta A\,\frac{\omega'}{k}$$

ω' étant ω ou ω_1 selon que m est positif ou négatif. Posons

$$k+2m\,k_1=k'$$
$$\frac{k'}{k}=\mu,\qquad \frac{-2m\,k_1}{k}=\nu.$$

Il vient :

$$Q[\theta,k]=Q[\theta,k']\,\mu+Q[\theta,k_1]\,\nu+\delta A\,\frac{\omega'}{k}.$$

Soit $\left|\frac{k}{k_1}\right|=r$ supposé au moins égal à 1, et ε défini par

$$\varepsilon^2=1,\quad \varepsilon\,\frac{k}{k_1}>0.$$

Nous choisirons l'image k' d'abord de manière que μ soit positif et ν non négatif. D'après $\mu+\nu=1$, cette condition sera

$$0\leq\frac{-2m\,k_1}{k}<1.$$

Donc m a le signe de $-\varepsilon$, si $m\neq 0$, et en outre $2|m|<r$. Donc,

si $\varepsilon=+1$, $-r<2m<0$, $\omega'=\omega_1=k^2\left[\left(1-\frac{1}{r}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{2m}{r}\right)^2\right]<2|m|k^2$

si $\varepsilon=+1$, $r>2m>0$, $\omega'=\omega=k^2\left[1+\left(1-\frac{1}{r}\right)+\ldots+\left(1-\frac{2m-1}{r}\right)^2\right]<2mk^2$.

Donc, dans tous les cas,

$\delta A\,\frac{\omega'}{k}$ peut être remplacé par $2\delta mkA$.

La substitution est exacte même pour $m=0$.

La condition $\mu>0$, montre que k' et k sont de même signe. Parmi toutes les images $\theta+k+2mk_1$ de $\theta+k$, situées du même côté de θ que $\theta+k$, choisissons celle qui, sans être intérieure à l'intervalle $\theta-k_1$, $\theta+k_1$, est la plus voisine de θ.

Nous appellerons ce point $\theta+k'$ *l'image-réduite propre à θ* du point $\theta+k$ par rapport au couple $(\theta,\ \theta+k_1)$. La distance de deux images consécutives obtenue par une suite de réflexions doubles sur le couple $(\theta,\ \theta+k_1)$ étant $2k_1$, k' vérifie les conditions

$$| k_1 | \leq | k' | < 3 \, | k_1 |$$

qui, jointes aux formules $k' = k + 2mk_1$ et à la condition $\frac{k'}{k} > 0$, déterminent complètement k'. En effet, soit p l'entier non négatif déterminé par les conditions

$$2p + 1 \leq r < 2p + 3.$$

D'après $\frac{k}{k_1} = \varepsilon r$ avec $\varepsilon^2 = 1$, $m\varepsilon \leq 0$ et $r > 2\,|m|$, on a : $\varepsilon \frac{k'}{k_1} = r - 2|m|$.

D'où $1 \leq r - 2\,|m| < 3$ et enfin $|m| = p$, $m = -p\varepsilon$.

$\theta + k'$ étant l'image-réduite caractérisée comme il est dit, nous trouvons finalement, en utilisant $2\,|m| < r = \left|\frac{k}{k_1}\right|$ la formule:

$$Q(\theta, k) = Q(\theta, k')\,\mu + Q(\theta, k_1)\,\nu + \delta \frac{k^2}{k_1} A \, . \quad . \quad . \quad . \qquad (4)$$

$$\text{avec } \delta^2 < 1, \text{ si } 0 < \frac{k'}{k} < 1, \ \delta = 0 \text{ si } k' = k.$$

Il est essentiel de noter que $0 < \mu = \frac{k'}{k}$, $0 \leq \nu$, $\mu + \nu = 1$. Ces propriétés et la formule (4) seraient conservées si k' était remplacé par l'un quelconque des termes de la série $k + 2\,qk_1$ compris entre k et k'. Mais il est essentiel pour la suite, que le rapport $\left|\frac{k'}{k_1}\right|$ soit compris entre deux nombres positifs fixes. Il nous sera commode d'avoir choisi pour jouer ce rôle les nombres 1 et 3.

Considérons maintenant une suite $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ de nombres de signes quelconques, décroissant en modules et tendant vers 0, tels enfin que $\psi\,[\theta + h_n] < A$, A étant indépendant de n, avec en outre $\psi\,(\theta) < A$.

Cette hypothèse sur les h_n ne serait d'ailleurs pas rigoureusement indispensable pour valider le raisonnement et la conclusion ci-après. En effet, désignons par $\psi\,[\theta, \eta]$ le maximum de $|R\,(\theta, u)|$ pour $|u| \leq \eta$, θ demeurant fixe. Le raisonnement subsiste alors moyennant la simple hypothèse

$$\psi\,[\theta + h_{n+1}, \quad 3\,|h_n|\,] < A.$$

Soit h un nombre dont la valeur absolue est au moins égale à h_1. Soit h' l'image-réduite, propre à θ, du point $\theta + h$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_1)$. On a :

$$Q\,[\theta, h] = Q\,[\theta, h']\,\lambda' + Q\,[\theta, h_1]\,\lambda_1 + \delta \frac{h^2}{h_1} A$$

avec

$$Q < \lambda' \quad , \quad 0 \leq \lambda_1 \quad , \quad \lambda' + \lambda_1 = 1 \quad , \quad \sigma^2 < 1.$$

Transformons de même $Q[\theta, h']$ et $Q[\theta, h_1]$ grâce à $\theta + h_2$.

Soient respectivement $\theta + h''$ et $\theta + h'_1$, les images-réduites propres à θ, des points $\theta + h'$, $\theta + h_1$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_2)$. On a :

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h'']\mu'' + Q[\theta, h_2]\nu'' + \sigma \frac{h'^2}{h_2} A$$

$$Q[\theta, h_1] = Q[\theta, h'_1]\mu'_1 + Q[\theta, h_2]\nu'_1 + \sigma \frac{h_1^2}{h_2} A$$

avec

$$0 < \mu'', \mu'_1 \quad ; \quad 0 \leq \nu'', \nu'_1 \quad ; \quad \mu'' + \nu'' = \mu'_1 + \nu'_1 = 1.$$

Donc

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h'']\lambda'' + Q[\theta, h'_1]\lambda'_1 + Q[\theta, h_2]\lambda_2 + \sigma A\left[\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{\lambda' h'^2 + \lambda_1 h_1^2}{|h_2|}\right]$$

avec

$$\lambda'' = \lambda'\mu'' \quad , \quad \lambda'_1 = \lambda_1 \mu'_1 \quad , \quad \lambda_2 = \lambda'\nu'' + \lambda_1 \nu'_1.$$

Donc

$$0 < \lambda'', \qquad 0 \leq \lambda'_1, \qquad 0 \leq \lambda_2, \qquad \lambda'' + \lambda'_1 + \lambda_2 = 1.$$

Enfin d'après $h'^2 < 9 h_1^2$, $\lambda' + \lambda_1 = 1$, le coefficient de δA peut se remplacer *a fortiori* par $9\,\delta A\left(\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{h_1^2}{|h_2|}\right)$.

La méthode de transformation de $Q[\theta, h]$ est évidente. Nous définissons la suite $h, h', h'', \ldots, h^{(n)}, \ldots$ par cette condition que $\theta + h^{(n)}$ est l'image-réduite propre à θ de $\theta + h^{(n-1)}$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_n)$. De même, $h_p^{(i)}$ n'existant pas pour $i < p$ et $h_p^{(p)}$ étant égal à h_p par convention, la suite $h_p^{(n)}$, constituée de nombres de mêmes signes, sera définie, pour $n > p$, par la condition que $\theta + h_p^{(n)}$ est l'image-réduite propre à θ, de $\theta + h_p^{(n-1)}$ par rapport au couple $(\theta, \theta + h_n)$. On aura des relations telles que les suivantes :

$$|h_n| \leq |h_p^{(n)}| < 3\,|h_n|,$$

quel que soit $p \leq n$;

$$Q[\theta, h_p^{(n-1)}] = Q[\theta, h_p^{(n)}]\mu_p^{(n)} + Q[\theta, h_n]\nu_p^{(n)} + \sigma_p^{(n)} A \frac{(h_p^{(n-1)})^2}{h_n}$$

avec

$$0 < \mu_p^{(n)} \ , \ 0 \leq \nu_p^{(n)} \ , \ \mu_p^{(n)} + \nu_p^{(n)} = 1 \ . \ . \ .$$

Le coefficient de $\delta_p^{(n)} A$ peut *a fortiori* être remplacé par $\frac{9\,h^2_{n-1}}{h_n}$.

Cette relation permet de justifier par récurrence la formule

$$\left.\begin{aligned} Q(\theta, h) = Q[\theta, h^{(n)}]\lambda^{(n)} + \ldots + Q[\theta, h_p^{(n)}]\lambda_p^{(n)} + \ldots + Q[\theta + h_n]\lambda_n + \\ + 9\,\delta A\left[\frac{h^2}{|h_1|} + \frac{h_1^2}{|h_2|} + \ldots + \frac{h^2_{n-1}}{|h_n|}\right] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

avec la condition qu'aucun des $\lambda_p^{(n)}$ n'est négatif et que leur somme pour $p = 0,1 \ldots, n$ est 1.

$$[\lambda_0^{(n)} = \lambda^{(n)}, \quad \lambda_n^{(n)} = \lambda_n].$$

Utilisons maintenant la propriété de la convergence uniforme vers 0 de la différence $Q[\theta, \lambda u] - Q[\theta, u]$ quand λ et $\frac{1}{\lambda}$ sont bornés, u tendant vers 0.

Soit $\varepsilon(\alpha)$ le maximum de la valeur absolue de cette différence, quand $1 \leq |\lambda| < 3$, $|u| < \alpha$, θ quelconque. Alors,

$$Q[\theta, h_i^{(n)}] = Q[\theta, h_n] + \delta_{i.n}\, \varepsilon[\,|h_n|\,].$$

Les $\lambda_i^{(n)}$ étant non négatifs, on a:

$$|\,\Sigma \lambda_i^{(n)} \delta_{i.n}\,| \leq \Sigma \lambda_i^{(n)} = 1.$$

Donc

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h_n] + \delta'\varepsilon[|h_n|] + 9\,\delta A \left[\frac{h^2}{|h_1|} + \ldots + \frac{h^2_{n-1}}{|h_n|}\right] \quad . \quad . \quad (6)$$

Supposons que la série $\frac{h_n^2}{h_{n+1}}$ *soit absolument convergente.*

Nous allons déduire immédiatement de la formule (6) que $Q[\theta, h]$ tend vers une limite quand h tend vers 0.

Soit en effet m l'entier défini par

$$|\,h_m\,| < |\,h\,| \leq |\,h_{m-1}\,|.$$

Nous appliquons la formule (6) à la suite $h, h_m, h_{m+1}, \ldots, h_{m+q}$.

Dans le coefficient de $9\,\delta A$, nous remplaçons h^2 par h^2_{m-1}, et nous ajoutons tous les termes marquants de la série $\frac{h_n^2}{|h^{n+1}|}$. Nous obtenons *a fortiori*:

$$Q[\theta, h] = Q[\theta, h_{m+q}] + \delta'\,\varepsilon[|\,h_{m+q}\,|] + 9\,\delta A \sum_{m-1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|} \quad . \quad (7)$$

Soit h' un nombre quelconque inférieur en valeur absolue à h_{m-1} et q assez grand pour que $|h_{m+q}| < |h'|$. Nous trouvons, en faisant croître q:

$$|\,Q[\theta, h) - Q(\theta, h')\,| \leq 18 A \sum_{m-1}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|}.$$

Sous la seule condition: $|h|$ et $|h'| < |h_{m-1}|$.

Donc $Q[\theta, h]$ tend vers une limite quand h tend vers 0. $F(\theta)$ *possède une dérivée au point* θ. Soit $\varphi(\theta)$ sa valeur. On a, en faisant croître q indéfiniment dans la formule (7) *pour* $|h| < 2\alpha\,|h_1|$.

$$Q(\theta, h) = \varphi(\theta) + \delta A \left[\frac{h^2}{|h_m|} + 9 \sum_{m}^{\infty} \frac{h_n^2}{|h_{n+1}|}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

En résumé, *si* $|h_n|$ *tend vers* 0 *en décroissant, si la série* $\frac{h_n^2}{h_{n+1}}$

est absolument convergente, si les nombres $\frac{F(t+u)+F(t-u)-2F(t)}{u^2}$ *où* $t=\theta+h_n$ *restent bornés pour toute valeur réelle de u et pour toute valeur entière de n (positif), sous ces conditions suffisantes,* $F(\theta)$ *possède une dérivée au point* θ.

Un cas particulier remarquable est celui où la suite $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ est bornée.

Soit $\left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \alpha$, α étant indépendant de n. Si $\frac{h_n}{h_{n+q}} < 2$, et si nous supprimons dans la suite les termes $h_{n+1}, \ldots, h_{n+q}$, la nouvelle suite obtenue h_n' satisfait à la condition $\left|\frac{h'_n}{h'_{n+1}}\right| < 2\alpha$. $|h|$ étant compris entre $|h_{m-1}|$ et $|h_m|$, nous considérons la suite $h, h_m, h_{m+1}, \ldots$, et, conservant son premier terme, nous la réduisons de proche en proche, en y supprimant, au fur et à mesure que nous en rencontrons un dans la suite parcourue dans son ordre naturel, tout terme supérieur en valeur absolue à la moitié du dernier terme conservé.

Dans la suite restante, $h, h'_1, h'_2, \ldots, h'_q, \ldots$ le rapport de chaque terme au suivant est inférieur en valeur absolue à 2α. La série $\frac{h'^2_n}{h'_{n+1}}$ est convergente, d'après:

$$|h'_n| < \frac{1}{2^n}\cdot|h|, \text{ et } \frac{h'^2_n}{|h'_{n+1}|} < 2\alpha\,|h'_n|.$$

On a:

$$\frac{h^2}{|h'_1|} + 9\sum_1^\infty \frac{h'^2_n}{|h'_{n+1}|} < 2\alpha\,|h|\left[1+\frac{9}{2}+\ldots+\frac{9}{2^n}+\ldots\right] = 20\alpha\,|h|,$$

Donc, *dans le cas où le rapport* $\frac{h_n}{h_{n+1}}$ *est inférieur en valeur absolue à un nombre* α *indépendant de n, et où le rapport* $|R(t,u)|$ *est borné par A quels que soient u réel et* $t=\theta+h_n$ *ou* $t=\theta$, $F(\theta)$ *possède une dérivée* $\varphi(\theta)$ *au point* θ, *et on a la formule*

$$Q[\theta,h] = \varphi(\theta) + 20\delta\alpha A h, \text{ pour } |h| < 2\alpha\,|h_1|.\ (\delta^2<1) \quad \ldots \quad (9)$$

Natuurkunde. De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer B. VAN DER POL JR.: *„Discontinuïteiten bij het Magnetiseeren".*

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS.)

Onder den titel *„Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen"* beschrijft Prof. H. BARKHAUSEN in het Phys. Zeitschr. Sept. 1919, o.m. eenige experimenten waarbij discontinuïteiten, die bij het magnetiseeren optreden, in een telephoon hoorbaar werden gemaakt. Te dien einde werd een ijzeren staaf vertikaal geplaatst in een draadklosje dat verbonden was met een trioden-versterker. Wanneer nu door het bijbrengen met de hand van een kleinen permanenten magneet de ijzeren staaf werd gemagnetiseerd, kon in een aan den versterker aangesloten telephoon een geruisch worden gehoord, dat zijn oorsprong vindt in de inductie-stootjes door de discontinuïteiten opgewekt.

Deze proeven werden door ons herhaald en uitgebreid, waarbij eenige nieuwe verschijnselen aan het licht kwamen, die hier in het kort mogen worden beschreven.

Vooraf zij opgemerkt dat het genoemde geruisch in de techniek der draadlooze telegraphie reeds bekend was, en als hinderlijk werd beschouwd bij het gebruik van den magnetischen detektor van MARCONI [1]).

Bij onze proeven werd gebruik gemaakt van een drievoudigen zoogenaamden laag-frequent versterker, waarbij de energie-overdracht van triode op triode plaats vindt door middel van kleine transformatoren. De einden van de solenoïde die het te magnetiseeren ijzer bevatte, waren verbonden òf direkt aan gloeidraad en rooster der eerste triode, òf via een kleinen transformator van geschikte dimensies.

Het geruisch in de telephoon, dat een gevolg is van de inductie-stootjes in de solenoïde, moet als eerste oorzaak hebben een discontinue verandering van de totale „flux" door de solenoïde, die plaats grijpt bij het sprongsgewijze ommagnetiseeren van molekuulgroepen of ijzerkristallen. Wanneer nu afzonderlijke ijzerkristallen bij dit verschijnsel plotseling omgemagnetiseerd worden door het uitwendig aangebrachte veld, dan zou men verwachten dat de verandering van

[1]) ECCLES. Wireless Telegraphy and Telephony, 2nd Ed. p. 284, 285.

het aantal bij spontane magnetisatie reeds aanwezige krachtlijnen die door de lucht verloopen moeten in kleine bogen vlak aan het oppervlak van het ijzer, het best kunnen worden waargenomen door middel van een nauw om het ijzer sluitende solenoïde. Teneinde deze voorstelling nader op de proef te stellen werden twee solenoïden gewonden, de eerste nauw sluitend om het ijzer (1 . 10[4] windingen van 0.1 m.m. koperdraad), de tweede met een binnendiameter van 24 m.m. (1.7 . 10[4] windingen van hetzelfde koperdraad). De dikte van de bij deze proef gebruikte weekijzeren kern bedroeg 1,00 m.m. Het wijdere spoeltje had dus een inwendigen diameter 24 maal de diameter van de kern.

Bij magnetisatie door middel van een kleinen permanenten magneet, die geleidelijk met de hand bij de kern gebracht kon worden, zóó dat deze volgens zijn lengterichting gemagnetiseerd werd, kon wel eenige vergrooting in de intensiteit van het geruisch worden gehoord bij het gebruik van de nauwsluitende solenoïde, maar in het geheel niet in die mate als wel verwacht mag worden op grond van de voorstelling, dat bij de discontinuïteiten slechts het aantal krachtlijnen in de onmiddellijke omgeving van het ijzer veranderingen ondergaat.

Deze proef leidt dus tot de voorstelling dat bij het magnetiseeren plotseling de magnetisatie van lang gerekte molekuulgroepen omslaat en wel zou de lengte-richting van zulk een groep samenvallen met de uitwendig aangebrachte magnetomotorische kracht. Immers, slechts dan is het mogelijk dat inductiestootjes ontstaan van dezelfde orde van grootte in twee spoelen waarvan de een de kern eng omsluit, terwijl de tweede een inwendigen diameter heeft, die meer dan 20 maal de dikte van de ijzeren kern bedraagt. De afstand tusschen de polen van den hierbij gebruikten permanenten magneet bedroeg 60 m.m. Buiten de spoelen om kon met de polen de kern aan beide zijden worden geraakt.

Een uitgegloeide weekijzeren draad vertoont in het algemeen de discontinuïteiten zeer goed. Zelfs een 0,1 m.m. dikke (vooruit in een H-atmospheer uitgegloeide) ijzerdraad laat het geruisch duidelijk hooren, alleen over een korteren weg van den bewegelijken magneet, wat eenvoudig verklaarbaar is uit de eerder optredende verzadiging, en in goede overeenstemming is met de voorstelling van de lange ijzervezels die discontinu in hun geheel gemagnetiseerd worden.

Daar nog andere ferro-magnetische stoffen dan ijzer werden onderzocht zij op deze plaats reeds het karakteristieke ijzer-geluid vergeleken met een lang aangehouden fransche „ch", d. w. z. het bestaat uit een zeer groot aantal (voorloopig nog niet numeriek te schatten)

zwakke tikjes van ongeveer gelijke intensiteit; alleen bij grootere versterking zijn daaronder duidelijk enkele scherp gedefinieerde knallen waar te nemen.

Wanneer nu een weekijzeren draad (dia. bijv. van 1 m.m.) eerst door het bijbrengen van den magneet tot op kleinen afstand gemagnetiseerd wordt en daarna de magneet wordt weggenomen, hoort men bij beide handelingen het karakteristieke ijzergeruisch. Een remanent magnetisme zal evenwel daarna nog in den draad aanwezig zijn. Wordt nu vervolgens met korte rukjes aan den ijzerdraad getrokken, dan hoort men in de telephoon bij ieder rukje het karakteristiek ijzergeruisch weer en met kleine rukjes zal men dit bijv. 5 of meer malen kunnen herhalen. Is door rekken he remanent magnetisme eenmaal verdwenen, dan blijft bij verder rekken het geruisch uit. Nauwkeurig hetzelfde verschijnsel doet zich voor bij kleine torsies, na de magnetisatie aan een draad gegeven, en ook bij het even verwarmen bijv. door telkens een deel van een seconde een kleine Bunsen vlam tegen den draad te laten spelen. Het geruisch dat bij rekking, torsie of verhitting optreedt is geheel van denzelfden aard als dat bij het magnetiseeren. Wij komen dus tot de conclusie: bij het opheffen van het remanent magnetisme in weekijzer door rekking, tordeering of verhitting treden gelijksoortige discontinuïteiten op als bij het magnetiseeren of ommagnetiseeren.

Een sterke circulaire magnetisatie doet een daarop gesuperponeerde magnetisatie in de lengterichting van de staaf zonder discontinuïteiten verloopen. Voor den meergenoemden 1 m.m. dikken weekijzeren draad moest, om het geluid te doen verdwijnen, een stroom van 7 Amp., die de circulaire magnetisatie teweeg bracht, door den draad gezonden worden. Natuurlijk wordt bij een dergelijke proef de temperatuur van den draad merkbaar hooger, en men zou geneigd kunnen zijn de afwezigheid van de discontinuïteiten toe te schrijven aan de verhooging der temperatuur. Onmiddellijk na het sluiten van den stroom van 7 Amp., blijft bij longitudinale magnetisatie het geruisch echter uit en ook terstond na het verbreken treedt het weer op. In beide gevallen moet de temperatuurverandering nog klein zijn, een bewijs dus dat het de circulaire magnetisatie is, die het optreden der discontinuïteiten bij het magnetiseeren in de lengterichting belet.

Een uitgegloeide ijzerdraad vertoont voorts bij deze gevoelige methode van waarneming de volgende opvallende eigenschap. Nadat door het naderen en daarna weer verwijderen van den magneet een remanente magnetisatie aan het ijzer is gegeven, kan deze, door het

gedeelte van de staaf dat zich binnen de solenoïde bevindt, beurtelings naar links en rechts te buigen, onder het optreden van het karakteristieke ijzer-geruisch opgeheven worden. Maar daarna blijft bij voortgezet heen en weer buigen het karakteristieke geruisch hoorbaar, ofschoon iets zwakker. Ook een versch uitgegloeide draad die *niet vooraf* is *gemagnetiseerd*, vertoont dit laatste verschijnsel. Men kan dit buigen naar willekeur herhalen, steeds treedt het geruisch met dezelfde sterkte op. Deze proef komt ons voor een bewijs te leveren voor de, in de theorie van Weiss onderstelde, spontane magnetisatie van ijzerkristallen. Wel was het aardveld nog aanwezig, maar een zwakke gelijkstroom door de spoel verandert niets aan het verschijnsel. Men kan zich een verklaring denken van dit verschijnsel op de volgende manier: door het buigen worden de onderlinge standen van de spontaan gemagnetiseerde kristallen gewijzigd, waarbij telkens andere stabielere tusschen-evenwichtstoestanden mogelijk zijn wanneer groepen van kristallen omgemagnetiseerd worden, wat dan ook plaats grijpt; bij het terugbuigen treedt hetzelfde verschijnsel op.

Kobalt werd vervolgens onderzocht. Dit materiaal was slechts beschikbaar in den vorm van kubi van ongeveer 9 m.m. ribben. Tien van deze kubi vrij achter elkaar geplaatst en door dun papier tezamen gehouden vormden een staafje dat in zijn geheel door den gebruikten magneet kon worden opgetild. De totale inductie was dus van dezelfde grootte-orde als bij het ijzer, ondanks de luchtafscheidingen tusschen de afzonderlijke kubi. Resultaat: kobalt vertoont een geruisch van denzelfden aard als ijzer, alleen met kleinere intensiteit. Bij ijzer is het verschijnsel ook zonder versterker nog goed waarneembaar, met kobalt nog juist hoorbaar.

Anders gedroeg zich nikkel. Hierbij hoort men duidelijk, zelfs zonder versterker, meer op zich zelf staande tikken. Met een drievoudigen triode-versterker zijn deze tikken zeer luid en doen sterk aan explosies denken. De graad van zuiverheid van het gebruikte nikkel is niet met zekerheid bekend. Mogelijk hebben kleine verontreinigingen invloed op het verschijnsel.

Electrolytisch ijzer vertoont het karakteristiek week-ijzer-geruisch, doch aanmerkelijk zachter.

Het maximum van geluidsintensiteit werd verkregen bij een 1,98 m.m. dikke nikkel-stalen staaf. Met een drievoudigen triode-versterker is het geluid dat bij de magnetisatie van nikkelstaal optreedt met de telephoonen aan het oor bijna niet verdraagbaar, en met de telephoonen op tafel gelegd was het goed hoorbaar overal in een zaal van 7 $\times$ 7 meter, en zelfs daarbuiten. Bij het magnetiseeren van dit materiaal hoort men in de telephoonen een groot aantal dicht op elkaar

volgende knallen; het is derhalve bij uitstek geschikt de discontinuïteiten experimenteel nader te onderzoeken.

Bij de beschreven proeven werd, in navolging van BARKHAUSEN, de continue verandering der veldsterkte verkregen door het naderbrengen met de hand van een permanenten magneet. De duidelijkheid, waarmede het verschijnsel echter bij nikkelstaal zich voordoet, laat een nauwkeuriger wijze van werken toe. Men zou er aan kunnen denken de benoodigde continue verandering der veldsterkte teweeg te brengen met behulp van een geleidelijk in intensiteit toenemenden stroom. Evenwel is het experimenteel geen eenvoudige zaak een stroom zóó continu de veldsterkte te laten veranderen, dat, zonder ijzer, met een triode-versterker geen geruisch gehoord wordt. Eenige proeven werden gedaan waarbij door een tweede solenoïde, die zich in de meergenoemde bevond, een stroom ging, in welks keten een zeer groote zelf-inductie (Ruhmkorffmagneet met kort gesloten ijzerkern) was ingeschakeld. Hierbij werd, met een nikkelstalen staaf in de binnenste der solenoïden, gedurende de exponentieele toename van den stroom na sluiting, een dicht opeengedrongen zeer groot aantal (voorloopig numeriek nog niet te schatten) knallen gehoord, waarna, als de stroom bijna zijn maximum had bereikt, enkele geheel op zich zelf staande discontinue ommagnetisaties nog zeer duidelijk hoorbaar nakwamen.

Nadat één enkele geïsoleerde discontinuïteit aldus was waargenomen werd de variatie van de veld-sterkte door middel van den veranderlijken stroom verlaten en teruggekeerd tot den verplaatsbaren permanenten magneet. Maar nu werd deze laatste bevestigd op een door middel van een mikrometerschroef verstelbaar support, zóó dat de afstand tusschen den magneet en de te magnetiseeren nikkelstalen staaf zeer nauwkeurig en goed continu kon worden veranderd door draaien aan een kleine kruk. De magneet werd met zijn polen vertikaal boven elkaar opgesteld ter hoogte van het spoeltje dat de nikkelstalen staaf omgaf, en ongeveer 5 cM. daarvan verwijderd. Met een tweeden magneet werd nu een remanent magnetisme aan de staaf gegeven in zulk een zin, dat door nadering van den mikrometrisch opgestelden eersten magneet, dit remanent magnetisme werd verminderd. Door geleidelijk naderen van den mikrometrisch opgestelden magneet kon nu de veldsterkte zeer langzaam op continue wijze worden veranderd. Het daarbij met sprongen omslaan van de magnetisatie van de, naar het ons voorkomt, lange kristalgroepen kon op deze wijze in bijzonderheden worden nagegaan, en men hoorde aldus de discontinuïteit geheel geïsoleerd.

Met genoemde opstelling werd nu het volgende verschijnsel ge-

vonden. Wanneer de magneet snel bijv. 1 mM. nader werd gebracht bij de nikkelstalen staaf, dan hoorde men natuurlijk de beschreven knallen. Maar ook nàdat, door stil houden van den magneet, het veld niet meer veranderd werd, hoorde men in de telephoonen nog duidelijk verscheidene discontinue o:nmagnetisaties. De laatst daarbij optredende discontinuïteiten werden waargenomen soms 7 seconden nàdat de veldsterkte constant werd gehouden.

De groote intensiteit, waarmee bij nikkelstaal het algemeene verschijnsel waarneembaar is, maakt het mogelijk de discontinuïteiten bij het magnetiseeren ook galvanometrisch te onderzoeken. Hiertoe werd, zonder versterker, de solenoïde direkt aangesloten aan een Siemens en Halske galvanometer, systeem weerstand 300 Ohm. Het instrument was bij uitwendige sluiting door de solenoïde niet zoodanig gedempt dat een door een inductiestoot eenmaal verkregen uitslag, zooals bij een Grassot-fluxmeter het geval is, minuten lang praktisch niet verandert, en een langzaam terugkruipen na een inductiestoot kon niet geheel worden verhinderd. Niettegenstaande deze nog onvoldoende demping werd toch de ideale eigenschap van den fluxmeter benaderd, waarbij het galvanometerspoeltje zich steeds zoo tracht in te stellen dat de totale flux door de geheele keten [galvanometerspoel plus solenoïde] onveranderd blijft. Wanneer nu het magnetiseeren van het nikkelstaal geheel continu verliep, zou bij het naderen van den magneet een geleidelijke vergrooting van den galvanometer-uitslag moeten plaats hebben, die, nadat het veld niet meer veranderd wordt, bij benadering gedurende eenigen tijd ook constant zou blijven. De in werkelijkheid echter optredende discontinuïteiten in de inductie bij continue verandering van het veld manifesteeren zich in de sprongen van den galvanometer uitslag. Bij een schaalafstand van 4 meter werden sprongen tot van 5 tot 7 mM. (schaaldeelen) waargenomen, bij geheel continue veranderingen van het veld. Deze sprongen werden afgewisseld door kleine gebieden, waarbij de inductie, althans voor zoover waarneembaar, mèt de magnetische kracht continu toenam.

Wanneer voorts, nadat de veldsterkte een oogenblik is toegenomen, waarbij dus de discontinuïteiten optreden, door terugbewegen van den magneet het veld wordt verzwakt om vervolgens weer versterkt te worden tot voorbij het eerst bereikte punt, dan zullen gedurende de verzwakking en de daarop volgende versterking geen discontinue veranderingen in de magnetisatie zich voordoen. Voor de op de verzwakking volgende versterking geldt dit slechts zoolang de eerstbereikte veldsterkte niet is overschreden. Want nadat dit (scherp gedefinieerde) punt is bereikt, doen zich de discontinuïteiten bij ver-

dere vergrooting der veldsterkte weer in vollen omvang voor. De continue afname en daarop volgende toename der inductie verloopt, vergeleken met de veldsterkte, veel langzamer dan op het discontinue gebied. Het beschreven verschijnsel is schematisch weergegeven door fig. 1, waarbij de kromme in de richting van de pijlen werd

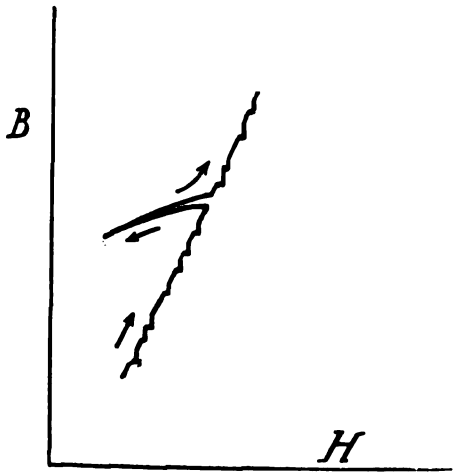


Fig. 1.

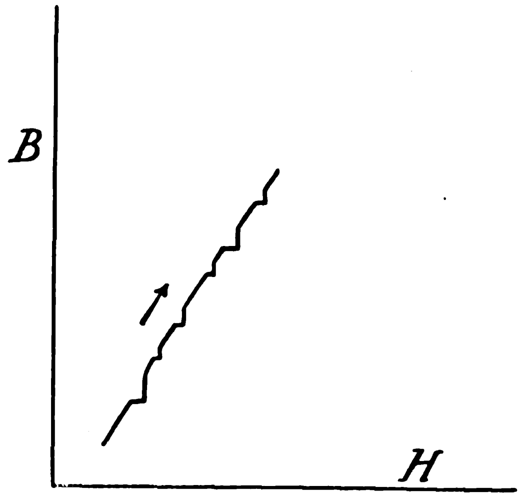


Fig. 2.

doorloopen. De detailstructuur van de discontinuïteiten in de inductie, als waargenomen met den galvanometer, is ongeveer als in fig. 2. Hieruit ziet men, dat, vóór een sprong in de B zich voordoet, gewoonlijk de B even stilstaat om met een sprong op de normale waarde te komen. De kleinheid der sprongen en het niet voldoende gedempt zijn van den beschikbaren galvanometer maakten de waarnemingen echter moeilijk.

Door de solenoïde om de nikkelstalen staaf zoowel met den galvanometer als met den trioden-versterker te verbinden, konden de sterkere knallen geïdentificeerd worden met de grootere sprongen in den uitslag van den galvanometer. De zwakkere knallen konden evenwel galvanometrisch niet waargenomen worden.

Ten slotte werd de orde van grootte van de bij nikkelstaal voorkomende discontinuïteiten in de inductie bepaald.

Een tweede spoeltje (diameter 8.65 m.m., één laag van 50 windingen, 45 m.m. lang) werd daartoe in de eerste solenoïde geplaatst. Een stroomstoot van 40 milliampère door het tweede spoeltje was noodig om een sprong in den galvanometeruitslag te verkrijgen van dezelfde grootte-orde als die optraden bij het magnetiseeren van het nikkelstaal. De veldsterkte in het spoeltje bedroeg dus

$$H = 0.4\,\pi\,n_1\,i_{amp.} = 0.4\,\pi\,\frac{50}{4.5}\,0{,}04 = 0{,}56 \text{ Gauss.}$$

De verandering van de flux door een winding van de solenoïde was dus

$$dN = \pi\left(\frac{0.865}{2}\right)^2 0{,}56 = 0{,}33 \text{ krachtlijnen.}$$

Wanneer dus de beschreven opvatting van het ommagnetiseeren in lange ijzervezels juist mocht wezen, dan zou, bij aanname van een maximale inductie van 18000 (als bij ijzer) voor het ferromagnetische nikkelstaal, de doorsnede van zoo'n vezel van de orde van grootte zijn van

$$\frac{0.33}{18000} = 1{,}83\ 10^{-5} \text{ cm}^2.$$

De aanname van een cylindrischen vorm voert derhalve tot een middellijn van ongeveer

0,05 millimeter,

een niet geheel onwaarschijnlijke grootte. Men vatte echter deze berekeningen als voorloopig op, daar verder onderzoek noodig is om meerdere klaarheid in dit gecompliceerde verschijnsel te brengen.

Anatomie. De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer M. W. WOERDEMAN: *„Over een menschelijken eierstok met talrijke abnormale eiblaasjes en de genetische beteekenis van deze afwijking".*

(Mede aangeboden door den Heer BOLK).

Op den cursus voor microscopische anatomie werden dit jaar aan de studenten ter bestudeering uitgedeeld doorsneden van een menschelijk ovarium, waarin talrijke eigenaardigheden te zien waren. Van het nog niet tot coupes verwerkte gedeelte van het ovarium heb ik een serie van 10 μ dikke doorsneden gemaakt, teneinde de gevonden eigenaardigheden uitvoerig te kunnen bestudeeren. Het onderzoek der praeparaten en de lectuur der zeer omvangrijke literatuur, die reeds over de gevonden afwijkingen bestaat, geven nu m. i. het recht die literatuur nog met een mededeeling uit te breiden.

De herkomst van het praeparaat kon niet worden nagegaan. In de materiaalcollectie van ons laboratorium stond het zonder nadere toelichting als menschelijk ovarium vermeld. Daar ook niet uit te maken was, wie mijner voorgangers het praeparaat verzameld heeft, tast ik omtrent den leeftijd van het individu, waarvan het orgaan afkomstig is, in het duister. Het is zeer goed gefixeerd in formaline en was in paraffine ingesloten. Bij microscopisch onderzoek bleek, dat er talrijke folliculi vesiculosi van DE GRAAF aanwezig waren en zeer vele atretische follikels. Op eenige plaatsen meen ik luteïnecellen waargenomen te hebben. Dit zou er op wijzen, dat ovulatie heeft plaats gehad. Tevens wijzen de afmetingen van het onderzochte orgaan en de vergelijking met ovaria van zuigelingen er op, dat het ovarium waarschijnlijk van een geslachtsrijp individu afkomstig is.

Maar het is dan ook niet meer dan waarschijnlijk. Immers heeft VALLISNERUS reeds in 1739 de aanwezigheid van rijpe eiblaasjes bij pasgeborenen beschreven en zou dit verschijnsel volgens E. RUNGE (1906) regelmatig voorkomen. De eicellen zouden zelfs voor bevruchting geschikt zijn en ovulatie zou plaats vinden. Indien dit waar zou zijn, ware het voorkomen van groote eiblaasjes en van ovulatieverschijnselen geen bewijs, dat het individu geslachtsrijp was. Maar daar KÄPPELI en HEITZ bij meer dan 200 onderzochte ovaria van pasgeboren dieren, waarbij wel groote eiblaasjes gevonden werden,

nooit ook maar eenig teeken van ovulatie zagen, moet men voor den mensch ook nog maar niet zonder meer ovulatie bij zuigelingen aannemen. Hoe dan ook, met groote waarschijnlijkheid was het individu, waarvan de eierstok hier beschreven zal worden, een geslachtsrijpe vrouw. Als eerste eigenaardigheid vertoonde het praeparaat nu de aanwezigheid van een groot aantal instulpingen van het kiemepitheel, dat als een enkele laag van kubische cellen het orgaan overal bekleedt. Die instulpingen zijn kleine buisjes met een rolrond lumen, dat door een klein aantal heldere, kubische cellen omgeven wordt. De kernen dier cellen liggen vrijwel in het midden der cellen. De cellen hebben alle nagenoeg hetzelfde uiterlijk. De meeste buisjes zijn onvertakt, slechts enkele vertakken zich. Ze verloopen meestal niet radiair (naar het centrum van het ovarium gericht), maar buigen vaak heel dicht onder het kiemepitheel om en verloopen dan min of meer evenwijdig aan de oppervlakte. In de doorsneden ziet men derhalve talrijke epitheelringetjes onder het kiemepitheel (dwars doorgesneden buisjes). Ze liggen in de tunica albuginea en eindigen, voor zoover ik na kon gaan, steeds blind. In de gebruikelijke leerboeken der histiologie en microscopische anatomie vindt men deze instulpingen van het kiemepitheel niet genoemd. Slaat men evenwel de leerboeken der veterinaire histiologie of die der ontwikkelingsgeschiedenis op, dan vindt men het voorkomen van dergelijke instulpingen bij enkele dieren en bij menschelijke foeten vermeld. Ze dragen den naam van „Keimschläuche" of „invaginations épithéliales". Ik zal ze hier als „kiemepitheelinstulpingen" beschrijven, daar aan den naam „Keimschläuche" een verkeerde voorstelling van hun genese ten grondslag ligt (z.o.).

In de tweede plaats vertoonde het ovarium een groot aantal celstrengen, liggende in het stroma. Deze strengen zijn langgerekt, worden omgeven door een dunne bindweefselmembraan en bestaan uit zeer heldere, regelmatig gerangschikte cylindercellen (zie fig. 1*a*). Was er een lumen in, dan zouden ze sprekend op klierbuisjes gelijken. In de literatuur worden ze met verschillende namen genoemd. De meest gebruikelijke is: „Markstränge" (cordons médullaires). Daarom noem ik ze in het vervolg ook mergstrengen. De derde en meest opvallende eigenaardigheid van het onderzochte praeparaat is echter de aanwezigheid van talrijke abnormale eifollikels. Men ziet nl. (zie fig. 2 en fig. 1*b*) op tal van plaatsen de eicellen in groepen liggend en door een aantal follikelcellen omgeven tot een geheel, dat men „Eiballen" noemt. Behalve deze eiballen, waarin ik tot negen eicellen bijeen vond, komen er ook eiblaasjes (folliculi vesiculosi) voor met meer dan één eicel. In die blaasjes komt inplaats van één, een

grooter aantal cumuli oöphori voor (zie fig. 1*c* en fig. 3). Vijf was het grootste aantal, dat ik vond. Maar naast de eicellen, die in een

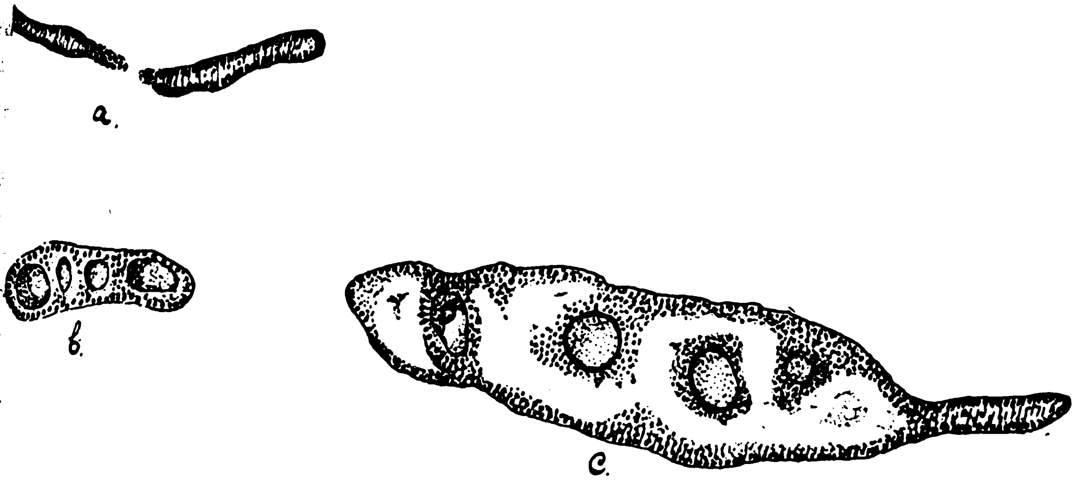


Fig. 1.
a. Mergstreng.
b. z.g. Eibalfollikel.
c. z.g. Schlauchfollikel.

werkelijken cumulus oöphorus liggen, vindt men soms nog rudimentaire eicellen in de eiblaasjes.

Nu zijn follikels met meer dan één eicel bij den mensch niet onbekend. Men geeft echter op, dat er maar hoogstens drie in zouden voorkomen. Bij sommige dieren is echter het voorkomen van eiblaasjes met talrijke eicellen veel minder zeldzaam, ja soms zelfs een normaal verschijnsel. Is dus het hier beschreven menschelijk ovarium reeds belangwekkend door het vrij groote aantal eicellen, dat in de eiblaasjes voorkomen kan, bij nader onderzoek wordt het nog belangwekkender nl. indien men nagaat, hoe de abnormale eiblaasjes kunnen zijn ontstaan.

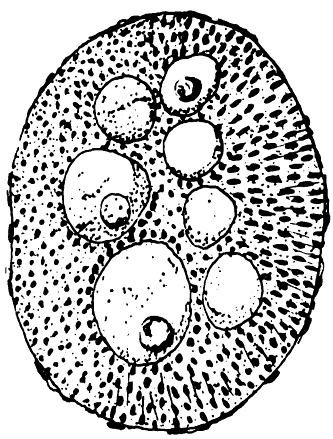


Fig. 2.
z.g. Eibalfollikel.

De vroegere opvatting van de genese van het ovarium was in grove trekken de volgende: Van het kiemepitheel woekeren celstrengen het ovarium binnen (soms hebben ze meer het karakter van buizen of wiggen). Deze z.g. „Stränge" of „Schläuche" van VALENTIN-PFLÜGER bevatten de primordiaaleieren en de toekomstige

follikelcellen, Op den duur woekert bindweefsel door deze strengen heen, verbreekt hun verbinding met het kiemepitheel en verdeelt ze

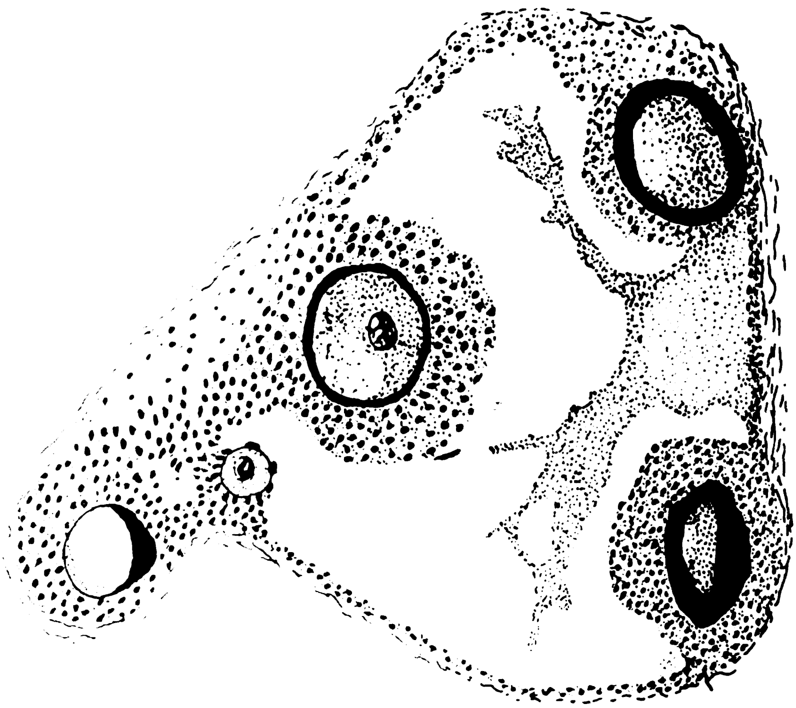


Fig. 3. Atypische follikel.

in celgroepen. Deze celgroepen (Eiballen, WALDEYER) bevatten een aantal eicellen en een aantal follikelcellen. Later wordt iedere eicel omgeven door een mantel van follikelcellen en vallen de eiballen in een aantal zoo omkleede eicellen (die men thans primairfollikels noemt) uiteen. De kiemepitheelinstulpingen vat men daarom nog wel op (zoo b.v. SCHMALTZ in ELLENBERGER's Handbuch d. vergl. Mikrosk. Anat. der Haustiere. Bnd. 2, 1911) als de resten van de van het kiemepitheel uitgaande buizen van PFLÜGER. Vandaar dan ook de naam „Keimschläuche" voor die instulpingen. De mergstrengen worden eveneens aangezien voor resten van de kiemepitheelwoekeringen, nl. van de strengen van PFLÜGER, terwijl de meer eicellen bevattende eiblaasjes worden beschouwd als te zijn ontstaan, doordat de eiballen niet in primair-follikels uiteengevallen zijn. Volgens HELLIN (1895) bestaat er in het ovarium een strijd tusschen bindweefsel en epitheel, die meestal eindigt met een overwinning van het bindweefsel. Wint dit weefsel echter den strijd niet, dan heeft de verdeeling van eiballen in primairfollikels niet of onvoldoende plaats en kan later uit een eibal een eiblaasje met meer dan één eicel ontstaan. Volgens SCHOTTLAENDER

(1893) is er een zeer regelmatige verhouding tusschen den groei van het bindweefsel en het kiemepitheel. Een stoornis in die regelmaat is aansprakelijk voor het ontstaan der atypische eiblaasjes.

In later jaren echter heeft men, geleerd door nauwkeuriger onderzoek, een heel ander beeld ontworpen van de histiogenese van het ovarium. Met eere mogen hier worden genoemd de onderzoekingen van onzen landgenoot COERT (Acad. Proefschrift. Leiden 1898) en van VON WINIWARTER (Archives de Biologie. Tome XVII. 1900). Daar niet alle embryologische handboeken dezelfde voorstelling der ontwikkeling geven, volg ik hier het referaat, dat BÜHLER in HERTWIG's Handbuch geeft (1906).

Het ovarium ontstaat, evenals de testis, uit een bepaald deel van den achtersten coeloomwand, waar het epitheel woekert en een lijst vormt (genitaallijst). De grens tusschen het epitheel van de lijst en het onderliggende embryonale bindweefsel is onscherp. In het epitheel worden later de geslachtscellen zichtbaar. Meestal wordt dan ook de grens tusschen epitheel en bindweefsel duidelijker. Deze grens is onregelmatig. Het epitheel dringt als het ware met franjeachtige uitloopers in het bindweefsel. Die uitloopers heeten „kiemstrengen". (ALLEN noemt ze „Sexualstränge"). Ook in deze kiemstrengen komen naast voorloopig indifferente epitheelcellen geslachtscellen voor. Uit het craniale deel van de geslachtslijst ontstaat een epitheelwoekering, die spoedig naar binnen groeit. COERT noemt deze massa het „reteblasteem". Als zich later de genitaallijst meer en meer afsnoert, ontstaat er een aan den achtersten coeloomwand hangend lichaampje (de indifferente geslachtsklier). Daar, waar het nog samenhangt met den achterwand van het coeloom, ligt het „reteblasteem", waaruit zich een aantal strengen ontwikkelen, die zoowel naar de oernier als naar het centrum van de geslachtsklier groeien (retestrengen). De geslachtsklier bestaat uit een schors, die niet anders is als het epitheel van de geslachtslijst. (Str. germinativum of kiemlaag) en een binnenste mesenchymkern (merg. of str. medullare). Van uit de schors dringen de kiemstrengen in het merg. Zoowel in deze kiemstrengen als in de z.g. rete-strengen komen geslachtscellen voor, maar vooral in de kiemstrengen.

Van af dit stadium treedt er divergentie op tusschen de ontwikkeling van mannelijke en vrouwelijke geslachtsklier.

Bij de ontwikkeling van den testis ontstaan uit de kiemstrengen de gewonden zaadkanaaltjes, uit de retestrengen de kanaaltjes van het rete testis. Bij de ontwikkeling van het ovarium vormt zich op de grens van schors en merg een fijn bindweefsellaagje (primaire tunica albuginea), dat op talrijke plaatsen de kiemstrengen doorlaat.

De kiemstrengen en rete-strengen groeien naar elkander en bereiken elkaar op sommige plaatsen. Een lumen treedt vooral in de retestrengen, minder vaak in de kiemstrengen op.

Retestrengen komen eveneens in verbinding met den oerniergang. Hier treden dus ontwikkelingsprocessen op, geheel homoloog aan die, welke bij den testis voorkomen. En men kan dan ook in het geheele apparaat van primaire albuginea, kiemstrengen en rete-aanleg het homologon zien van den testisaanleg bij den man.

Maar bij de vrouw treden bovendien ontwikkelingsprocessen op in de schorslaag. Hier heeft ondertusschen geregeld woekering van epitheel plaats gevonden. Het bindweefsel van de primaire albuginea groeit in de schorsmassa binnen en de schorsmassa groeit op tal van plaatsen door de primaire albuginea heen, zoodat de grens van schors en merg weer zeer vaag wordt. De doorgroeiing van de schors met bindweefsel heeft tengevolge, dat epitheelbalken en epitheelballen ontstaan (niet zoo heel duidelijk bij den mensch), waaruit ten slotte door verdere woekering van het bindweefsel de primairfollikels ontstaan. Een ononderbroken epitheellaag blijft ten slotte nog aan de oppervlakte van het ovarium bestaan (kiemepitheel). Wel vormt het kiemepitheel nog instulpingen, maar slechts zelden bevatten ze primordiaaleieren. In elk geval hebben ze met de ovogenese en met de strengen van PFLÜGER e. d. niets uit te staan en is de naam „Keimschläuche" m. i. dan ook minder verkieselijk. Den neutralen naam: „invaginations épithéliales" (kiemepitheelinstulpingen) (VON WINIWARTER) zou ik de voorkeur geven. Meestal verdwijnen ze later. Ook de kiemstrengen en het rete worden rudimentair. De kiemstrengen worden tot epitheelstrengen, liggend in het merg. Men noemt ze daarom meestal „mergstrengen". Van het rete blijven in den regel een aantal kanaaltjes over, bekleed met kubisch epitheel en liggend in den hilus ovarii of zelfs in het mesovarium. Sommige mergstrengen hangen nog met het rete samen. Het rete zelf kan nog met oernierresten (epoöphoron) verbonden zijn.

In het hier beschreven ovarium heb ik (althans in het gedeelte, dat mij voor onderzoek toegankelijk was) geen rete-resten gevonden. Wel waren nog aanwezig: de kiemepitheelinstulpingen en de mergstrengen. Wat aangaat de kiemepitheelinstulpingen diene het volgende: Ze zijn in ovaria van menschelijke foeten waarschijnlijk een constant verschijnsel. Na de geboorte schijnen ze meestal spoedig verdwenen te zijn. Enkele meedeelingen over kiemepitheelinstulpingen in zuigelingovaria zijn niet heel duidelijk. (zie bij SCHOTTLAENDER, Arch. f. mikr. Anat. Bnd. 41, 1893). Bij jonge dieren komen ze vaker voor en bij volwassen honden zijn ze zelfs regelmatig nog te vinden (SCHMALTZ).

Uit een afbeelding van SCHMALTZ valt af te leiden, dat ze bij den hond aanzienlijk grooter zijn, dan in het menschelijk ovarium, dat ik hier beschrijf.

Over de mergstrengen bestaat zeer veel literatuur, die men in hoofdzaak opgegeven vindt bij v. WINIWARTER en BÜHLER. Het blijkt, dat ze door talrijke onderzoekers bij zeer verschillende dieren tijdens de ontwikkeling van het ovarium zijn gezien. Meestal lossen ze zich vóór de geboorte in primairfollikels op (COERT, v. WINIWARTER), waarbij de indifferente cellen der strengen het follikelepitheel vormen van de in de strengen voorkomende eicellen. Lossen ze zich niet vóór de geboorte op in primairfollikels, dan toch in ieder geval spoedig daarna. Bij het konijn b.v. kon BÜHLER ze weinige dagen na de geboorte reeds niet meer vinden, hoewel ze bij embryonen van dit dier juist door COERT en v. WINIWARTER zoo mooi beschreven worden. Daar nu echter v. WINIWARTER ze bij het konijn nog zelfs zes weken na de geboorte vond, blijkt wel, dat er waarschijnlijk met groote individuëele verschillen rekening moet worden gehouden. Het meest constant schijnen ze in volwassen ovaria van carnivoren en insectivoren nog voor te komen. SCHMALTZ vermeldt ze als constant verschijnsel in het hondenovarium en minder constant in dat van de kat.

Omtrent den mensch is bekend, dat ze door HARZ, BÜHLER, PALADINO, v. WINIWARTER, COERT en WICHSER bij embryonen zijn gevonden. Bij een meisje van enkele weken vond RIELÄNDER (1904) ze. Ze bestaan uit heldere, protoplasmarijke cellen en zijn omgeven door een fijne, structuurlooze membraan. Dit beeld klopt wonderwel met hetgeen ik zag, maar is anders dan voor den hond door SCHMALTZ wordt opgegeven. Deze beschrijft ze als groepen van donker gekorrelde cellen met ronde kernen, die soms een klein lumen omgrenzen. Bij pasgeboren zuigelingen komen er nog eicellen in voor (BÜHLER). KEIBEL en MALL (Handbuch der Entwicklungsgeschichte des Menschen 1911) deelen mede, dat de mergstrengen in de eerste levensjaren vrij dikwijls gevonden worden, maar slechts zelden in den eierstok van volwassen vrouwen. BÜHLER zag ze bij een tweejarig meisje en in oudere ovaria dan ook niet. Het hier beschreven praeparaat is dus wel interessant, daar het nog zoo duidelijk embryonale resten (kiemepitheelinstulpingen en mergstrengen) bevat. Zóó zeldzaam is het voorkomen daarvan echter niet, dat het deze mededeeling zou rechtvaardigen. Ik meen echter een verband te kunnen aantoonen tusschen de aanwezigheid van de mergstrengen en het voorkomen van zoo talrijke atypische eiblaasjes.

Vervolgt men nl. een mergstreng in de serie (zie fig. 4), dan kan men er zich van overtuigen, dat ook in de mergstrengen nog

eicellen voorkomen (zie b.v. in fig. 4 coupe 4 en verder fig. 1*b*), maar tevens kan men zien, dat de mergstreng op een bepaalde

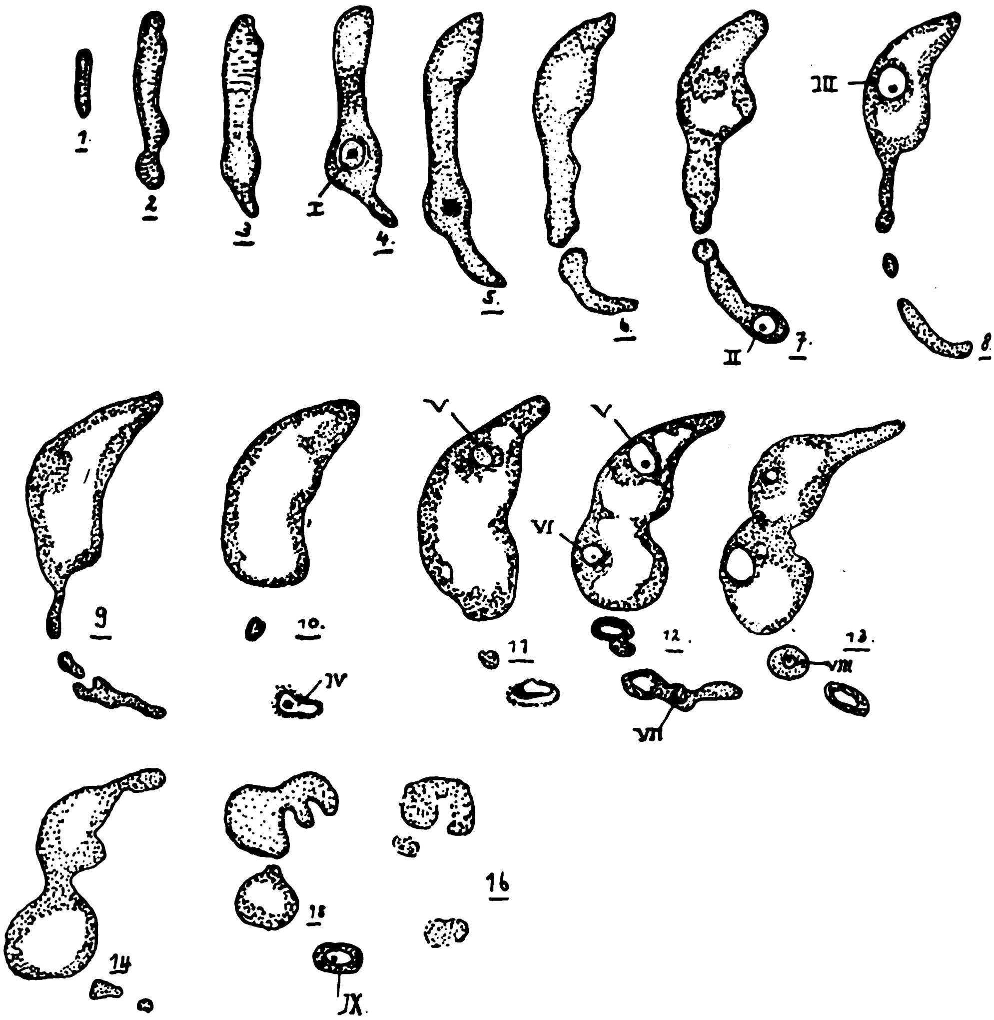


Fig. 4. Zestien coupes uit een reeks van tachtig (elk 10 μ dik).

plaats opzwellen kan en tot een eiblaasje kan worden. Vaak komen hierin dan meer dan één eicel voor. Nadat men in de serie de mergstreng heeft zien aanzwellen tot een eiblaasje, kan men waarnemen, dat zich in verdere coupes het beeld van de mergstreng weer herstelt. Dit is een aanwijzing, dat men niet te doen heeft met een mergstreng, die toevallig samenhangt met een eiblaasje, maar dat het eiblaasje een veranderd deel van de mergstreng is. In fig. 1*c* heeft men een mooi voorbeeld van een eiblaasje, dat niet anders is dan een gezwollen deel van een mergstreng, Het niet veranderde deel van deze streng is dan ook nog aan het eiblaasje te zien. Hoe-

wel minder duidelijk, vertoont ook het blaasje van fig. 3 nog zoo'n rest. Door deze waarnemingen ben ik ervan overtuigd, dat een groot aantal atypische eiblaasjes in het beschreven praeparaat ontstaan zijn, doordat in deelen van de mergstrengen een woekering van de epitheelcellen optreedt. Later vervloeien die cellen en ontstaat een blaasje. De epitheelcellen vormen dan nog een eiheuvel rondom de eicellen, die oorspronkelijk in het veranderde stuk van de mergstreng voorkwamen. Daar er echter ook groepen van eicellen voorkomen, zooals in fig. 2 afgebeeld, welke men wel moet opvatten als eiballen, is de mogelijkheid niet uitgesloten, dat niet alle atypische eiblaasjes uit de mergstrengen ontstaan, maar, dat er ook een aantal uit dergelijke eiballen ontstaan zijn.

Reeds deelde ik mede, dat bij embryonen en ook bij pasgeborenen in de mergstrengen eicellen zijn gevonden. De oorsprong der mergstrengen uit hetzelfde epitheel, waaruit de eiballen etc. ontstaan, verklaart dit verschijnsel voldoende [1]). Men vindt echter steeds opgegeven, dat die strengen later in primairfollikels uiteenvallen.

Schmaltz spreekt van de eicellen, die in de mergstrengen voorkomen, als van „verirrte" elementen en neemt aan, dat ze in reductie gaan. Bij hond, kat en andere dieren, waarbij de mergstrengen persisteeren, geeft Schmaltz dan ook niets op van het voorkomen van eicellen in die strengen of van hun vervorming tot eiblaasjes.

De boven beschreven wijze van eiblaasjes-vorming vond ik dan ook niet vermeld, ook niet in leerboeken der pathologische anatomie. Toch zijn waarschijnlijk door Schottlaender (1893 Archiv. f. mikr. Anat.) bij den mensch reeds dezelfde dingen gezien, die ik hier beschreef, maar ze zijn door hem anders verklaard. En er is maar één leerboek der histiologie (het helaas verouderde boek van Böhm en Davidoff), dat, volgens de voorstelling van Schottlaender, iets meer meedeelt van de atypische eiblaasjes dan de andere leerboeken, die ik raadpleegde.

Schottlaender onderscheidt„ Eiballenfollikel" en „Schlauchfollikel". De in fig. 2 en 3 afgebeelde follikels zou hij eibalfollikels en de in fig. 1*c* en fig. 4 afgebeelde „Schlauchfollikel" noemen. De eibalfollikels ontstaan volgens hem, doordat de eiballen door onvoldoende bindweefselontwikkeling niet in primairfollikels gescheiden zijn. De „Schlauchfollikels" zouden uit afgesnoerde buizen van Pflüger ontstaan (De „Pflüger'sche Schläuche laat Schottlaender door afplatting en uitrekking van eiballen gevormd worden). Ongetwijfeld heeft Schottlaender dus ook in menschelijke ovaria eiblaasjes gezien, die min

[1]) Niet verheeld kan worden, dat v. d. Broek (1895) de mergstrengen in verband brengt met den mesonephros en Giannelli (1905) ze uit het stroma ovarii laat ontstaan.

of meer veranderde strengen waren en waarschijnlijk wel hetzelfde verschijnsel als hierboven werd beschreven. In de atypische follikels van fig. 4 en 1*c* kan ik echter geen afgesnoerde buizen van PFLÜGER zien, eensdeels omdat deze bij den mensch niet zouden voorkomen (BÜHLER, KEIBEL en MALL) en anderzijds, omdat het onderzoek van de serie uitwijst, dat ze onderdeelen zijn van epitheelstrengen, die ieder zonder twijfel voor mergstrengen zal houden.

Ik zou nu, in navolging van SCHOTTLAENDER twee soorten van atypische eiblaasjes willen onderscheiden: n.l. „eibalfollikels" en „mergstrengfollikels". Waarschijnlijk ontstaan ze beiden door onvoldoenden aanleg en groei van het eierstokbindweefsel en wel de eerstgenoemden, doordat de normale oplossing van eiballen in primairfollikels is achterwege gebleven en de laatstgenoemden, doordat ook uit de mergstrengen geen primair-follikels ontstaan zijn. Is dit juist, dan hebben de twee genoemde soorten ook een verschillende phylogenetische beteekenis. De mergstrengfollikels ontstaan dan uit dat deel van het ovarium, dat men moet beschouwen als het rudiment van het mannelijke deel der oorspronkelijk hermaphroditische geslachtsklier. (Zie b.v. bij KEIBEL en MALL fig. 8 van het eerste deel). De eibalfollikels echter ontwikkelen zich uit het werkelijk vrouwelijke deel.

Hoewel nu de geslachtscellen in het rudimentaire mannelijk deel (de mergstrengen) geheel dezelfde veranderingen ondergaan als de eicellen en in werkelijke „eiblaasjes" komen te liggen, is het toch mogelijk, dat ze anders zijn, dan de in het vrouwelijk deel zich ontwikkelende geslachtscellen (hoewel dit natuurlijk aan de andere kant ook geheel niet noodzakelijk is). Men zou zich kunnen denken, dat ze nooit tot voor bevruchting geschikte eicellen worden en dat de blaasjes, welke dergelijke cellen bevatten, atretisch zullen worden.

Bij den hond, die, als heel gewoon verschijnsel, meer dan één eicel bevattende eiblaasjes bezit, is volgens SCHMALTZ in de grootere blaasjes in den regel maar één eicel te vinden en dus, zegt SCHMALTZ, schijnen de „mehreiïgen Follikel" grootendeels te gronde te gaan. Volgens BONNET (Lehrb. d. Entwicklungsgeschichte, 1918) worden bij multipare dieren bij de ovulatie wel eens twee of meer eicellen uitgestooten. BUMM (Grundrisz der Geburtshilfe, 12te Aufl. p. 292), vermeldende, dat STRASSMANN in een eierstok bijna in alle eiblaasjes twee eicellen vond en hij zelf in den eierstok van een vrouw, die tijdens de geboorte van een tweeling stierf, talrijke blaasjes met twee of drie eicellen, schrijft: „Da man bei Frauen, die nach Zwillingsgeburt starben, oft nur *ein* Corpus luteum nachweisen konnte, scheint die Entstehung der Zwillingsgravidität aus zwei Eiern *eines* Follikels nicht einmal ein besonders seltener Modus zu sein". Ook volgens

Keibel en Mall kunnen eiblaasjes met meer dan één eicel oorzaak worden van tweelingzwangerschap. Zoo is dus wel waarschijnlijk, dat een aantal eiblaasjes met meer dan één eicel tot rijpheid en ovulatie komen. Maar, vraag ik me af, zouden dat niet eibal-follikels zijn? En dit nog te meer op grond van de volgende overweging. In een eierstok van een zuigeling van vier maanden, waarvan ik een serie van doorsneden kon onderzoeken, vond ik talrijke vrij groote eiblaasjes en slechts sporen van mergstrengen. Bij het kalf vindt men maar zelden mergstrengen (Mac Leod), daarentegen vonden Heitz en Käppeli, dat juist bij het kalf kort na de geboorte en ook reeds korten tijd daarvoor, een groot aantal goed ontwikkelde eiblaasjes voorkomen. Dit bracht me op de gedachte of misschien deze, reeds bij de geboorte voorkomende, blaasjes niet uit de mergstrengen kunnen zijn ontstaan. Het bleek me later, dat die gedachte niet nieuw was. Reeds Schottlaender uit als zijn meening, dat de meeste eiblaasjes van zuigelingen eibal- of „Schlauch"-follikels zijn, d.w.z. follikels, die ik als eibal- en mergstreng-follikels beschreef.

Nu heb ik reeds vermeld, dat Kunge aanneemt, dat de genoemde eiblaasjes bij den mensch tot rijpheid zullen komen en dat ovulatie ook bij zuigelingen reeds optreedt. Daarentegen zagen Heitz en Käppeli nooit sporen van ovulatie in 200 ovaria van pasgeboren dieren, waarin ze echter heel veel groote eiblaasjes zagen.[1])

Het lijkt me dus verstandig voorloopig nog aan te nemen, dat de bij de geboorte voorkomende groote eiblaasjes niet tot ontwikkeling komen, maar te gronde gaan. Dan zouden dus volgens deze voorstelling de bij volwassenen nog voorkomende eiblaasjes met abnormaal aantal eicellen geen mergstrengfollikels, maar eibalfollikels moeten zijn. En deze zouden dan beteekenis hebben voor het ontstaan van meervoudige zwangerschap. Nu moet er echter ook nog op ewezen worden, dat door verschillende schrijvers gesproken wordt van een „Hauptei" en van „Nebeneier" d.w.z. in een meercellig eiblaasje zou maar één eicel zich goed ontwikkelen en de andere zouden in reductie gaan. Daar in de door mij waargenomen atypische eiblaasjes vaak rudimentaire eicellen voorkwamen, kan de mogelijkheid niet uitgesloten worden, dat werkelijk door reductie van een aantal eicellen uit de atypische eiblaasjes tenslotte nog normale ontstaan.

[1]) In het (aan een serie van doorsneden onderzochte) ovarium van een jonge bruinvisch (Phocaena communis) vond ik niets dan primairfollikels. Duidelijke mergstrengen ontbraken en ook secundair-follikels zag ik niet. Het is de vraag of 1°. hier misschien zwak ontwikkelde mergstrengen voorkomen, die niet aanleiding geven tot het ontstaan van eiblaasjes kort vóór of na de geboorte of 2°. de bij de geboorte gevormde eiblaasjes alle reeds in reductie zijn gegaan. Sporen van die reductie vond ik niet.

Over de interessante vraag of in de mergstrengen nog nieuwvorming van eicellen plaats vindt, kan ik kort zijn. Ik vond niets, dat hierop zou wijzen. Wel kan ik terloops nog vermelden, dat ik in het onderzochte ovarium van vier maanden, dat geen enkele pathologische afwijking vertoonde, primordiaaleieren in het kiemepitheel vond, en tevens woekeringen van dit epitheel, waarin primordiaaleieren voorkomen. Dit is een steun te meer voor de opvatting van WALDEYER e. a., dat de vorming van primairfollikels nog na de geboorte voortgaat; een opvatting, die volgens anderen (b.v. CUNNINGHAM-ROBINSON) berust op waarnemingen bij pathologische gevallen.

SAMENVATTING.

1. In een waarschijnlijk volwassen menschelijk ovarium werden aangetroffen: *a.* kiemepitheelinstulpingen, die geen eicellen bevatten (de naam Keimschläuche is minder verkieselijk), *b.* mergstrengen, die wel eicellen bevatten en op sommige plaatsen tot eiblaasjes aanzwellen, *c.* talrijke eiblaasjes met meer dan één eicel.

2. De atypische eiblaasjes zijn van tweeërlei aard. Er zijn nl. eibal- en mergstreng-follikels.

3. Bij de normale ontwikkeling van het ovarium vallen door bindweefseldoorgroeiing de eiballen en mergstrengen in primairfollikels uiteen kort vóór of spoedig na de geboorte. In het beschreven praeparaat was de bindweefsel-ontwikkeling blijkbaar onvoldoende.

4. De mogelijkheid bestaat, dat de bij oude foeten en zuigelingen voorkomende groote eiblaasjes uit de mergstrengen ontstaan. Dit kan geschieden, doordat grootere stukken van de mergstrengen worden tot eiblaasjes, maar ook kunnen die blaasjes uit de primairfollikels ontstaan, waarin de mergstrengen zich normaliter oplossen.

Het is de vraag, met het oog op de genese (mergstreng-homologon van zaadbuisje) en op hetgeen bij dieren bekend is, of de opvatting van RUNGE, dat deze blaasjes voor bevruchting geschikte eicellen bevatten, juist is. De vorming van eiblaasjes uit de mergstrengen bij het beschreven praeparaat, wijst op een ontwikkelingsstoornis (optreden bij een volwassene van een normaliter op zeer jeugdigen leeftijd afloopend proces).

5. Uit atypische eiblaasjes kunnen zich normale vormen door reductie van alle eicellen (Nebeneier) op één na (Hauptei).

6. Het is niet uit te maken of het de eibal- of de mergstrengfollikels of beide zijn, die aanleiding kunnen geven tot het ontstaan van meervoudige zwangerschap. Men zou daartoe moeten weten of de mergstrengfollikels al dan niet tot rijpheid komen.

Amsterdam. *Histiologisch Laboratorium.*

Natuurkunde. — De heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. KRAMERS: *Over de toepassing van* EINSTEIN'S *gravitatietheorie op een stationair zwaarteveld.*

Scheikunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt eene mededeeling aan van de Heeren A. SMITS en G. J. DE GRUYTER: „*Over het electromotorisch gedrag van Aluminium*". II.

Scheikunde. — De Heeren ERNST COHEN en A. L. TH. MOESVELD bieden een mededeeling aan over: „*Het bepalen der ware specifieke warmte van zouten langs elektrischen, adiabatischen weg*".

Wiskunde. — De Heer L. E. J. BROUWER biedt een mededeeling aan: „*Ueber eineindeutige stetige Transformationen von Flächen in sich*". (Siebente Mitteilung).

Kryo-Biologie. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer P. GILBERT RAHM te Maria Laach, over: „*Einwirkung sehr niederer Temperaturen auf die Moosfauna*". (Versuche im kryogenen Institut der Reichs-Universität Leiden).

Analyse mathématique. — De Heer ARNAUD DENJOY biedt een mededeeling aan: „*Sur une propriété de séries trigonométriques.*"

(Deze mededeelingen worden in een volgend Zittingsverslag opgenomen).

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer C. WINKLER, namens den Heer G. P. FRETS, aangeboden het manuscript van diens verhandeling, getiteld: „*The heredity of headform in man*".

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren C. WINKLER en J. W. VAN WIJHE met verzoek om rapport, uit te brengen in de September-vergadering.

Voor de boekerij biedt de Heer W. EINTHOVEN ten geschenke aan een exemplaar van de dissertatie van den Heer W. C. A. ARBEITER, getiteld: „*Mechanische en electrische verschijnselen in het kikvorschhart bij calcium-onttrekking*".

De vergadering wordt gesloten.

---

24 September 1920.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 25 SEPTEMBER 1920.

DEEL XXIX.

N°. 3.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het proces-verbaal der vorige vergadering wordt goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van den Heer EUG. DUBOIS dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Brieven van de Heeren PH. VAN HARREVELD te Pasoeroean, P. C. FLU te Weltevreden en J. KUYPER te Pasoeroean, waarin zij, met dankzegging voor de onderscheiding, verklaren de benoeming tot correspondent der Afdeeling gaarne aan te nemen.

Aangenomen voor kennisgeving.

3°. Gedrukte circulaire van den Raad van Beheer van de „*Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore*" te Luik, kennis gevende van een in 1921 te houden wedstrijd, waarvan de voorwaarden tot deelneming bij de circulaire worden overgelegd.

Ter visie gelegd voor de leden der Afdeeling.

4°. Kennisgeving dat in Augustus j. l., tijdens zijn verblijf in Nederland, is overleden de correspondent der afdeeling, de Heer P. VAN LEERSUM.

Naar aanleiding hiervan wijdt de Voorzitter een woord van eerbiedige hulde aan de nagedachtenis van den overledene, die van 1909 af correspondent der Afdeeling is geweest.

Tevens deelt hij mede dat wijlen de Heer VAN LEERSUM de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, onder zekere beperkende bepalingen, bij testament heeft aangewezen tot zijne erfgename, eene beschikking, die zeker door alle leden der Akademie op prijs gesteld zal worden. Volgens de bedoeling van den testateur zal uit de door hem aan de Akademie nagelaten middelen een fonds

gevormd moeten worden, waaruit bestreden kunnen worden de kosten voor pharmaceutische onderzoekingen en voor onderzoekingen over de ziekten van den menschelijken schedel.

Vervolgens richt de Voorzitter het woord tot den Heer L. BOLK, hem welkom heetend namens de vergadering en zijn vreugde er over te kennen gevend dat de Heer BOLK, na zijn ernstige ziekte, weêr hersteld in haar midden kan zijn.

Ook wordt door den Voorzitter verwelkomd de correspondent der Afdeeling, de Heer W. VAN BEMMELEN, die, tijdelijk in Nederland teruggekeerd, thans de vergadering bijwoont.

Daarna deelt de Voorzitter nog mede dat het lid der Afdeeling, de Heer G. VAN RIJNBERK, bereid werd bevonden om als gedelegeerde der Akademie de Conferentie bij te wonen, welke den 28en September a.s. en volgende dagen in het gebouw der „*Royal Society*" te Londen zal gehouden worden ter bespreking van de vraag of en op welke wijze, onder de auspicieen van dat Genootschap en met steun en medewerking der Regeeringen van de aangesloten natiën, de uitgave van den „*International Catalogue of scientific literature*" zal worden voortgezet.

Sterrekunde. De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN brengt, mede namens de Heeren J. C. KAPTEIJN en J. P. VAN DER STOK het volgende advies uit:

Voor eenigen tijd ontving de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Kon. Akademie van Wetenschappen eene mededeeling uit Ned.-Indië, inhoudende dat er plannen bestaan daar een goed ingerichte sterrewacht op te richten, met het verzoek aan de Afdeeling haar steun in deze aangelegenheid te verleenen.

Zeer gaarne voldoet de Afd. aan dat verzoek, daar zij de stichting van eene sterrewacht in Ned.-Indië als van groot wetenschappelijk belang beschouwt.

Zoo men de wetten wil leeren kennen, die in de hemelruimte heerschen, is een eerste vereischte dat niet slechts een deel maar de geheele sterrewereld zoo volledig mogelijk wordt waargenomen. In het Noordelijk halfrond, ook in ons land, bestaan verschillende sterrewachten, die uitnemend werk leveren, maar, zooals bekend is, wordt daar slechts een deel van den sterrehemel gezien, en blijft een groot deel volkomen onbekend. Om die gebrekkige kennis aan te vullen, heeft men reeds voor vele jaren sterrekundige expedities uitgezonden naar Zuid-Afrika ter waarneming van de sterren in den zuidelijken hemel, en in latere jaren hebben zich voor dat zelfde doel sterrekundigen uit Noord-Amerika tijdelijk in Zuid-Amerika gevestigd.

Thans zijn er echter in het Zuidelijk halfrond ook enkele vaste observatoria opgericht, en wel te Kaapstad, te Cordoba in de Argentijnsche republiek en in Australië, doch van deze is alleen dat te Kaapstad vrij volledig met instrumenten en personeel voor de waarneming der sterren in den zuidelijken hemel voorzien.

Eene vergelijking van dezen toestand met dien in het Noordelijk halfrond, waar men zeker wel een honderdtal sterrewachten telt, doet zien hoe zeer onze kennis van den zuidelijken hemel ten achter moet staan, en hoe dringend voorziening hierin noodig is.

Het is zeer wenschelijk dat Nederlandsch-Indië, dat op zijn uitgebreid gebied geen enkele sterrewacht telt, dien ongunstigen toestand helpt verbeteren, te meer wijl thans door particulieren op de lofwaardigste wijze toezeggingen zijn gedaan van belangrijke bij-

dragen, zoowel van een uitgebreid zeer gunstig gelegen terrein, als van groote instrumenten en geld.

Op het gebied van plantkunde, aardkunde, meteorologie en technische wetenschappen zijn in Indië hoogst belangrijke inrichtingen tot stand gebracht, de Akademie erkent dit met grooten dank, en zij verwacht dan ook dat op sterrekundig gebied Insulinde den goeden naam, dien het zich op die andere terreinen heeft verworven, zal hoog houden.

Te meer is de stichting van eene sterrewacht in Indië wenschelijk, omdat door hare ligging zeer nabij den equator bizondere voordeelen bereikt kunnen worden voor een onderzoek naar de fouten in het fundamenteele declinatiestelsel der vaste sterren en tevens, door gemeenschappelijke, elkander aanvullende sterrekundige onderzoekingen in Indië en in Nederland, resultaten kunnen worden verkregen die voor den geheelen hemel geldigheid bezitten.

Voor die stichting roept de Akademie met vol vertrouwen den krachtigen en onmisbaren steun en de medewerking van de Regeering in, in het geval deze van bevoegde personen de hierop betrekkelijke aanbiedingen zal hebben ontvangen, en zij verklaart zich gaarne bereid hare hulp te verleenen waar die in deze zaak mocht worden verlangd.

(get.) J. C. Kapteyn.
„ J. P. van der Stok.
„ H. G. v. d. Sande Bakhuyzen.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan dit advies, dat als advies der Afdeeling zal worden kenbaar gemaakt aan den Minister van Koloniën.

Scheikunde. — De Heer J. BÖESEKEN doet, mede namens den Heer J. COOPS, een mededeeling over: *„De configuratie der wijnsteenzuren"*.

Sedert 1874, het jaar toen de klassieke brochure van VAN 'T HOFF te Rotterdam het licht zag, is de configuratie der wijnsteenzuren in hoofdzaak opgelost.

Wij weten met zekerheid, dat de groepen H, OH en COOH zoodanig aan elk der centrale koolstofatomen van het links- en het rechtsdraaiend zuur gebonden zijn, dat hun molekulen asymmetrisch van bouw zijn, terwijl de ligging dier groepen in het antiwijnsteenzuur aanleiding geeft tot een symmetrisch molekuul.

Overigens is van de oriënteering der groepen ten opzichte van elkander niets bekend; men kan echter de stelling opperen, dat, tengevolge van de draaibaarheid om de enkelvoudige bindingen de groepen onder bepaalde omstandigheden een evenwichtsstand zullen innemen, die dan de meest waarschijnlijke is en die beheerscht zal worden door de afstootende en aantrekkende werkingen, welke de verschillende onderdeelen van de molekulen onder die omstandigheden op elkander uitoefenen.

Nu weten wij van deze wisselwerkingen niets met zekerheid. Men kan steunende op de electronen-theorie vermoeden, dat gelijke groepen elkander zullen afstooten, maar men gaat zekerder, wanneer men, onafhankelijk van deze hypothese, den stand der groepen ten opzichte van elkander kan vaststellen.

Pogingen om tot een bevredigende oplossing van de configuratie te komen zijn tot nog toe bijna uitsluitend bij de cis-trans-isomeren met eenig succes bekroond. In deze molekulen worden de groepen tengevolge van een zekere mate van onwrikbaarheid in bepaalde standen vastgehouden, zoodat men, door de verschillende physische en chemische eigenschappen in aanmerking te nemen, somtijds de configuratie der isomeren heeft kunnen vaststellen.

CHR. VAN LOON en een onzer [1]) hebben er echter onlangs op gewezen hoe beperkt onze kennis ook bij deze stoffen nog is.

Alleen van het maleïnezuur en fumaarzuur en hunne analogen [2]) kunnen wij zeggen, dat de stand der groepen bekend is.

---

[1]) Versl. Kon. Ak. v. Wet. **27** 5 (Mei 1918).

[2]) En wellicht van eenige syn- en anti-oximmen.

Aangezien de maleïnoide zuren onstabiel zijn tegenover de fumaroide, ten minste bij gewone temperatuur, mogen wij daaruit afleiden, dat de carboxylgroepen, die aan aangrenzende koolstofatomen gebonden zijn, elkander afstooten.

Naast deze zuren is van enkele cyclische di-carbonzuren de configuratie der cis- en transisomeren met eenige waarschijnlijkheid vastgesteld en ook daarbij bleek, dat de cis-isomeren labiel waren tegenover de trans-isomeren.

Door een onzer is in de laatste jaren een methode uitgewerkt met welke wij niet alleen van onverzadigde en cyclische verbindingen maar ook van stoffen met open keten iets naders te weten komen over de oriënteering van de groepen ten opzichte van elkander.

Uit het onderzoek van den invloed van het geleidingsvermogen van een aantal poly-hydroxy-verbindingen op dat van het boorzuur is gebleken, dat, wanneer de hydroxylgroepen zich in elkanders nabijheid bevinden er complexe glycol-boorzuren ontstaan met een hoogeren zuurgraad dan de som der componenten zoude bedragen.

Door toepassing dezer methode op een aantal verzadigde α-glycolen bleek, dat deze de aciditeit van het boorzuur *niet* verhoogden. Hunne hydroxyl-groepen kunnen derhalve niet gunstig voor de vorming van complexen gelegen zijn, waaruit men het besluit kan trekken, dat ook de hydroxylgroepen elkander afstooten.

Door deze methode aan te wenden op de wijnsteenzuren en hunne afgeleiden zijn wij er in geslaagd, de ligging der verschillende groepen ten opzichte van elkander nader vast te stellen, welke ligging in overeenstemming werd bevonden met de eigenschappen dezer verbindingen.

I. *De invloed van het boorzuur op het geleidingsvermogen der wijnsteenzuren.*

Er zij eerst aan herinnerd, dat de α-hydroxyzuren een zeer sterke verhooging van hun geleidingsvermogen ondervinden, het was dus te verwachten, dat dit ook het geval zou zijn met de wijnsteenzuren. Inderdaad is deze invloed hier zeer sterk en — wat met het oog op het probleem der onderlinge oriënteering belangrijk is — deze is bij de actieve zuren aanzienlijker dan bij het inactieve (zie overzicht volg. pag.).

Aangezien de oxyzuur-helften in het antiwijnsteenzuur en in de actieve zuren volkomen gelijk zijn en het boorzuur hierop zijn invloed laat gelden, kan het verschil niet verklaard worden uit een

verschil in werking van het boorzuur op de alkoholische hydroxylgroepen, maar moet de verklaring gelegen zijn in een verschil van oriënteering van de zure gedeelten ten opzichte van elkander.

V.	*d*-Wijnsteenzuur.	*l*-Wijnsteenzuur.	Druivenzuur.	Anti-Wijnsteenzuur.
1	55280	—	55340	53950
16	4158	4121	4170	3746
32	2048	2022	2033	1780
64	1054	1023	1033	860
128	548	538	548	448
256	302	301	302	248

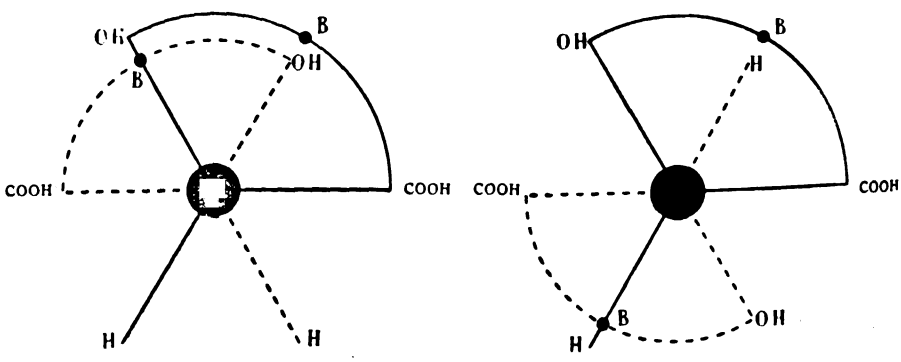
De verschillen tusschen *l*-, *d*-Wijnsteenzuur en druivenzuur zijn gering, zij kunnen aan waarnemingsfouten worden toegeschreven.

Het is bekend, dat een accumulatie van zure groepen steeds een verhooging van den zuurgraad bewerkt.

Uit onze metingen, in verband met het boven opgemerkte, kan besloten worden, dat in de actieve wijnsteenzuur-boorzuur-complexen een sterkere accumulatie dezer groepen aanwezig is dan in het antiwijnsteenzuur-boorzuur-complex.

Neemt men nu aan, dat in de wijnsteenzuren de carboxyl-groepen elkander afstooten, en dat deze afstootende werking grooter is dan van de hydroxylgroepen onderling, dan krijgt men onderstaand beeld dezer complexen (Projecties loodrecht op de as der centrale koolstof atomen).

Actief wijnsteenzuur-boorzuur. Inactief wijnsteenzuur-boorzuur.



Het is daaruit zeer duidelijk te zien, dat in de actieve complexen een grootere eenzijdige accumulatie der zure groepen is, dan in het inactieve complex.

Uit het resultaat onzer metingen mag men besluiten, dat deze meerdere accumulatie inderdaad bestaat en dat men derhalve mag aannemen, dat de onderlinge afstooting der carboxylgroepen in de wijnsteenzuren sterker is dan die der hydroxylgroepen.

II. *De invloed van het boorzuur op het geleidingsvermogen van de esters en van de amiden der wijnsteenzuren.*

Bij de esters en amiden hebben wij met andere omstandigheden te doen. Hier is door het vastleggen der zure hydroxylgroepen hun invloed op het geleidingsvermogen van het boorzuur opgeheven, (wij hebben daarom ook de appelzure aethylester en het malamide onderzocht) en kan een positieve werking alleen veroorzaakt worden door een gunstigen stand der beide alkoholische hydroxylgroepen ten opzichte van elkander.

Hoe is deze te verwachten?

Wanneer aangenomen wordt, dat de gesubstitueerde carboxylgroepen elkander afstooten en dit wederom krachtiger doen dan de OH-groepen, dan zullen de alkoholische hydroxylgroepen in de actieve wijnsteenzure esters en amiden wel niet zeer gunstig gelegen zijn, maar toch gunstiger dan in de esters en amiden van het antiwijnsteenzuur (zie figuur 1, waarbij de boorzuur-bogen weggedacht worden en de COOH-groepen worden vervangen door COOR, resp. $CONH_2$ enz.).

Het resultaat onzer metingen is nu als volgt:

Stof.	V.	Δ	Stof.	V.	Δ
d-Wijnst.zure methylesters	5	+ 10.0	Anti-wijnst.zure methylester	5	— 1.8
d „ aethylester	5	+ 8.7	„ aethylester	5	— 5.9
d-tartramide	5	+ 108	*d*-Anti-tartramide	5	+ 37.9
d-aethyltartramide	5	+ 93.8	*d*-aethyl-anti „	5	+ 54.4

d-appelzure aethylester en het malamide verlaagden de geleidbaarheid van het boorzuur.

Uit bovenstaand overzicht blijkt, dat wij bij de esters van het actieve zuur een geringen positieven invloed hebben waargenomen tegen een negatieven bij die van het antiwijnsteenzuur. Bij de amiden werd voor beide soorten van verbindingen een vermeerdering

geconstateerd, deze was voor het actieve zuur belangrijk hooger dan voor het inactieve.

(Over den positieven invloed der antiamiden zie volg. mededeeling.)

Wij kunnen uit deze metingen besluiten, dat ook de gesubstitueerde carboxylgroepen elkander afstooten en dit krachtiger doen dan de hydroxylgroepen.

De op deze wijze gevonden oriënteering der groepen stelt ons in staat om enkele eigenschappen der wijnsteenzuren te verklaren.

1. *De actieve zuren zijn sterker dan het inactieve.*

$$K_{\text{druivenzuur, } l\text{- en } d\text{-wijnsteenzuur}} = 10.2 \times 10^{-4}$$
$$K_{\text{antiwijnsteenzuur}} \ldots\ldots = 6.8 \times 10^{-4}$$

Aangezien de α-hydroxylgroep acidificeerend werkt, en, volgens onze opvatting in de actieve zuren een sterkere opeenhooping van zure groepen is dan in het inactieve wijnsteenzuur en deze accumulatie steeds een verhooging van den zuurgraad bewerkt, moeten het druivenzuur en zijn optische componenten sterker gedissocieerd zijn dan het antiwijnsteenzuur.

2. *Van de wijnsteenzuren zijn geen normale anhydriden bekend.*

Men kent wel verbindingen, die minder water bevatten dan deze zuren en die in waterige oplossingen langzaam in de zuren overgaan; deze slecht gedefinieerde stoffen hebben echter het karakter van laktonen.

Bij beschouwing der projectie-figuren ziet men, dat de COOH-groepen gunstiger liggen tegenover de alkoholische hydroxylgroepen van het andere centrale koolstofatoom, dan tegenover de andere carboxylgroep, zoodat het voor de hand ligt, dat een water afsplitsing onder vorming van een lakton dan gemakkelijker in kan treden.

Zoodra men de alkoholische waterstofatomen vervangt door zure groepen of alkylen vormen zich wederom de normale anhydriden. Bij de acylwijnsteenzuren heeft deze anhydride-vorming zelfs zeer gemakkelijk plaats.

3. *De dissociatie-constanten van de wijnsteenzuren zijn in overeenstemming met de fumaroide configuratie.*

Hierbij kunnen wij de wijnsteenzuren alleen vergelijken met zuren waarvan ons de oriënteering der groepen geheel bekend is, dit zijn fumaarzuur ($K = 9 \times 10^{-4}$) maleïnezuur ($K = 1.2 \times 10^{-2}$) en met minder zekerheid dioxymaleïnezuur ($K > 1 \times 10^{-1}$).

Beschouwen wij den invloed van de α-hydroxygroep op de vetzuren dan blijkt deze de constante tot het 10 voudige te verhoogen een $\alpha\beta$ dubbele binding slechts gemiddeld tot het viervoudige.

Nemen wij de maleïnoide configuratie voor het wijnsteenzuur aan, dan zouden wij uit het maleïnezuur een constante $= 1.2 \times \frac{10}{4} \times 10^{-2}$ $= 3 \times 10^{-2}$,

uit het dioxymaleïnezuur een van $> 2.5 \times 10^{-2}$ berekenen [1]).

Nemen wij de fumaroide configuratie, dan berekenen wij uit het fumaarzuur $9 \times \frac{10}{4} \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-4}$.

Hoewel deze berekeningswijze zeer onzeker is, mogen wij er toch wel uit besluiten, dat het resultaat meer voor een fumaroide configuratie dan voor een maleïnoide pleit.

Nu de afstootende werking der carboxylgroepen in de wijnsteenzuren wel bewezen geacht kan worden en deze sterker moet zijn dan de OH-groepen, ligt het voor de hand om de fumaroide oriënteering ook voor het barnsteenzuur aan te nemen. Hier ontbreekt ons een doeltreffend middel om dit nader te bewijzen zooals bij de wijnsteenzuren. Toch zijn er enkele aanwijzingen, dat het barnsteenzuur inderdaad fumaroide is.

Bruni en Gorni [2]) hebben reeds ruim twintig jaar geleden gevonden, dat fumaarzure-dimethylester een zeer abnormale veel te kleine vriespuntsdaling van de barnsteenzure-dimethylester veroorzaakte, daarentegen was het mol. gew. van de maleïnezure-dimethylester daarin normaal.

Hieruit blijkt, dat de fumaarzure en barnsteenzure esters zich gedroegen als verbindingen, zooals naphtaline en di-hydronaphtaline die ook in krystalstructuur een groote vormgemeenschap vertoonden.

Het besluit waartoe zij kwamen, dat dan aan de barnsteenzure dimethylester de fumaroide configuratie moet worden toegeschreven, is nu door onze onderzoekingen over de wijnsteenzuren bevestigd.

2. De dissociatie-constante van het barnsteenzuur is eveneens in overeenstemming met een fumaroide configuratie. Vergelijken wij nl. een aantal verzadigde en $\alpha\beta$-onverzadigde zuren met elkander, dan blijkt, dat deze laatste gemiddeld viermaal sterker zijn.

Uit het maleïnezuur berekenen wij $k = {}^1/_4 \times 1.2 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-3}$, terwijl uit het fumarzuur $k = {}^1/_4 . 9 \times 10^{-4} = 2.25 \times 10^{-4}$.

[1]) Recueil **37**, 174 (1918).

[2]) Atti R. Ac dei Lincei [5] **8**, 454—63 (1899).

Daar voor het barnsteenzuur gevonden is 6.5×10^{-5} zien wij, dat het zeker geen maleïnoide configuratie kan hebben.

3. Er zijn tal van onderzoekingen gedaan over de ringspanning, waarbij men o. a. door bepaling van de hydratatie snelheid van cyclische zuuranhydriden gegevens voor die spanning heeft verzameld.

Tengevolge van hetgeen gevonden is over de onderlinge afstooting van gelijke groepen is er reden om aan te nemen, dat door deze neiging een gemakkelijker opening van zoodanige ringen is te verwachten. Bij de beoordeeling van de uitkomsten is derhalve met deze afstootende werking rekening te houden.

Terwijl wij op de eigenaardigheid van de inactieve amiden nader terug komen, kunnen wij nu wel zeggen, dat deze onderzoeking een bevestiging heeft gegeven van een vrij algemeen aanvaarden regel, maar waaraan bijna alle experimenteele ondergrond ontbrak, dat nl. de carboxylgroepen, aan aangrenzende koolstofatomen gebonden, elkander afstooten.

Daar wij door de boorzuur-methode geconstateerd hebben, dat ook de OH-groepen, wanneer zij analoog gebonden zijn, elkander afstooten, mogen wij beginnen te spreken van een wet.

Hier in het wijnsteenzuur en zijn esters waar zoowel COOH- als OH-groepen voorkomen, bleek daarenboven dat de afstooting der carboxylgroepen van meer beteekenis moet zijn dan van de OH-groepen.

De oorzaak van deze onderlinge afstooting verdient nu nadere overweging.

Men kan aan de bindingen tusschen de atomen het beeld geven van wentelende electriciteits-hoeveelheden. Hebben wij nu met volkomen gelijke groepen te maken aan aangrenzende atomen, dan ligt het voor de hand, dat aantal, snelheid en richting dezer electronen gelijk zullen zijn en dat deze groepen zich dus van elkander zullen verwijderen. Is nu de electronen-dichtheid van een paar gelijke groepen grooter dan van een paar andere, dan zullen de eerste elkander krachtiger afstooten dan de andere.

Deze voorstelling, hoe vaag zij ook zij, voldoet voorloopig voor de wijnsteenzuren en hare esters. Zij voert echter tot de consequentie, dat ook *verschillende* groepen elkander zullen afstooten.

Het schijnbaar vreemde gedrag van de amiden van het antiwijnsteenzuur, dat zij nl. een positieven invloed uitoefenen op het boorzuur kan nu uit deze veel algemeenere opvatting van de onderlinge werking der groepen worden verklaard.

Wij komen daar in een volgende mededeeling op terug.

Delft—Rotterdam, September 1920.

Physiologie. — De Heer R. MAGNUS doet, mede namens den Heer A. DE KLEYN, eene mededeeling over: „*De functie der Otolithen*".

In den loop der laatste vijftig jaren is eene bijna onafzienbare literatuur verschenen over de functie van het vestibulairapparaat. Anatomische gegevens maakten het direct waarschijnlijk, dat eene scherpe scheiding moest gemaakt worden tusschen het zintuigepitheel, dat zich in de zoogenaamde cristae der booggangen bevindend, bedekt wordt door de zoogenaamde cupula, welke zich vrij in de endolymphe bewegen kan en het zintuigepitheel der maculae van sacculus en utriculus welk, bedekt door de specifiek zwaardere otolithen, speciaal geschikt scheen te reageeren op den meer of minderen druk dezer otolithen.

Terwijl nu onze kennis omtrent de functie der booggangen vrij uitgebreid is en hierbij eene goede overeenstemming bestaat tusschen de anatomische gegevens eener- en de klinische en experimenteele gegevens anderzijds, is dit, wat betreft de kennis en de opvattingen omtrent de functie der otolithen nog geenszins het geval.

Hiervoor bestaan verschillende oorzaken. Indien zooals vooral door MACH en BREUER verondersteld werd, de functie der otolithen bepaald wordt door den meer of minderen druk op het onderliggend zintuigepitheel, dan is te verwachten, dat de otolithen eene rol zullen spelen bij die reflexen, welke optreden bij verandering van den stand van den kop in de ruimte en zullen zij ook zoolang hunne werking moeten voortzetten als deze stand niet verandert en de druk der otolithen constant blijft. Of met andere woorden: bij de otolithenreflexen zullen we speciaal met t o n i s c h e reflexen te doen moeten hebben. Tot voor enkele jaren waren nu tonische labyrinthreflexen alleen bekend in den vorm van compensatorische oogstanden en moest dan ook de functie der otolithen uitsluitend aan deze reflexen bestudeerd worden. Waar echter zelfs de kennis dezer compensatorische oogstanden nog onvolledig was en uitgebreidere quantitatieve onderzoekingen ontbraken, ligt het voor de hand, dat men in de literatuur alleen meer of mindere speculatieve beschouwingen kan aantreffen. Ook de kliniek heeft hier remmend ingewerkt. Terwijl klinisch de verschillende vestibulaire reacties op beweging steeds nauwkeuriger onderzocht werden en eene steeds grootere rol gingen spelen bij de

diagnostiek der labyrinthaire oorziekten, werd ook physiologisch de aandacht bijna uitsluitend op deze soort van labyrinthreflexen geconcentreerd. Eene poging van Bárány om ook de compensatorische oogstanden bij het klinisch onderzoek te betrekken, vond geen navolging.

Behalve door *druk* zou men zich ook nog kunnen voorstellen, dat de otolithen op *beweging* zouden kunnen reageeren, indien hierdoor de specifiek zwaardere otolithen door hunne meerdere traagheid kleinere verplaatsingen ten opzichte van het onderliggend zintuigepitheel ondergaan. Op zuiver theoretische overwegingen meenden Mach en Breuer, dat dit bij de labyrinthaire reacties op progressiebewegingen het geval zou zijn. Experimenteele gegevens ontbraken hier geheel, maar daar het physisch onmogelijk scheen, dat hierbij de booggangen eene rol zouden spelen, moesten hiervoor wel de otolithen verantwoordelijk worden gesteld. Zooals echter hieronder nader zal blijken, berust de meening van Mach en Breuer, dat de booggangen hierbij uit physische gronden geene rol kunnen spelen op eene vergissing, terwijl andere experimenteele gronden zullen worden medegedeeld voor de opvatting, dat bij de reacties op progressie-bewegingen juist de booggangen de hoofdrol vervullen.

Toen nu in het laatste tiental jaren in het pharmacologisch Instituut te Utrecht verschillende andere, nog niet bekende tonische labyrinthreflexen gevonden werden, lag het voor de hand deze nieuwe experimenteele gegevens te benutten om de functie der otolithen nader te leeren kennen. Hierbij is de volgende weg ingeslagen: Indien de tonische labyrinthreflexen berusten op den meer of minderen druk der otolithen op het onderliggend zintuigepitheel, dan is te verwachten, dat deze reflexen hun maximum of minimum zullen hebben, op het moment, dat deze druk maximaal of minimaal is. Of de reflexen het sterkst zullen zijn bij den grootsten druk of juist bij den geringsten, is a priori niet te zeggen. Dit zal hiervan afhangen of het zintuigepitheel het sterkst geprikkeld wordt door drukken of trekken van de otolithen; ook zou het mogelijk zijn, dat druk der otolithen tot een bepaalden reflex aanleiding geeft, terwijl het trekken eveneens een, zij het ook anderen reflex opwekt.

Om nu tot zooveel mogelijk onbevooroordeelde conclusies te komen, werden eerst alle tonische labyrinthreflexen zoo nauwkeurig mogelijk quantitatief onderzocht, en werd met name nauwkeurig bepaald bij welken stand van den kop in de ruimte het maximum en bij welken stand het minimum dezer reflexen werd gevonden.

De onderzochte tonische reflexen waren de nieuw gevonden tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren en de zoogenaamde

labyrinthaire „Stellreflexe", terwijl tevens de reeds lang bekende compensatorische oogstanden nauwkeurig quantitatief op hun maxima en minima werden onderzocht. Dit onderzoek werd bij verschillende dieren verricht; de compensatorische oogstanden alleen bij konijnen en caviae, daar deze bij dieren met levendige willekeurige oogbewegingen als honden en katten voor een quantitatief onderzoek minder geschikt zijn. Dank zij de hulp van het Anatomisch Instituut, waar de Heeren DE BURLET en KOSTER volgens verschillende methoden den stand der otolithen bij het konijn nauwkeurig bepaalden en een model vervaardigden door hetwelk bij elken stand van den kop in de ruimte direct de bijbehoorende stand der otolithen te zien is, kon nu worden nagegaan of bij de experimenteel gevonden maxima en minima der tonische labyrinthreflexen ook een typische stand der otolithen werd aangetroffen. Dit bleek werkelijk het geval te zijn, zooals nader uit deze mededeeling zal blijken.

Ten slotte was het nog gewenscht de vraag te beantwoorden of de veronderstelling, dat de tonische labyrinthreflexen otolithenreflexen zijn, wel juist is, waarbij tevens onderzocht moest worden of dit ook het geval is met de reacties op progressiebewegingen, voor welke dit naar de theorie van MACH en BREUER vrij algemeen wordt aangenomen. Hiervoor was noodig eene methode toe te passen, waarbij de otolithen op een of andere wijze worden uitgeschakeld, terwijl de booggangen intact blijven. Daarna moeten dus de booggangsreflexen aan-, de otolithenreflexen afwezig zijn. Ook deze controle kwam, zooals nader blijken zal, de veronderstelde functie der otolithen bevestigen.

Het resultaat van de bovenbeschreven onderzoekingen was nu, in het kort samengevat, het volgende:

A. STAND DER OTOLITHEN BIJ DE VERSCHILLENDE TONISCHE LABYRINTHREFLEXEN BIJ HET KONIJN.

1. *Tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren.* (*Extremiteiten en hals*).

a. Op de extremiteiten.

Wanneer men den tonus der spieren van de extremiteiten onderzoekt bij verschillenden stand van den kop in de ruimte, dan blijkt, dat de strektonus maximaal is, wanneer men den kop in symmetrische rugligging houdt en tevens 0°—45° met de snuit naar boven (individueele verschillen). De stand van den kop, waarbij de strektonus minimaal is, verschilt hiervan 180°.

Brengt men nu het model van den konijnenschedel met zijne

otolithen in deze zelfde standen, dan blijkt, dat bij het bovengenoemde maximum en minimum de utriculusotolithen ook een zeer typischen stand innemen (ook de anatomisch gevonden individueele variaties komen met de experimenteel gevonden verschillen overeen); met de sacculusotolithen is dit niet het geval.

Bij den stand, waarbij de strektonus maximaal is, staan de utriculusotolithen horizontaal en hangen aan, bij den stand, waarbij de strektonus minimaal is, staan de utriculusotolithen eveneens horizontaal, maar drukken op het zintuigepitheel.

Hieruit volgt dus, dat niet bij drukken van de utriculusotolithen, maar juist bij hangen van deze de grootste prikkel wordt uitgeoefend.

Voor den tonus der buigspieren geldt juist het omgekeerde; deze tonus is het sterkst bij drukkende en het zwakst bij hangende otolithen.

De invloed van het labyrinth op den tonus der buigspieren is echter veel geringer dan die op de strekspieren en is slechts door bijzondere maatregelen aan te toonen, zoodat er wel niet aan te twijfelen is, dat in elk geval de sterkste prikkels van de hangende otolithen uitgaan.

Door proeven op konijnen met eenzijdige labyrinthexstirpatie is gebleken, dat *één* labyrinth met de spieren van *beide* extremiteiten in verbinding staat, zoodat elke utriculusotolith zijnen invloed op de spieren van beide extremiteiten uitoefent.

b. Op den hals.

Hiervoor geldt precies hetzelfde als juist voor de tonische labyrinthreflexen op de spieren der extremiteiten werd medegedeeld. Er is slechts één principieel verschil. Terwijl uit proeven op konijnen met eenzijdige labyrinthexstirpatie bleek, dat elk labyrinth met de spieren van beide extremiteiten in verbinding staat, is dit met den invloed op de halsspieren niet het geval, en is de invloed enkel eenzijdig. Hieruit volgt dus, dat één utriculusotolith slechts met de halsspieren van één lichaamshelft in functioneele verbinding staat.

Uit het feit, dat beide utriculusotolithen ongeveer in één vlak liggen, volgt dus nog niet, dat de verwijdering van één utriculusotolith zonder symptomen verloopen zal, hetgeen dan ook blijkt uit de na eenzijdige labyrinthextirpatie optredende halsdraaiïng.

2. „*Labyrinthstellreflexe*".

Met „Labyrinthstellreflexe" worden die reflexen bedoeld, door welke de kop uit een abnormalen stand steeds weer in den normalen

stand wordt gebracht. De centra voor deze reflexen liggen, evenals die der andere „Stellreflexe" in de middenhersenen.

Onderzoeking der labyrinthaire „Stellreflexe" bij konijnen na eenzijdige labyrinthexstirpatie, heeft aangetoond, dat de labyrinthaire „Stellreflexe" zich zoodanig op de juist beschreven en als utriculus-reactie beschouwde halsdraaiing superponeeren, dat daardoor getracht wordt den kop in de ruimte steeds in die zijligging te brengen, waarbij het intacte labyrinth zich boven bevindt. Bij dezen stand heeft de van het intacte labyrinth uitgaande „Stellreflex" zijn minimum.

Wanneer daarentegen het intacte labyrinth zich beneden bevindt, heeft de „Stellreflex" zijn maximum.

Wanneer men den kop in een willekeurigen stand in de ruimte brengt, komt het dier pas tot rust, wanneer het zijnen kop zooveel mogelijk in zoodanigen stand gebracht heeft, dat de „Stellreflex" van het intacte labyrinth uitgaande zoo gering mogelijk is. Volkomen rust treedt op, wanneer zooals boven gezegd het intacte labyrinth zich boven bevindt. Onderzoekt men dan aan het model welken stand hierbij de otolithen hebben, dan blijkt, dat dit 't geval is, wanneer de sacculusotolith horizontaal staat en op het zintuigepitheel drukt.

De grootste onrust wordt daarentegen waargenomen, wanneer men den kop in dusdanigen stand brengt, dat de intacte sacculusotolith aan het zintuigepitheel hangt.

Bij de „Labyrinthstellreflexe" na eenzijdige labyrinthexstirpatie laat zich dus met zekerheid bewijzen, dat het maximum van prikkeling van den otolith uitgaat, wanneer deze hangt en het minimum, wanneer deze drukt.

De „Labyrinthstellreflexe" op den kop, door welke de kop bij het intact zijn van b e i d e labyrinthen uit asymmetrische standen steeds in den symmetrischen stand wordt teruggebracht, worden verklaard door de samenwerking der prikkels vanuit de beide labyrinthen. De kop komt in een dusdanigen stand tot rust, dat de prikkels vanuit beide sacculi even sterk zijn.

Uit het bovenstaande blijkt, dat de maximumstanden van het rechter en het linker labyrinth voor de boven beschreven „Labyrinthstellreflexe" *ongeveer* 180° verschillen. Hieruit volgt reeds, dat het sacculusreflexen en geen utriculusreflexen zijn kunnen, daar de utriculusotolithen ongeveer in een horizontaalvlak liggen, terwijl de sacculusotolithen een hoek van 120°—140°—150° met elkaar vormen.

Behalve de zoo juist beschreven „Sacculusstellreflexe" door welke de kop uit asymmetrische standen in eenen symmetrischen stand gebracht wordt, moeten ook nog andere labyrinthaire „Stellreflexe" aangenomen worden, daar de kop niet alleen in eenen willekeurigen,

25

maar steeds in eenen zeer bepaalden symmetrischen stand gebracht wordt en wel zoodanig, dat de kruin zich boven, de onderkaak beneden en de mondspleet zich iets onder het horizontale vlak bevindt. Of hierbij de sacculi of de utriculi de oorzaak van deze reflexen zijn, is nog niet met zekerheid uit te maken.

3. *Tonische labyrinthreflexen op de oogspieren.*

a. Vertikale afwijkingen.

Bij deze tonische labyrinthreflexen gaat men ook weer het best uit van de verschijnselen na eenzijdige labyrinthexstirpatie.

Na eenzijdige labyrinthexstirpatie vindt men de sterkste vertikale afwijking der oogen, wanneer het intacte labyrinth zich bij zijligging van den kop beneden bevindt. Dan is de rectus sup. van dezelfde en de rectus inf. van de gekruiste zijde het sterkst gecontraheerd. Wanneer zich het intacte labyrinth boven bevindt, is de rectus sup. van dezelfde zijde en de rectus inf. van de gekruiste zijde in minimale contractie. Een tonische invloed van het intacte labyrinth op den rectus sup. van de gekruiste zijde en den rectus inf. van dezelfde zijde, kon niet worden aangetoond.

Bij intacte labyrinthen en normalen stand van den kop zijn de prikkels van uit de beide labyrinthen op de recti sup. en inf. van beide oogen even sterk, zoodat de oogen dan geen vertikale afwijking vertoonen.

Daar de maximumstanden van beide labyrinthen ongeveer 180° verschillen (maximumstand van het rechter labyrinth bij rechter zijligging, van het linker bij linker zijligging) kunnen deze reflexen geen utriculusreflexen zijn, daar dan de maximumstanden dezelfde zijn moesten.

Bij de maximum- en minimumstanden der reflexen hebben echter de sacculusotolithen weer een zeer typischen stand: bij den maximumstand hangt de sacculusotolith, bij den minimumstand drukt deze.

Na eenzijdige labyrinthexstirpatie is de vertikale afwijking bij den maximumstand van het intacte labyrinth maximaal, bij den minimumstand nul of zeer gering.

In elk geval is zeker, dat bij den minimumstand van het intacte labyrinth geen vertikale afwijking naar de andere zijde optreedt. Daaruit volgt met zekerheid, dat werkelijk bij den minimumstand van de sacculusotolithen geen of zeer geringe, bij den maximumstand daarentegen zeer sterke prikkels worden opgewekt.

Ook in dit geval kan men dus, evenals bij de „Labyrinthstell-

reflexe" bewijzen, dat bij hangenden otolith de prikkel het sterkst, bij drukkenden otolith de prikkel het zwakst of nul is.

b. Raddraaiingen.

Bij de raddraaiingen zijn de verhoudingen veel ingewikkelder, dan bij de reeds besproken tonische labyrinthreflexen. Eene uitvoerige bespreking zou te veel tijd in beslag nemen. Hier moge dus slechts het resultaat worden medegedeeld, waartoe de verschillende overwegingen gevoerd hebben.

De gevonden raddraaiingen der oogen bij de compensatorische oogstanden zijn misschien door de volgende hypothese te verklaren. De voorste sacculushoeken hebben een eigen innervatie, zijn lateraalwaarts omgebogen en komen daardoor ongeveer in één frontaalvlak te liggen. Elke sacculushoek staat met de obliquus sup. en inf. van beide oogen in functioneel verband. Wanneer de otolith aan den sacculushoek hangt, zijn de obliq. sup. van beide oogen het sterkst gecontraheerd en de obliq. inf. het meest verslapt. Wanneer de otolith op den sacculushoek drukt, zijn de obliq. inf. het sterkst gecontraheerd, de obliq. sup. het meest verslapt. Daar beide sacculushoeken ongeveer in het zelfde vlak liggen vindt men na eenzijdige labyrinthexstirpatie geen duidelijke verandering in de ligging der maxima en minima. Daar elke sacculushoek de obliq. sup. van beide oogen in gelijken en de obliq. inf. in reciproken zin beinvloeden, blijven de raddraaiingen na eenzijdige labyrinthexstirpatie qualitatief onveranderd en worden slechts quantitatief ongeveer tot de helft gereduceerd.

Bij de raddraaiingen vindt men dus niet duidelijk, dat bij hangenden otolith de sterkste en bij drukkenden otolith de zwakste prikkels worden uitgeoefend, maar schijnen zoowel bij hangenden als bij drukkenden otolith, al zij het ook tegenovergestelde prikkels, opgewekt te worden.

SAMENVATTING.

Aan de hand van een in het Utrechtsch Anatomisch Instituut gemaakt model der otolithen met hunne juiste ligging in den konijnenschedel werd nagegaan of de verschillende tonische labyrinthreflexen otolithenreflexen zijn kunnen. Experimenteel werd voor alle tonische labyrinthreflexen die stand bepaald, waarbij deze hun maximum en minimum hebben. Daarbij werd tot de volgende conclusies gekomen:

1. De tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren gaan van

de utriculi uit. E e n e utriculusmacula staat met de spieren van b e i d e extremiteiten, daarentegen slechts met de hals- (en romp-) spieren van e e n e lichaamshelft in verbinding.

2. De „Labyrinthstellreflexe" zijn sacculusreflexen. Of ook de utriculi hierbij nog eene rol spelen is niet zeker.

3. Compensatorische oogstanden:

a. De vertikale afwijkingen zijn sacculusreflexen; het hoofdgedeelte van de sacculusmacula is hiervoor verantwoordelijk te stellen. Eéne sacculusmacula staat met den rectus sup. van de zelfde en met den rectus inf. van de gekruiste zijde in verbinding.

b. De raddraaiingen worden waarschijnlijk in de, van eene afzonderlijke innervatie voorziene, sacculushoeken opgewekt.

Van de maculae gaan voortdurende prikkels uit, welke zoolang niet veranderen, als de otolithen hun stand ten opzichte van het horizontale vlak niet veranderen. Wanneer de otolith horizontaal staat worden de sterkste resp. de zwakste prikkels opgewekt. Voor de sacculusotolithen is ten opzichte van de „Labyrinthstellreflexe" en van de vertikale afwijkingen bij de compensatorische oogstanden te bewijzen, dat het maximum der prikkeling bij h a n g e n d e n otolith optreedt. Ook voor de utriculusotolithen geldt waarschijnlijk hetzelfde.

Bij de sacculushoeken zijn de verhoudingen daarentegen waarschijnlijk ingewikkelder en ontstaan de prikkels zoowel bij hangenden als bij drukkenden otolith.

Voorloopig geldt het bovenstaande nog uitsluitend voor konijnen.

B. Over de geïsoleerde uitschakeling der otolithen bij caviae.

Zooals uit deze en voegere mededeelingen blijkt, kan men de verschillende labyrinthreflexen in de volgende groepen indeelen:

a. Reflexen op beweging.

1. Draaireacties en -nareacties op den kop en op de oogen.
2. Reacties op progressiebewegingen.

b. Tonische labyrinthreflexen.

1. Tonische reflexen op de lichaamsspieren.
2. „Labyrinthstellreflexe".
3. Compensatorische oogstanden.

Wat de draaireacties en -nareacties betreft, deze zijn reeds lang bekend en worden wel met recht door alle onderzoekers als booggangsreflexen beschouwd.

Zooeven werd aangetoond, dat de verschillende tonische labyrinthreflexen waarschijnlijk otolithenreflexen zijn en dat voor de verschillende

tonische reflexen ook verschillende otolithen verantwoordelijk gesteld kunnen worden.

De reacties op progressiebewegingen waren tot nu toe experimenteel zeer weinig onderzocht. Het gelukte echter voor verschillende diergroepen bepaalde, van de labyrinthen afhankelijke reacties op progressiebewegingen aan te toonen. Daar onderstaande onderzoekingen bij caviae verricht zijn, mogen hier de bij deze dieren gevonden reacties in het kort worden medegedeeld.

Liftreacties:

Het dier zit in normale houding op een horizontaal gehouden plank. Beweegt men nu de plank verticaal naar boven, zoo worden bij het begin der beweging de voorpooten sterk gebogen en de kop gaat naar beneden.

Na het ophouden van de beweging worden daarentegen de voorpooten sterk gestrekt het voorste gedeelte van het lichaam wordt opgeheven en dikwijls ook de kop dorsaalwaarts gebogen. Bij sterke reacties doen ook de achterpooten mede en staat het dier tenslotte op zijn vier uitgestrekte pooten. De omgekeerde reactie vindt men bij eene liftbeweging naar beneden. Dan worden bij het begin der beweging de extremiteiten, vooral de voorpooten gestrekt en het voorste gedeelte van het lichaam opgeheven. Na het einde der beweging worden de voorpooten gebogen en de kop en het voorste gedeelte van het lichaam bewegen zich naar de plank toe.

Spiertrillen.

Men houdt het dier verticaal in de lucht met den kop naar boven, de linkerhand met duim en pink om den buik, den wijsvinger en derden vinger als steun voor de voorpootjes, de achterpooten door de handpalm gesteund terwijl duim en wijsvinger van de rechterhand op nek en schouders van het dier liggen. De kop is in normalen stand. Men wacht nu tot het dier volkomen tot rust is gekomen en men met de vingers van de rechterhand geen spiertrillen meer voelt in de schouder- en halsspieren. Wordt nu het dier verticaal (naar boven en beneden), of horizontaal (ventraalwaarts, dorsaalwaarts, naar rechts en naar links) bewogen, dan voelt men bij deze progressiebewegingen met de rechterhand een duidelijk spiertrillen. Bij nauwkeurig onderzoek blijkt ook hier, dat het trillen bij het begin en bij het einde der beweging optreedt.

Het spreiden der teenen.

Men neemt de cavia verticaal in de lucht de rechterhand onder de oksels met de handpalm naar den rug van het dier gekeerd. De teenen der achterpooten worden door voorzichtig strijken tegen elkaar gelegd Beweegt men nu het dier slechts zeer weinig naar beneden, dan gaan direct de teenen der achterpooten uit elkaar.

De reactie is niet bij alle, maar wel bij de meeste dieren aan te toonen en treedt bij het begin der beweging op. Beweegt men het dier op dezelfde wijze verticaal naar boven, dan worden eveneens de teenen gespreid, soms treedt deze beweging in het begin soms aan het einde der beweging op.

Alle deze reacties op progressiebewegingen zijn van de labyrinthen afhankelijk, zij zijn verdwenen na dubbelzijdige labyrinthexstirpatie. Op détails kan hier niet worden ingegaan evenmin op de voorzorgen, welke bij het onderzoek moeten worden in acht genomen. Deze zullen later uitvoerig worden medegedeeld, waarbij dan tevens nog enkele andere labyrinthaire reacties op progressiebewegingen zullen worden beschreven.

Zooals boven reeds medegedeeld werd, meenden MACH en BREUER

uit theoretische overwegingen dat het physisch onmogelijk was, dat bij deze reacties de booggangen eene rol zouden spelen; zij kwamen dan ook tot de conclusie, dat voor deze reàcties alleen de otolithen in aanmerking kwamen. Bij deze beschouwingen gaan echter MACH en BREUER uit van de vooronderstelling, dat de booggangen een gesloten met vloeistof gevuld systeem met vaste wanden vormen, waarin dan ook werkelijk bij progressiebewegingen geen endolymphstroomingen te verwachten zijn. Hierbij wordt echter over het hoofd gezien, dat de endolymphe der booggangen door den ductus endolymphaticus met den saccus endolymphaticus welke in de schedelholte ligt in verbinding staat, terwijl ook de perilymphe niet overal door eenen vasten wand omgeven wordt, maar dat zich in deze twee elastische membranen bevinden, namelijk het foramen rotundum en het foramen ovale.

Uit onderzoekingen met een model door Prof. ORNSTEIN en Dr. BURGER gemaakt, waarbij met het boven vermelde rekening werd gehouden, bleek nu, dat onder deze omstandigheden bij progressiebewegingen wel endolymphestroomingen in de endolymphe kunnen optreden.

Of de reacties op progressiebewegingen booggangs- of otolithenreflexen zijn, bleef dus een open vraag.

Het was daarom gewenscht over eene methode te beschikken, waardoor òf de booggangen òf de otlithen geïsoleerd konden worden uitgeschakeld. Het laatste bleek mogelijk te zijn door gebruik te maken van eene methode van WITTMAACK, waarbij normale caviae in aethernarcose met eene snelheid van ongeveer 1000 Meter per minuut gecentrifugeerd worden. Voor het centrifugeeren werden de proefdieren volgens een bepaald schema nauwkeurig op alle labyrinthreflexen onderzocht en het resultaat opgeteekend. Precies dezelfde onderzoeking werd direct na het centrifugeeren herhaald en eveneens op de daarop volgende dagen, zoodat op deze wijze als het ware eene volledige ziektegeschiedenis van elk proefdier werd verkregen. Op grond nu van bovenvermelde opvattingen omtrent de functie der booggangen en de otolithen werd nu telkens eene klinische diagnose omtrent den toestand der booggangen en der verschillende otolithen gemaakt. Daarna werden de dieren gedood, de labyrinthen gefixeerd en later in seriecoupes nauwkeurig anatomisch onderzocht. Op deze wijze was het mogelijk de klinisch en pathalogisch-anatomische diagnose met elkaar te vergelijken.

De verkregen resultaten kunnen op de volgende wijze worden samengevat; voor details moge ook weer naar de later te verschijnen uitvoerige mededeeling verwezen worden.

SAMENVATTING.

1. Door centrifugeeren van normale caviae volgens de methode van WITTMAACK, gelukt het bij vele proefdieren eenen toestand in het leven te roepen, in welken de labyrinthreflexen op beweging (draaireacties en -nareacties op kop en oogen en reacties op progressiebewegingen) normaal zijn, terwijl de labyrinthreflexen van den stand ontbreken.

2. Laat men deze dieren eenige dagen in leven en onderzoekt men ze dagelijks op hunne labyrinthreflexen, dan blijkt, dat bij sommige dieren deze toestand onveranderd blijft bestaan, terwijl bij andere de tonische labyrinthreflexen van den stand gedeeltelijk of zelfs geheel terugkomen.

3. Histologisch onderzoek van één dier, bij hetwelk een volkomen herstel was opgetreden, toonde aan, dat alle otolithen op hun plaats werden gevonden, met uitzondering van één utriculusotolith, welke beschadigd bleek te zijn. Dit laatste was echter geheel in overeenstemming met de klinisch gevonden verschijnselen. Het booggangsapparaat was eveneens intact.

4. Bij éene cavia, welke na verloop van twee dagen intacte labyrinthreflexen op beweging (draaireacties en -nareacties en reacties op progressiebewegingen) daarentegen geen labyrinthreflexen van den stand vertoonde, werden bij histologisch onderzoek alle vier otolithen afgeslingerd en op andere plaatsen in het labyrinth gevonden, terwijl de booggangen met de cristae intact bleken te zijn.

Uit deze gegevens volgt, dat:

5. De labyrinthreflexen op beweging met name de draaireacties en -nareacties op kop en oogen booggangsreflexen zijn en bij het ontbreken der otolithen normaal tot stand kunnen komen.

6. Hetzelfde geldt voor de reacties op progressiebewegingen.

7. Daarentegen zijn de labyrinthreflexen van den stand (tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren, „Labyrinthstellreflexe" en compensatorische oogstanden) otolithenreflexen, welke na vernieling der otolithenmembranen niet meer zijn op te wekken.

8. In vele gevallen wordt direct na het centrifugeeren de functie der otolithen door de sterke mechanische invloeden op de specifiek zwaardere otolithenmembranen, tijdelijk uitgeschakeld, ook al blijven de otolithenmembranen zelf op hun juiste plaats liggen. De functie herstelt zich dan na verschillend langen tijd.

9. Uit deze en de vroeger medegedeelde gegevens blijkt dus, dat door het booggangsapparaat de reflexen op beweging(draaireacties en -nareacties op kop en oogen en de reacties op progressie-

bewegingen) worden opgewekt, terwijl het otolithenapparaat verantwoordelijk moet gesteld worden voor de labyrinthreflexen van den stand (tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren, „Labyrinthstellreflexe" en compensatorische oogstanden).

10. Hiermede is natuurlijk niet uitgesloten, dat ook het otolithenapparaat door bepaalde vormen van beweging (centrifugaalkracht, traagheid bij snelle progressiebewegingen) geprikkeld kan worden.

Ten slotte nog enkele microfotos om het zoo juist medegedeelde te verduidelijken:

Cavia 2:

Bij dit proefdier werd klinisch na het centrifugeeren de volgende diagnose gesteld. Alle labyrinthreflexen normaal voorhanden. Daar het dier vóór het centrifugeeren eene draaiing van den kop naar links had vertoond, wanneer het verticaal met den kop naar beneden aan het bekken gehouden werd, moest worden aangenomen, dat de rechter utriculus vóór het centrifugeeren wat meer functioneerde, dan de linker. Na het centrifugeeren werd geen verschil in de functie van beide utriculusotolithen meer gevonden zoodat eene beschadiging van den rechter utriculus door het centrifugeeren waarschijnlijk was. Overigens kan verwacht worden, dat alle otolithen en ook de booggangen intact waren.

Bij het histologisch onderzoek werd nu het volgende gevonden:

Booggangen met Cristae normaal.

Rechter sacculus (Fig 2*a*) volkomen intact. De foto vertoont den rechter sacculus bij sterkere vergrooting, men ziet het zintuigepitheel met daarop de intacte otolithenmembraan.

Linker sacculus (Fig. 2*b*.) eveneens volkomen intact. Op de foto ziet men de intacte otolithenmembraan bij zwakke vergrooting.

Rechter utriculus (Fig. 2*c*.) zooals te verwachten was deels beschadigd. Op de foto ziet men de otolithenmembraan in het gebied van de sterkste beschadiging, het deel van de membraan, dat naar de booggangen is toegekeerd, ligt nog normaal op het zintuigepitheel, het andere gedeelte van de membraan is van het zintuigepitheel afgeslingerd.

Linker utriculus (Fig. 2*d*.) volkomen intact. Op de foto ziet men het zintuigepitheel, bedekt door de normale otolithenmembraan.

Zooals men ziet heerscht er dus een volkomen overeenstemming tusschen de klinische en pathalogisch-anatomische diagnose.

Cavia 8.

Bij dit proefdier bleken na het centrifugeeren alle labyrinthreflexen op beweging dus de draaireacties en -nareacties op kop en oogen en de reacties op progressiebewegingen normaal aanwezig te zijn, terwijl de tonische labyrinthreflexen alle ontbraken (tonische labyrinthreflexen op de lichaamsspieren, „Labyrinthstellreflexe" en compensatorische oogstanden).

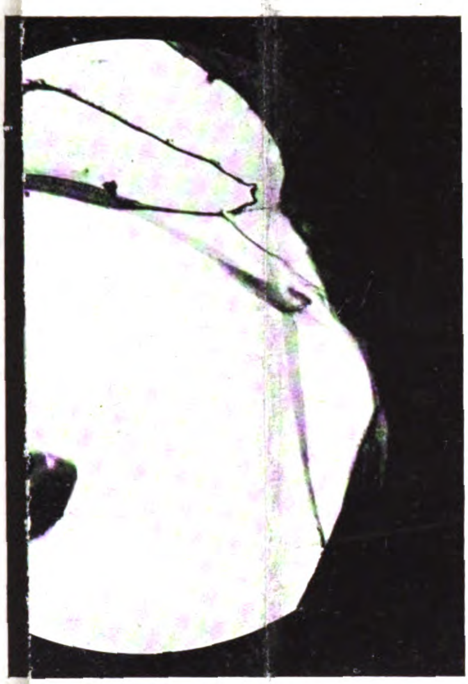
De klinische diagnose luidde:

Booggangen intact: otolithen alle afgeslingerd.

Histologisch werd het volgende gevonden:

Rechter sacculus: (Fig. 8*a*.) De otolithenmembraan blijkt geheel afge-

R. :



Cavia 8, *a*.
lus en rechter utriculus zonder
Afgeslingerde sacculusmembraan
n de sacculusholte.

Cavia 8, *c*.
s en linker utriculus zonder mem-
lingerde sacculusmembraan in de
sacculusholte.

Ve

slingerd te zijn. Op de foto ziet men bij zwakke vergrooting het zintuigepitheel zonder otolithenmembraan, terwijl de afgeslingerde membraan in den hoek van den sacculus te zien is.

L i n k e r s a c c u l u s (Fig. 8*b* en 8*c*.) Op Fig. 8*b* ziet men het zintuigepitheel van den linker sacculus bij sterkere vergrooting. Van eene otolithenmembraan is niets te vinden; duidelijk ziet men het verschil met Fig. 2*a*, op welke eene normale membraan aanwezig is. Op Fig. 8*c* ziet men eveneens het zintuigepitheel van den sacculus zonder otolithenmembraan bij zwakke vergrooting, terwijl de afgeslingerde membraan weer in den hoek van den sacculus wordt aangetroffen.

R e c h t e r u t r i c u l u s (Fig 8*d*) Op deze foto is bij sterkere vergrooting het zintuigepiteel van den utriculus te zien, bedekt met enkele resten van de otolithenmembraan in den vorm van korreltjes. (Vergelijk hiermede Fig 2*d* met normale otolithenmembraan). De afgeslingerde membraan zelf werd in den achtersten verticalen booggang teruggevonden (Fig. 8*e*).

L i n k e r u t r i c u l u s. (Fig 8*f*.) Bij zwakke vergrooting ziet men hier het zintuigepitheel van den linker utriculus met enkele korreltjes bedekt. De afgeslingerde membraan werd ook aan deze zijde in den achtersten verticalen booggang aangetroffen (Fig. 8*g* met den achtersten verticalen en met den horizontalen booggang).

B o o g g a n g e n met de C r i s t a e volkomen intact met uitzondering van de afgeslingerde otolithenmembranen in de achterste verticale booggangen.

Ook in dit geval dus weer de meest volkomen overeenstemming tusschen de klinische en pathologisch-anatomische diagnose.

Nog drie andere, hier niet beschreven gevallen, leverden hetzelfde geheel overeenstemmende resultaat van klinisch en microscopisch onderzoek.

Physiologie. — De Heer W. EINTHOVEN doet een mededeeling: *„Over de waarneming en afbeelding van dunne draden."*

Terwijl de uitvoerige verhandeling over het onderwerp elders het licht zal zien, volgen hieronder eenige conclusies.

1. Draden van 0,1 à 0,2 μ kunnen als lichte strepen op een donkeren achtergrond met het blooie oog gemakkelijk worden gezien. Men kan ze zonder bezwaar schieten of blazen, bevestigen, overnemen, onder het mikroskoop brengen, verstuiven en in den galvanometer uitspannen.

2. Elke bestaanbare draad, hoe dun hij ook mag zijn, kan ultramikroskopisch zichtbaar worden gemaakt, wanneer men slechts in staat is hem op doelmatige wijze onder het mikroskoop te brengen. Neemt men aan, dat bij gelijkblijvende bestraling van een draad de hoeveelheid licht, die door hem teruggeworpen wordt, evenredig afneemt met zijn diameter, dan wordt de diameter van den dunsten zichtbaren draad op $0,2 \times 10^{-6}\ \mu\mu$ berekend. Ter vergelijking diene, dat de diameter van een waterstof-molecule ongeveer een millioen maal grooter is.

3. Het vermogen, om met het ongewapende oog den dunsten *donkeren draad tegen een lichten achtergrond* te kunnen zien, wordt niet bepaald door de afmetingen der kegels op het netvlies, maar door het vermogen om twee helderheden van elkaar te onderscheiden. Terwijl twee lichtpunten of lichtlijnen, die elkaar meer en meer naderen, nog van elkaar gescheiden worden waargenomen, wanneer zij op de retina worden afgebeeld op een onderlingen afstand, die overeenkomt met den diameter van een kegel, waarbij zij onder een gezichtshoek van 60″ verschijnen, kan een draad nog onder een hoek van 2″ worden gezien.

4. Iedere omstandigheid, die het mikroskopische beeld van een donkeren draad tegen een lichten achtergrond minder scherp maakt, vergroot den schijnbaren diameter van den draad. Daar geen mikroskoop aan ideale eischen beantwoordt, mag dus worden aangenomen, dat de uitkomsten der met dit instrument verrichte metingen òf met de werkelijkheid overeenkomen òf te groote waarden aangeven, zoodat de in deze mededeeling bedoelde draden òf werkelijk 0,1 à 0,2 μ dik of dunner zijn.

5. De voorwaarden, om met het mikroskoop den dunsten donkeren

draad tegen een lichten achtergrond waar te nemen en af te beelden zijn ongelijk aan die, welke gelden voor het gescheiden zien van twee lichtpunten of lichtlijnen, die elkaar meer en meer naderen. Is de apertuur van het projectie-objectief N en de golflengte van het licht λ, dan is, zooals algemeen aangenomen wordt, de afstand der nog onderscheidbare punten of lijnen

$$l \geqq \frac{\lambda}{2N},$$

hetgeen voor $N = 0{,}95$ en $\lambda = 0{,}6\,\mu$ voor l de waarde van $0{,}31\,\mu$ oplevert. De centrale diffractie-schijven, die in het beeld van elk der beide lichtpunten worden gevormd, bedekken elkaar daarbij ter lengte van den straal der schijven.

Daarentegen wordt een draad van $0{,}2\,\mu$ met een objectief van dezelfde apertuur scherp en contrastrijk afgebeeld. De randen zijn daarbij zoo fijn geteekend, dat nog een aantal kleine oneffenheden afzonderlijk zichtbaar worden.

6. Wanneer dezelfde draad met een objectief wordt afgebeeld, waarvan de apertuur 0,18 bedraagt, wordt het beeld wel is waar minder contrastrijk en minder scherp, maar blijft het toch duidelijk genoeg om nog voor vele doeleinden bruikbaar te zijn. Daarbij bedekken elkaar de centrale diffractieschijven, die gevormd worden van een lichtpunt, dat zich aan den eenen rand van den draad bevindt en van een tegenovergesteld punt aan den anderen rand ten bedrage van $P = 94\,\%$ van de middellijn der schijven.

7. Bij de directe waarneming van draden zonder toepassing van het mikroskoop vonden wij als maximale waarden van P... 98,2 % en 98,5 %. Vermoedelijk kunnen even groote en zelfs grootere waarden van P bij de mikroskopische afbeelding worden bereikt.

8. Men heeft grond om aan te nemen, dat met de objectieven uit den handel nog van een draad van $0{,}04\,\mu$ een bruikbaar beeld kan worden verkregen.

Inderdaad werden op de vergadering photogrammen vertoond van een verstoven kwartsdraad, welks diameter naar alle waarschijnlijkheid van de genoemde orde van grootte was.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt een mededeeling aan over: „*Sensibilisatie voor radio-activiteit door hormonen.*"

Met het begrip sensibilisatie van organismen of organen is ten opzichte van licht-energie de physiologie sinds lang vertrouwd. Vooral H. VON TAPPEINER[1]) heeft de aandacht op eenige fluoresceerende stoffen gevestigd, die bij aanwezigheid van zuurstof voornamelijk, den vernielenden invloed van het licht in hooge mate versterken. De bedoelde schadelijke invloed evenaart dan ongeveer die, welke de ultraviolette stralen uitoefenen. De Heer en Mevrouw HENRI[2]) hebben vervolgens een soortgelijke werking van het colloïdaal selenium ontdekt, ditmaal voor de ultraviolette stralen zelve.

Veel later is men zulke uitwerkingen ook voor de Röntgenstralen op het spoor gekomen. Het gebruik van enzytol (10 % solutie van boorzure choline) ter versterking der destructie van kwaadaardige gezwellen bij Röntgenbehandeling is hiervan een voorbeeld[3]).

In 1917[4]) heb ik zelf het begrip sensibilisatie voor Becquerelstralen ingevoerd. Ook nu waren het twee fluoresceerende stoffen, die haar tot stand brachten, te weten fluoresceine en eosine. Fluoresceine had de meest uitgesproken werking ten opzichte van de α-stralen, eosine ten opzichte van de β-stralen. Hun werking was onafhankelijk van het al of niet bovendien aanwezig zijn van licht. Op grond van modelproeven aan adsorbentia (b.v. talcum venetum) bracht ik later de sensibilisatie in deze gevallen in verband met eene versterking der adsorpties, die de radio-actieve ionen door de tusschenkomst van de sensibilisatoren ondergaan. Daarbij vonden wij een adsorptie-verdringing van fluoresceine door eosine en niet omgekeerd, parallel gaande met een verdringing der sensibilisatie van fluoresceine door eosine en niet omgekeerd[5]). De adsorpties spelen in het algemeen bij de werking van radio-actieve atomen der circulatie-

---

[1]) H. VON TAPPEINER, die photodynamische Erscheinung (Sensibilisierung durch fluoreszierenden Stoffe). Ergebnisse der Physiol. Bd. 8. S. 698. 1909.

[2]) M. ET MME. VICTOR HENRI, Action photodynamique du sélénium colloidal, Soc. de Biologie. C. R. du 21 févr. 1912.

[3]) Een volledige literatuurlijst over cholinewerking treft men aan bij DORN Strahlentherapie Bd 8. S. 493.

[4]) Kon. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam 27 Sept 1917.

[5]) Zie voor de techniek A. M. STREEF, Onderz. Physiol. Lab. Utrecht, 5e Reeks XVIII p. 59.

vloeistoffen een groote rol, daar de bewegelijke, vrij in de vloeistof migreerende ionen eerst invloed uitoefenen, wanneer zij door adsorptie aan de oppervlakte der cellen zijn gehecht en niet zoolang zij zich op allerlei afstand van de cellen bevinden. Een verbetering der adsorptie, waardoor zich bij een gegeven gehalte in de circulatie-vloeistof een grooter aantal van een bepaalde groep ionen aan de cellen hecht, is bevorderlijk aan de uitkomst, die deze ionen te voorschijn roepen.

Er bestaat een eenvoudig middel om sensibilisatoren voor radio-activiteit op het spoor te komen. Men heeft slechts uit te gaan van het radio-actief antagonisme[1] Daartoe bedienen wij ons bij voorkeur van het hart van een koudbloedig dier, omdat de cellen van dit orgaan, zetel van automatische beweging, rechtstreeks door de circulatie-vloeistof worden omspoeld.

Een aal- of kikvorschhart klopt alleen, wanneer zich, behoorlijke verdere voorwaarden vooropgesteld, in de circulatievloeistof een radio-actief bestanddeel in juiste doseering bevindt. Het is onverschillig of het element in quaestie een α- dan wel een β-straler is (normaliter is de β-straler het kalium). Brengt men den α- en den β-straler echter tegelijk aan, dan kunnen de hoeveelheden juist zoo tegen elkaar worden opgewogen, dat zij elkaars werkzaamheid geheel belemmeren. Dan heerscht er op zulk een oogenblik stilstand. Een klein overwicht naar de eene of naar de andere zijde doet de automatie herleven.

De doseering van α- en β-stralers in de circulatie-vloeistof moet 's zomers veel kleiner genomen worden dan 's winters. Afzonderlijk gebruikt is 's zomers 5 mgr. kaliumchloride of 0,1 mgr. uranylnitraat per Liter circulatievloeistof voldoende om gevoelige harten in automatie te houden. 's Winters wordt op zijn minst 20 mgr. kaliumchloride of 10 mgr. uranylnitraat per Liter vereischt. De zomer- en winter-evenwichten zijn dientengevolge ook geheel verschillend. 's Zomers kan 20 à 30 mgr. kaliumchloride en 0.1 mgr. uranylnitraat (per Liter) een combinatie zijn, die stilstand geeft, 's winters wordt tot hetzelfde doel 40 mgr. kaliumchloride en 10 mgr. uranylnitraat gevorderd.

Heeft men zich, in welk seizoen dan ook, een evenwicht verschaft, dan geven tal van stoffen een verschuiving, waardoor de automatie weer ontwaakt. Onder de anorganische bestanddeelen is het het calciumion, waaraan zulk een invloed in hooge mate toekomt, onder de organische stoffen trof ik tal van stoffen aan, wier

---

[1]) Kon. Akad. v. Wetensch. 27 April 1917.

gemeenschappelijke karaktertrek het bezit van groote oppervlakte-activiteit is (nagegaan voor de grenslaag lucht-water).

Men ontmoet verschuivingen naar beide zijden. Wanneer zij naar de α-zijde plaats hebben, zoodat uraankloppen optreedt, moet nieuw kalium worden toegevoegd om den stilstand terug te erlangen. Geschieden zij naar de β-zijde, dan wordt hetzelfde bereikt door uranium-toevoeging.

Uit de verschuiving volgt allerminst, dat de stof, die haar te voorschijn riep, een sensibilisator is, maar haar tot stand komen wijst op de mogelijkheid, dat zulks het geval is. Om zekerheid dienaangaande te verkrijgen, moeten de maximum- en minimumdoses worden opgespoord, waartusschen het orgaan bij voortduring tot automatie geschikt blijft; voor de physiologie het belangrijkst zijn de kalium-grenzen. 's Zomers wisselen de uitersten, naar de individualiteit van het dier, tusschen 5 en 20 en tusschen 10 en 300 mgr. kaliumchloride per Liter, met dien verstande, dat bij een lage ondergrens een lage bovengrens past, enz.; 's winters zijn de extremen meer bestendig 20 à 30 en 600 à 800 mgr. kaliumchloride per Liter. Voor de overige radio-actieve elementen hebben wij soortgelijke bepalingen gedaan, maar ik ga ze met stilzwijgen voorbij, daar die elementen in het dierlijk organisme normaliter niet voorkomen. Hetzelfde geldt van de meeste door ons gevonden sensibilisatoren. Een uitzondering wil ik maken voor choline en voor adrenaline, hormonen, die beide in elk organisme worden aangetroffen. Hun sensibiliseerend vermogen ten opzichte der Becquerel-stralen is enorm. Van choline is 1 mgr. per Liter circulatie-vloeistof voldoende, van adrenaline 0.001 mgr.[1]) Bij aanwezigheid van een dezer beide hormonen kan de kaliumdosis, welke een hart aan het kloppen houdt tot de helft van de normale dosis, ja tot nog minder verminderd worden. 's Zomers komt men op die wijze tot allerminimaalste doseeringen; zelfs ½ mgr. KCl per Liter is aangetroffen! Dat men onder die omstandigheden ten zeerste voor de zuiverheid zijner chemicaliën moet waken, spreekt van zelf.

Er bestaat intusschen een verschil. Choline verschuift een kalium-uraanevenwicht naar den kaliumkant, adrenaline naar den uraniumkant. Of deze tegenstelling zich ook in het normale leven zal openbaren, bleef tot dusverre verborgen. Voor zoover wij weten, bevindt zich in het organisme nergens een α-straler, of het moest zijn de spoor rest-activiteit, die emanatie kan achterlaten, wanneer zij in

---

[1]) W. LIBBRECHT bezigde onlangs tot hetzelfde doel 0,05 mgr. per Liter, (Arch. int. de Physol. T. 15, p. 357), in anderen gedachtengang evenwel.

minimale hoeveelheden als indifferent gas met de atmospherische lucht wordt in- en uitgeademd.

Kalium, choline, adrenaline, zijn normale bestanddeelen van het organisme. Wij bewegen ons dus op echt physiologisch terrein, wanneer wij hunne onderlinge betrekkingen bestudeeren.

De bio-radio-actieve werking van kalium heeft geen temperatuurcoëfficient. En snelheid van uitwerking èn doseering blijven dezelfde of men bij 4°, 10°, of 20° werkt [1]). De kleine verschillen bewegen zich binnen de breedte der proeffouten. In dit opzicht vertoont de physiologische radio-activiteit overeenkomst met de photochemische werkingen, wier temperatuurcoëfficient eveneens onbeteekenend is. Toch zijn beide niet identiek. Integendeel, physisch beschouwd is de corpusculaire straling principieel verschillend van de lichtstraling. Ook is het ons ondanks ijverige pogingen nimmer mogen gelukken, zelfs niet door het geconcentreerdste zichtbaar of ultraviolet licht ooit een herstel der automatie in een kaliumloos doorstroomd orgaan te verkrijgen. De analogie, wat temperatuurcoëfficient betreft, tusschen radio-biologische en photochemische werkingen blijft dus verrassend, al wordt de verrassing getemperd door de moderne voorstellingen, dat een lichtwerking in vele gevallen berust op het losmaken van electronen.

Een samenhang in de verschijnselen kan men brengen door aan te nemen, dat de geladen deeltjes, die de radio-actieve straling met groote snelheid door de lipoidomhullingen der cellen werpt, in het binnenste der cellen een katalytisch effect te voorschijn roept, dat wij gewoon zijn als prikkeling te beschrijven [2]).

---

[1]) De zomer- en winterdoseering dankt haar verschil niet aan het verschil in temperatuur. Als een mogelijke oorzaak zij verschil in hormonen genoemd.

[2]) On physiological radio-activity. Journal of Physiology. Vol. 53 p. 286.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van de Heeren H. C. BURGER en P. H. VAN CITTERT: „*Intensiteitsmetingen van spectraallijnen met behulp van het échelon*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

1. *Inleiding.* Bij de bepaling van de intensiteiten van spectraallijnen stuit men op de volgende complicatie: hetgeen men direct waarneemt is de intensiteitsverhouding der lijnen, die bestaat op de plaats, waar het onderzochte spectrum door het gebruikte spectraalapparaat wordt ontworpen. Deze verhouding is echter in 't algemeen niet dezelfde als de verhouding der intensiteiten van de lijnen in het licht, dat door de onderzochte lichtbron wordt uitgezonden. Bij het échelon is dit zelfs voor zeer kleine golflengteverschillen bij benadering niet het geval.

Indien de intensiteit van het licht, dat het échelon in de richting der optische as doorloopt I_0 gesteld wordt, wordt theoretisch [1]) de intensiteit van het licht, dat onder een hoek α met de as uittreedt, gegeven door:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \pi \frac{\sigma}{\lambda} \alpha}{\left(\pi \frac{\sigma}{\lambda} \alpha\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

(λ = golflengte, σ = breedte van een trede).

De verschillen in richting van uittreden mogen zoowel door een verschil in golflengte als door een verschil in stand van het échelon veroorzaakt zijn, mits het échelon ongeveer evenwijdig aan de optische as staat. In fig. 1 ziet men het verband tusschen intensiteit en plaats (d.i. hoek α) van een spectraallijn graphisch voorgesteld. De intensiteit wordt bij een hoek

$$\alpha_0 = \pm \frac{\lambda}{\sigma}$$

nul, en krijgt buiten dit interval slechts geringe waarden. De afstand van twee orden bedraagt ook $\alpha_0 = \frac{\lambda}{\sigma}$, zoodat hoogstens twee orden

---

[1]) Enc d. Math. Wiss., Band Physik V, 21, 389.
BALY-WACHSMUTH, Spektroskopie, 1908, 137.

van eenzelfde lijn in het centrale deel der kromme (fig. 1) vrij lichtsterk kunnen worden waargenomen. Zooals direct uit de figuur blijkt kan het voorkomen, dat de sterkste van twee lijnen zich als

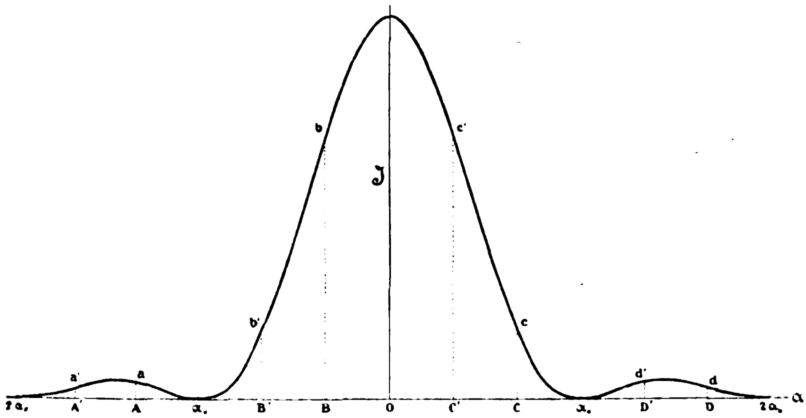


Fig. 1.

de zwakste voordoet, indien zij zich in de nabijheid van het minimum der intensiteitskromme bevindt. Bij intensiteitsbepalingen met het échelon moet men met deze omstandigheden rekening houden. Bij vroegere metingen [1]) is dit niet geschied. [2]) De fout die hierdoor gemaakt is, kan niet door een kleine correctie onschadelijk gemaakt worden, doch veroorzaakt dat de gevonden intensiteitsverhoudingen volkomen verschillend zijn van die, welke in het invallende licht aanwezig zijn.

Het groote belang der functie, door (1) en fig. 1 voorgesteld, was voor ons aanleiding om, alvorens wij de theorie op onze metingen toepasten, haar eerst aan het experiment te toetsen. Daartoe werden de intensiteiten van de verschillende orden van een spectraallijn gemeten (verg. fig. 1, spectraallijn in vier orden A, B, C en D met intensiteiten Aa, Bb, Cc en Dd). Daarna werd het geheele lijnen-

[1]) NAGAOKA en TAKAMINE, Proc. of the Phys. Soc. of Londen **25**, 1, 1912, Tôkyô Sûgaku-Buturigakkwai Kizi, 2e Serie, **7**, I.

[2]) De beschouwde intensiteitsverdeeling heeft ook invloed op de waargenomen plaats van een spectraallijn, wanneer men hieronder het zwaartepunt of het maximum van de met het spectraalapparaat waargenomen intensiteit verstaat. Immers een lijn binnen het interval $x_0 = \frac{\lambda}{\sigma}$ zal aan de buitenzijde sterker verzwakt worden dan aan de binnenzijde, en dus naar binnen verplaatst schijnen. Een lijnensysteem zal dus ineengedrongen worden. Het sterk uiteenloopen der waarden, die verschillende waarnemers voor de afstanden der satellieten van de groene kwiklijn gevonden hebben (verg. NAGAOKA en TAKAMINE, l.c.) is waarschijnlijk grootendeels hieraan toe te schrijven.

systeem door een geringe draaiing van het échelon om een as evenwijdig met de werkzame ribben een weinig verplaatst, zoodat de lijnen een anderen stand A', B', C', D' innamen en werden de intensiteiten $A'a', B'b', C'c', D'd'$ opnieuw bepaald. Indien men deze metingen voor eenige standen van het échelon herhaalt, en men van elke lijn bovendien de plaats t. o. v. een vast punt in het beeldvlak bepaalt, kan men de theorie toetsen. Daar bij voorloopige waarnemingen bleek dat de temperatuur invloed had op plaats en intensiteitsverdeeling [1]) werd zorg gedragen dat tijdens de metingen de omgeving van het échelon op constante temperatuur bleef. De metingen zijn uitgevoerd aan drie componenten der groene kwiklijn ($\lambda = 546{,}1\ \mu\mu$).

2. *Intensiteitsbepaling.* De intensiteit werd langs photographischen weg bepaald. De gebruikte methode, waarvan hier de beschrijving volgt, is analoog met die, welke Mej. R. RIWLIN [2]) toegepast heeft bij de bepaling van de absorptie.

Om complicaties tengevolge van verschil in belichtingstijd, soort van plaat, ontwikkeling, enz. te voorkomen, werden alle bij elkaar behoorende spectra op éénzelfde plaat met gelijken belichtingstijd opgenomen [3]). De zwarting van de plaat is dan uitsluitend afhankelijk van de intensiteit van het opvallende licht. Kent men nu het functionale verband tusschen zwarting en intensiteit (zwartingskromme), dan kan men uit de eerste grootheid de tweede vinden. Daar de componenten van het door ons onderzochte lijnensysteem slechts een zeer gering verschil in golflengte hebben, behoeft slechts voor één golflengte een zwartingskromme geconstrueerd te worden.

Om deze kromme te vinden werd als volgt gehandeld. Het spectrum van de groene kwiklijn werd bij bepaalden stand van het échelon gephotographeerd. Daarna werden achtereenvolgens voor de spleet van den collimator verschillende lichtverzwakkers [4]) geplaatst, die het licht der groene kwiklijn in bekende verhouding verzwakten, en werd bij onveranderden stand van het échelon het spectrum telkens opnieuw opgenomen.

---

[1]) Phys. Zeitschr., **21**, 16, 1920.

[2]) Kon. Ak. v. Wet., Mei 1920.

[3]) Gebruikt werden PAGET, Orthochromatic, Extra Special Rapid platen. Ontwikkeld werd circa 10 minuten met een glycine ontwikkelaar.

[4]) Voor het verzwakken werden oplossingen van chroomaluin in verschillende concentraties gebruikt in luchtdicht afgesloten bakjes. Ter voorkoming van troebeling werd een weinig sublimaat toegevoegd. De bakjes werden eenige malen, met een tusschenruimte van enkele weken, opnieuw geijkt. Een verandering in de absorptie was niet te bemerken.

Om de verzwakkers te ijken, werd het licht van de kwiklamp (WESTINGHOUSE COOPER-HEWITT, 220 V., 3.5 A) door condensors geconcentreerd op een oppervlakte-thermozuil van MOLL, welke met een galvanometer van MOLL verbonden was. Door filters werd gezorgd dat alleen het licht van de golflengte 546,1 $\mu\mu$ op de thermozuil viel. Onmiddellijk voor de thermozuil werden de verzwakkers geplaatst. De verhouding, waarin het licht verzwakt wordt, vindt men door deeling van den uitslag van den galvanometer met verzwakker voor de thermozuil, door dien zonder verzwakker. Door een holle lens voor de verzwakkers te plaatsen was het mogelijk de convergentie van den lichtbundel te wijzigen. Deze bleek binnen wijde grenzen geen invloed te hebben.

Er werden vijf verzwakkers gebruikt, die resp. 68.0, 46.8, 32.5, 21.3 en 14.7 % van het opvallende licht doorlieten.

De zwartingen werden bepaald met den microphotometer van MOLL [1]). In de geregistreerde krommen, behoorende bij het onverzwakte en het op boven beschrevene wijze verkregen verzwakte lijnensysteem, werd het maximum van een der lijnen, bijv. van de sterkste van het systeem, opgezocht. De zwarting van dit punt werd voor de verschillende spectra tegen de intensiteit uitgezet, waarbij,

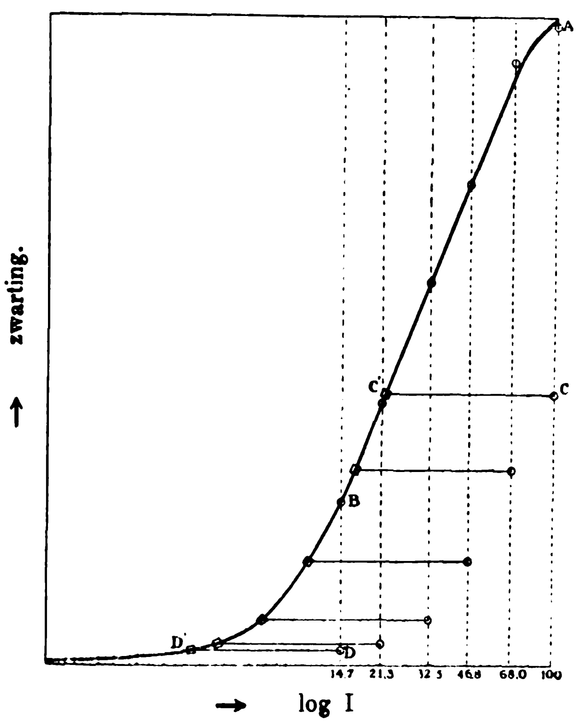


Fig. 2.

1) Kon. Ak. v. Wet., 27, 566, 1919.

zooals gebruikelijk is, de abcis niet met de intensiteit i zelf, maar met $\log i$ evenredig genomen werd. Dit leverde de kromme AB (fig. 2), waarin de intensiteit van de beschouwde lijn in het onverzwakte spectrum willekeurig 100 gesteld is, zoodat de intensiteiten der overige vijf punten de op pag. 397 genoemde waarden hebben.

Indien we nu voor een andere (zwakkere) lijn de intensiteit in het onverzwakte spectrum weer 100 stellen, krijgen we voor deze lijn de kromme CD. De intensiteit van de onverzwakte lijn is echter niet 100, doch kleiner, en de verzwakte intensiteiten zijn ook alle in dezelfde verhouding kleiner. Elk der punten van CD moet dus, onder behoud van de waarde der zwarting, verplaatst worden naar punten, waar de intensiteit in een bepaalde verhouding kleiner is. Daar de abcis $\log i$ voorstelt, beteekent dit een verschuiving van de punten van CD over eenzelfde bedrag naar links. Het bedrag dezer verschuiving is à priori niet bekend, maar moet zoo gekozen worden, dat de punten van CD na de verplaatsing naar $C'D'$ zoo goed mogelijk tusschen die van AB komen te liggen. Dit proces kan voor nog zwakkere lijnen herhaald worden en op deze wijze kan men een zwartingskromme construeeren die van de kleinste tot de grootste der voorkomende intensiteiten reikt, en door vele punten is vastgelegd, terwijl toch slechts zes spectra met bekende intensiteitsverhouding zijn opgenomen.

Met behulp van deze zwartingskromme is de intensiteit in een willekeurig punt van een ander, op dezelfde plaat opgenomen, spectrum te vinden.

3. *Plaatsbepaling.* Om de plaats te bepalen is onder elk spectrum, behalve onder die, welke dienden ter bepaling van de zwartingskromme, een vergelijkingsspectrum opgenomen. Deze vergelijkingsspectra werden gephotographeerd bij denzelfden stand van het échelon, zoodat een bepaalde lijn van deze spectra een vaste plaats [1]) in het beeldvlak van het échelon aangeeft.

De plaats van een bepaalde lijn werd gemeten door met een comparateur van Zeiss den afstand van deze lijn tot een vaste lijn van het vergelijkingsspectrum te bepalen. Het is voldoende dezen afstand voor één lijn van het spectrum met den comparateur te meten en de plaats van de andere lijnen te bepalen uit hun onderlingen afstand. Deze vindt men uit de geregistreerde krommen der spectra, als men eenmaal bepaald heeft, wat de verhouding der afstanden

[1]) Onder plaats en intensiteit van een lijn is hier en elders plaats en intensiteit van het maximaal gezwarte deel van de lijn verstaan. De op pag. 395 genoemde fout speelt dus een rol.

van twee overeenkomstige punten op de photographische plaat en op het registreerpapier is. Deze verhouding is voor den microphotometer een karakteristieke constante. De grootteorde van de fout bij de plaatsbepaling was 0.5 % van den afstand van twee orden, welke 2 m.M. bedroeg.

4. *Resultaten.* Bij de vergelijking van formule (1) met de waarnemingen kan men geen exacte overeenstemming verwachten. Deze formule geldt n.l., als het licht het échelon scheef doorloopt, slechts als eerste benadering. In dit geval stelt α den hoek van het licht met de optische as van collimator en kijker voor. Dat (1) de intensiteiten niet exact weergeeft, volgt o. a. reeds uit het feit, dat de afstand van twee orden niet $\alpha_0 = \frac{\lambda}{\sigma}$ bedraagt, d. w. z. niet onafhankelijk is van den stand van het échelon. Door draaiing van het échelon verandert deze afstand zeer merkbaar en wel neemt hij toe, naarmate het échelon zich meer verwijdert van den stand, waarbij het licht evenwijdig met de treden loopt. Het verschil tusschen den grootsten en den kleinsten afstand der orden, dien wij hebben waargenomen, bedroeg ongeveer 10 % van dien afstand. Wij hebben ons echter met deze bijzonderheden niet nader beziggehouden en er ons toe beperkt alle afstanden op te geven als fractie van den afstand der orden in het betreffende spectrum.

De metingen zijn uitgevoerd aan drie componenten van de groene kwiklijn, n.l. aan de zoogenaamde hoofdlijn en twee satellieten ($d\lambda = -0{,}0242\,\mu\mu$ en $d\lambda = +0{,}0078\,\mu\mu$, Nag. en Tak. l.c.). Ieder dezer lijnen geeft in zijn verschillende orden en in de verschillende standen van het échelon een reeks van punten van een kromme, die het verband van intensiteit en plaats aangeeft. De op deze wijze verkregen drie krommen zijn gereduceerd op éénzelfde waarde van de maximale intensiteit, welke bereikt wordt als de lijn in het centrum van het beeldvlak staat[1]). Fig. 3 geeft de waargenomen punten, waarbij · op de hoofdlijn, o en + resp. op de sterkere en zwakkere satelliet betrekking hebben. De getrokken kromme stelt de theoretische intensiteitsverdeeling voor.

In de omgeving van het maximum is de overeenstemming voldoende. Ook de hoogte van de zwakkere maxima aan beide zijden stemt met de theorie overeen, als men bedenkt, dat de nauwkeurigheid bij deze kleine intensiteiten niet zoo groot is. Een aanzienlijke afwijking valt echter te constateeren in de omgeving van de plaats

[1]) De waarnemingen leeren, dat werkelijk iedere lijn zijn maximum in hetzelfde punt van het beeldvlak heeft.

waar de intensiteit nul wordt. Hier is de waargenomen intensiteit veel grooter dan de theorie doet verwachten [1]). Daar de drie onderzochte lijnen een zeer verschillende intensiteit hebben en toch dezelfde

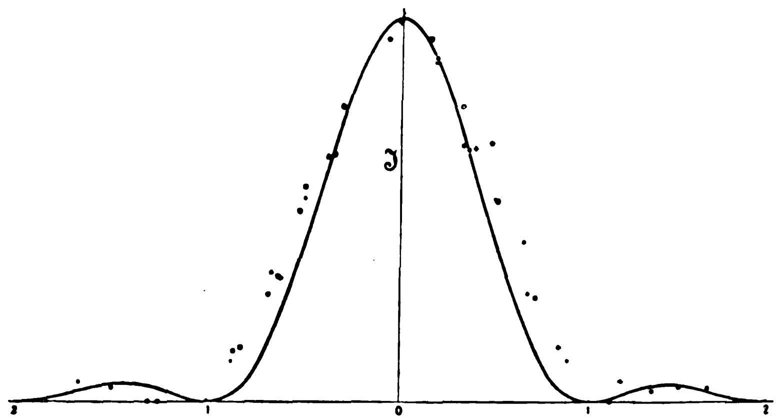


Fig. 3.

afwijking van de theoretische kromme vertoonen, kan deze afwijking niet aan een systematische fout in de intensiteitsbepalingen toegeschreven worden. Het is zeer wel mogelijk, dat de reeds vroeger genoemde benaderingen in de theorie het niet overeenstemmen van experiment en theorie althans ten deele veroorzaken. Beperkt men zich echter tot het centrale gedeelte der kromme, dan is de overeenstemming voldoende. Om uit de met een échelon waargenomen intensiteitsverdeeling in een lijnensysteem de ware intensiteiten af te leiden, zal men dus goed doen te zorgen, dat de te vergelijken lijnen in het centrale deel van het buigingsbeeld liggen.

Instituut voor Theor. Nat.
Physisch Laboratorium.

Utrecht Sept. 1920.

[1]) Het is echter ook mogelijk, dat de breedte der ware intensiteitsverdeeling grooter is dan die, welke volgt uit den afstand der orden. De plaats waar de intensiteit nul wordt, ligt nl. verder van het centrum verwijderd dan uit de theorie volgt.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer P. E. VERKADE: „*Over de aantastbaarheid van organische verbindingen door micro-organismen.* II [1]). (*De oplosbaarheid van enkele organische zuren in vette oliën*").

(Mede aangeboden door den Heer VAN ITERSON).

1. De grondslagen, waarop de *lipoïdtheorie* van OVERTON-MEYER (welke, gelijk HANS WINTERSTEIN [2]) zoo terecht heeft opgemerkt, twee innig samenhangende, maar toch van elkaar nog goed te onderscheiden deelen omvat, nl. de *theorie der electieve permeabiliteit van den celwand* en de *lipoïd-theorie der narcose*) berust, blijken het beste uit de volgende citaten uit één van OVERTON's publicaties: [3])

> „Es fiel mir nämlich schon frühzeitig auf, dass alle solche Verbindungen, welche in *Aether*, *fetten Oelen* und ähnlichen Lösungsmitteln leicht löslich sind, resp. leichter löslich sind als in Wasser, denn hierauf kommt es hauptsächlich an, durch den lebenden Protoplast mit grösster Schnelligkeit eindringen, während für solche Verbindungen, welche zwar in Wasser leicht, in Aethylaether oder fettem Oel gar nicht oder nur sehr wenig löslich sind, der Protoplast nicht merklich oder nur äusserst langsam durchlässig ist."

en iets verder:

> „Bei der weiteren Verfolgung des Gegenstandes zeigte es sich, dass, wenn man von einer relativ langsam eindringenden Verbindung ausgehend, solche Substitutionen an dem Molekül vornimmt, dass die Löslichkeit in Aether, fettem Oel etc. zunimmt, diejenige in Wasser aber abnimmt, zugleich die Schnelligkeit des Durchtritts durch den lebenden Protoplast erhöht wird."

Als vette olie werd — tenminste voor zoover uit de literatuur nagegaan kan worden — uitsluitend olijfolie gebruikt, waarschijnlijk omdat deze olie in zeer goede qualiteit in den handel verkrijgbaar is.

OVERTON [4]) tracht nu deze feiten te verklaren door aan te nemen:

> „dass die Grenzschichten des Protoplasts von einer Substanz imprägniert sind, deren Lösungsvermögen für verschiedene Verbindungen mit denjenigen eines fetten Oeles nahe übereinstimmt...."

---

[1]) Eerste mededeeling: VERKADE en SÖHNGEN: Versl. Kon. Akad. v. Wetenschappen Amsterdam **28**, 359 (1919); Centralbl. f. Bakteriologie (2) **50**, 81 (1920).

[2]) Die Narkose (Berlin 1919).

[3]) Vierteljahresschr. d. naturf. Gesellsch. Zürich **44**. 88 (1899).

[4]) ibid.

De doorlaatbaarheid van den celwand voor een of andere verbinding, resp. de narcotische werking van deze verbinding op de cel zou nu beheerscht worden door den verdeelingscoëfficient „plasmahuidvetstof”-water dezer verbinding; daar deze verdeelingscoëfficient door het experiment niet (in ieder geval niet met eenige zekerheid) kan worden bepaald [1]) (z.o.), wordt steeds in plaats hiervan van den verdeelingscoëfficient *olijfolie-water* gebruik gemaakt, waarbij dan aangenomen wordt, dat tusschen deze beide verdeelingscoëfficienten voor verschillende stoffen een volkomen parallelisme — om niet te zeggen: proportionaliteit — bestaat.

Ook HANS H. MEYER, [2]) welke terzelfdertijd geheel onafhankelijk van OVERTON tot eenzelfde theorie der narcose kwam, legde aan zijn beschouwingen den verdeelingscoëfficient olijfolie-water der onderzochte verbindingen ten grondslag.

2. Voor een drietal organische zuren (benzoëzuur, salicylzuur en kaneelzuur) hebben wij nu de oplosbaarheid bij 25°.0 C. in een aantal zeer zorgvuldig geraffineerde vette oliën bepaald. De resultaten dezer bepalingen — waaromtrent in het Centralbl. f. Bakteriologie nadere mededeelingen zullen verschijnen — zijn vereenigd in de onderstaande tabel:

TABEL I.

	Oplosbaarheid in grammen per 100 gram olie.			
	Olijfolie.	Katoenolie.	Arachisolie I.	Arachisolie II.
kaneelzuur	1.29	1.44	1.62	1.42
salicylzuur	2.43	2.55	2.82	2.39
benzoëzuur	3.96	4.22	4.78	3.98
	Cocosolie.	Lijnolie.	Ricinusolie.	
kaneelzuur	1.77	1.66	7.52	
salicylzuur	3.18	3.42	14.81	
benzoëzuur	4.98	4.27	14.70	

Deze cijfers geven aanleiding tot een aantal opmerkingen en conclusies:

[1]) Vgl. OVERTON: Studien über die Narkose (Jena 1901) pag. 54, 69.

[2]) Archiv. f. exper. Pathol. und Pharmacologie **42,** 109 (1899); **46,** 338 (1901) — BAUM: ibid. **42** 119 (1899).

a. In de eerste plaats moet ons wel frappeeren, dat het oplossend vermogen van twee monsters zuivere arachisolie [1]) voor deze zuren zoo sterk uiteenloopend bleek. Het verschil bedraagt nl.:

voor kaneelzuur	± 14 °/₀	in dezelfde richting [2]).
voor salicylzuur	± 18 „	
voor benzoëzuur	± 20 „	

Ditzelfde blijkt bij vergelijking van enkele onzer gegevens met door WATERMAN [3]) gepubliceerde, al moet hier ook direct bijgevoegd worden dat deze de oplosbaarheid op een andere en minder nauwkeurige methode bepaalde dan wij. Deze vond nl. voor de oplosbaarheid in olijfolie bij 25°:

van salicylzuur 2.59 gr. per 100 gr. olie (dus 6.6 °/₀ meer dan wij)
van benzoëzuur 4.33 gr. per 100 gr. olie (dus 9.9 °/₀ meer dan wij).

Hieruit volgt onweerlegbaar, *dat de oplosbaarheid van een of ander zuur in een bepaalde olie geenszins een constante is,* maar dat zij varieert met de onvermijdelijke schommelingen in de samenstelling dezer vette olie. Ongetwijfeld laat zich ditzelfde ook voor andere stoffen dan organische zuren bewijzen; wij hebben deze laatste slechts gekozen, omdat zij gemakkelijk en nauwkeurig langs titrimetrischen weg kwantitatief te bepalen zijn.

b. Van de zes onderzochte oliën komen olijfolie, katoenolie, arachisolie en cocosolie in hun chemische samenstelling in zooverre overeen, dat zij alle in hoofdzaak bestaan uit glyceriden van verschillende zuren der vetzuur-reeks, benevens van oliezuur en van linolzuur. De verschillen zitten hier hoofdzakelijk in de verschillende verhoudingen, waarin deze zuren in de glyceriden voorkomen; zoo bevat cocosolie b.v. veel trilaurine en trimyristine, daarentegen slechts weinig glyceriden der onverzadigde zuren (het joodgetal is dan ook zeer laag), olijfolie juist weer zeer aanzienlijke hoeveelheden van deze laatste (tengevolge waarvan het joodgetal veel hooger is) enz.

Naar nu uit tabel I blijkt, *treffen wij ook bij deze overeenkomende oliën een zeer verschillend oplossend vermogen voor de onderzochte zuren aan.* Het verschil tusschen de hoogste en de laagste der gevonden oplosbaarheden is nl.:

bij kaneelzuur ± 37 °/₀
bij salicylzuur ± 33 °/₀
bij benzoëzuur ± 26 °/₀

[1]) Zie de uitvoerige mededeeling in het Centralbl. f. Bakteriologie.

[2]) Hier en in het vervolg is bedoeld: °/₀ van het *laagste* bedrag.

[3]) Proefschrift Delft (1913) pag. 79 e.v.; Centralbl. f. Bakteriologie **42,** 639 (1914) enz.

In tabel II zijn de verhoudingen van de oplosbaarheden der drie onderzochte zuren in elk dezer vette oliën aangegeven, waarbij de oplosbaarheid van kaneelzuur steeds = 1 is aangenomen. *Van een proportionaliteit der oplosbaarheden* (en dus ook der verdeelings-

TABEL II.

	Olijfolie.	Katoenolie.	Arachisolie I.	Arachisolie II.	Cocosolie.
kaneelzuur	1	1	1	1	1
salicylzuur	1.88	1.77	1.74	1.68	1.80
benzoëzuur	3.07	2.93	2.95	2.80	2.81

coefficienten vette olie-water) *is* — naar uit deze cijfers duidelijk blijkt — *geen sprake*; de schommelingen zijn zelfs zoo aanzienlijk, dat het parallelisme tusschen de oplosbaarheden (en dus ook de verdeelingscoëfficienten vette olie-water) in de verschillende oliën reeds in het gedrang komt.

c. Gaan wij nu over tot de lijnolie[1]), welke een geheel andere samenstelling heeft, daar zij voor het grootste gedeelte uit glyceriden

TABEL III.

	Oplosbaarheidsverhouding.	
	Lijnolie.	Ricinusolie.
kaneelzuur	1	1
salicylzuur	2.07	1.97
benzoëzuur	2.57	1.95

van linoleenzuur en isolinoleenzuur bestaat, dan zien wij, dat de oplosbaarheidsverhoudingen zich zoo ingrijpend en schijnbaar ongemotiveerd wijzigen, dat zelfs van parallelisme der oplosbaarheden van onze zuren (en dus ook der verdeelingscoëfficienten vette olie-water) geen sprake meer is. Terwijl bv. kaneelzuur en benzoëzuur in lijnolie minder oplosbaar zijn dan in cocosolie, is de oplosbaarheid van salicylzuur juist in de eerste olie het grootste.

[1]) Hier zij even opgemerkt, dat een dergelijke sterk drogende olie natuurlijk geenerlei overeenkomst kan vertoonen met eventueele lipoïden van den celwand. Wij onderzochten echter ook deze olie, daar zij een geheel apart type vertegenwoordigt.

d. Veel sterker nog doen deze feiten zich gevoelen bij de ricinusolie, vooral bestaande uit glyceriden van „ricinolzuur" $C_{18}H_{34}O_3$. Deze olie neemt trouwens een geheel aparte plaats in: zij is in alle verhoudingen mengbaar met alcohol en zeer moeilijk oplosbaar in petroleumaether. De oplosbaarheid van alle drie de zuren in deze olie is belangrijk grooter dan die in eenige andere der onderzochte oliën (zie Tabel I); opvallend is het vooral, *dat de oplosbaarheid van salicylzuur in deze olie die van benzoëzuur zelfs nog iets overtreft* [1]).

Bepalen wij nu eens de verdeelingscoëfficienten van de drie zuren tusschen olijfolie, resp. ricinusolie en water met behulp van de volgende oplosbaarheden der zuren in water:

kaneelzuur	0.0546 gr.	per	100 gr.	water	[2])
salicylzuur	0.223 „	„	100 „	„	[3])
benzoëzuur	0.34 „	„	100 „	„	[4])

Wij vinden dan:

TABEL IV.

	$V.G.^{25} = \dfrac{\text{gr. stof in 100 gr. olie}}{\text{gr. stof in 100 gr. water}}$	
	Olijfolie.	Ricinusolie.
kaneelzuur	23.6	138
salicylzuur	10.9	66.4
benzoëzuur	11.6	43.2

Volgens OVERTON zou dus benzoëzuur iets gemakkelijker in de levende cel binnendringen dan salicylzuur en dus ook eventueel iets sterker narcotisch werkzaam zijn. Hadden wij daarentegen de oplosbaarheid der zuren *in ricinusolie* als grondslag onzer beschouwingen aangenomen, dan waren wij tot de omgekeerde conclusie gekomen, dat de plasmawand aanmerkelijk meer doorlaatbaar was voor salicylzuur dan voor benzoëzuur en dat het eerste zuur dus het sterkste narcoticum resp. desinfectans zou zijn.

Bij vergelijking van de verdeelingscoëfficienten der zuren tusschen

---

[1]) Te meer valt dit ons op, daar ricinusolie juist uit glyceriden van *oxy*zuren bestaat en salicylzuur een *oxy*benzolcarbonzuur is. De bekende oplosbaarheidsregel gaat dus ook hier weer eens door.

[2]) JUL. MEYER: Z. f. Elektrochemie **17**, 978 (1911).

[3]) Dit cijfer is een gemiddelde uit de meest waarschijnlijke gegevens, medegedeeld in de tabellen van LANDOLT—BÖRNSTEIN—ROTH.

[4]) Vgl. onder [3]).

de andere oliën eenerzijds en water anderzijds komen wij tot analoge tegenstrijdigheden. Wij zien er vanaf deze gegevens hier te bespreken, daar zij geen nieuwe gezichtspunten openen.

3. Uit dit cijfermateriaal valt nu de volgende belangrijke conclusie te trekken:

Al erkennen wij de juistheid van OVERTON's opvatting betreffende de electieve permeabiliteit van den celwand en de narcotische werking van allerlei verbindingen op de cel als gevolg van de aanwezigheid van een „plasmahuid-vetstof", dan zijn besluiten omtrent het gedrag van zekere verbindingen tegenover de cel alléén dan uit de grootte van den verdeelingscoëfficient olijfolie-water te trekken, indien deze „plasmahuid-vetstof" met olijfolie in buitengewoon nauw verband staat.

Omtrent deze „plasmahuidvetstof" weten wij niets, maar met bijna absolute zekerheid valt te zeggen, dat — *zoo zij bestaat* — de chemische samenstelling een geheel andere zal zijn dan die van olijfolie. Bepalingen van den verdeelingscoëfficient olijfolie-water zijn dan echter ter beoordeeling van permeabiliteits-vragen waardeloos. Dit blijkt ook reeds uit de literatuur. Reeds bij vluchtige beschouwing van het cijfermateriaal, door OVERTON [1]) en door BAUM [2]) gepubliceerd, bemerkt men, dat de verdeelingscoëfficient olijfolie-water en de sterkte der narcotische werking in het algemeen wel in dezelfde richting veranderen, doch dat van een proportionaliteit of zelfs maar een benaderende overeenstemming in de orde van grootte meestal in het geheel geen sprake is. Bovendien hebben wij in onze eerste mededeeling kunnen aantoonen, dat de verdeelingscoëfficient olijfolie-water volstrekt niet kan dienen ter verklaring van de al- of niet-assimileerbaarheid van onverzadigde carbonzuren door schimmels.

De reden hiervan is nu duidelijk: *de oplosbaarheid van een stof in olijfolie staat geheel op zichzelf, levert volstrekt geen aanknoopingspunt voor de oplosbaarheid in eenige andere vette olie.*

4. OVERTON [3]) heeft over den bouw van de „plasmahuid-vetstof" de volgende meening geuit:

> „Nach vielem Nachdenken neige ich immer mehr zu der Vermutung, dass das *Cholesterin* [4]) oder eine Cholesterinartige Verbindung (etwa eine Cholesterinester), resp. ein Gemisch solcher Verbindungen die imprägnierenden Substanzen sein dürften. Es

---

[1]) Vgl. Studien über die Narkose (Jena 1901) pag. 100 e.v.

[2]) loc. cit.

[3]) Vierteljahresschr. d. naturf. Gesellsch. Zürich **44**, 88 (1899).

[4]) Ook phytosterine enz. zijn natuurlijk hieronder begrepen.

wäre übrigens sehr wohl denkbar, dass Lecithin und in gewissen Fällen fettes Oel ebenfalls beteiligt sind, indem das Cholesterin demselben etwelchen Schutz vor der Verseifung gewähren dürfte".

Het behoeft geen betoog, dat indien werkelijk de plasmahuid met een dergelijk cholesterine-lecithinemengsel (door OVERTON „lipoïde" genoemd) doordrenkt was, dus met stoffen absoluut verschillend in chemische samenstelling van vette oliën, de verdeelingscoëfficient olijfolie-water in het minst geen maatstaf zou vormen voor het gedrag van een of andere verbinding tegenover de levende cel, *daar deze verdeelingscoëfficient niet de minste overeenkomst behoeft te hebben met die derzelfde verbinding tusschen dit „lipoïde" en water*. Te meer niet, waar ook de physische eigenschappen van vette oliën en „lipoïden" zeer sterk uiteenloopen: de laatsten zijn bv. lyophile colloïden, zwellen met water op (met uitzondering van cholesterine enz., dat volgens LOEWE[1]) dan ook tot een aparte klasse van „*semi-lipoïden*" moet worden gerekend) en geven dus aanleiding tot geheel andere omstandigheden. OVERTON[2]) heeft dit bezwaar ook gevoeld en er reeds zelf argumenten voor aangevoerd (welke intusschen nog wel voor kritiek vatbaar en ook reeds aangevochten zijn); terwijl nl. de in den handel voorkomende zouten van basische aniline-kleurstoffen in olijfolie bijna of geheel onoplosbaar zijn, lossen zij in gesmolten of in olie opgelost cholesterine en ook in lecithine gemakkelijk op[3]). Zelf heb ik dit nog eens voor een aantal kleurstoffen kunnen bevestigen.

5. Er zou voor ons geen reden geweest zijn tot deze kritiek op de lipoïdtheorie — immers deze is door tallooze onderzoekers reeds bestreden en kan vrijwel als weerlegd gelden —, wanneer niet in den laatsten tijd WATERMAN[4]) opnieuw uitdrukkelijk het parallelisme tusschen de verdeelingscoëfficienten lipoïdbestanddeelen-water en olijfolie-water had uitgesproken en getracht had door vergelijking der laatstgenoemde verdeelingscoëfficienten van verschillende verbindingen eene verklaring te geven voor de meerdere of mindere gemakkelijkheid, waarmede deze verbindingen door *Penicillium glaucum* worden geassimileerd. Uit het hierboven door ons medegedeelde moge nu blijken, dat de goede resultaten, welke WATERMAN met deze

[1]) Biochem. Zeitschr. **42,** 217 (1912).

[2]) Jahrb. f. wissensch. Botanik **34,** 669 (1900).

[3]) LOEWE (loc. cit.) heeft later het gedrag van „lipoïden" en „semilipoïden" tegenover kleurstoffen (methyleenblauw) zorgvuldig bestudeerd en uit zijn resultaten krachtige argumenten tegen de OVERTON-MEYER'sche theorie afgeleid.

[4]) Proefschrift Delft (1913); Centralbl. f. Bakteriologie **42,** 639 (1914) enz,

poging heet te hebben bereikt, aan toevallige omstandigheden moeten worden toegeschreven, dat aan hen in geen geval een algemeene beteekenis mag worden toegeschreven. Bevestigd wordt dit nog door onze in onze eerste mededeeling [1]) vervatte onderzoekingen over de assimilatie van onverzadigde zuren door *Penicillium glaucum* en *Aspergillus niger*; aannemende dat de lipoïdoplosbaarheid dezer zuren vergelijkbaar is met die in olijfolie, was een verklaring voor het gedrag dezer stoffen tegenover de schimmels toch nog allerminst mogelijk.

Laboratorium der Nederl. Handels-Hoogeschool.
Rotterdam, 19 Augustus 1920.

---

[1]) VERKADE en SÖHNGEN: loc. cit.

Natuurkunde. — De heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. KRAMERS: „*Over de toepassing van* EINSTEIN'S *gravitatietheorie op een stationair zwaarteveld* I".

(Mede aangeboden door den Heer EHRENFEST).

§ 1. *Definitie en invariante eigenschappen van een stationair zwaarteveld.*

Wij noemen een zwaarteveld „stationair" wanneer de uitdrukking voor het lijnelement op zoodanigen vorm gebracht kan worden $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ [1]) (x_0 tijdkoordinaat) dat de gravitatiepotentialen $g_{\mu\nu}$ onafhankelijk zijn van den tijd x_0. Het zoogenaamde „statische" zwaarteveld is een speciaal geval van het op deze wijze gedefinieerde stationaire zwaarteveld, en doet zich voor wanneer het bovendien mogelijk is g_{01}, g_{02} en g_{03} te doen verdwijnen. Het is eenvoudig in te zien dat wanneer voor een stationair zwaarteveld het lijnelement op bovenvermelden vorm gebracht is, de meest algemeene transformatie der koordinaten waarbij de onafhankelijkheid der $g_{\mu\nu}$'s van den tijd bewaard blijft, en waarbij een punt dat in rust was in rust blijft [2]), gegeven is door de formules

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \varphi_k (x'_1, x'_2, x'_3), \qquad (k = 1, 2, 3) \\ x_0 &= a x'_0 + \psi (x'_1, x'_2, x'_3). \end{aligned}\right\} \quad . \quad (1)$$

Hier zijn φ_k en ψ willekeurige functies van x'_1, x'_2, x'_3, terwijl a een positieve constante is. Tegenover de groep van transformaties uitgedrukt door (1) vertoonen de grootheden $g_{\mu\nu}$ en hunne afgeleiden zekere invariante en covariante eigenschappen die wij nu zullen aangeven. Het lijnelement kan steeds in den volgenden vorm geschreven worden

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu &= -\Sigma\, G_{kl}\, dx_k dx_l + \frac{1}{g_{00}} (g_{00} dx_0 + g_{01} dx_1 + g_{02} dx_2 + g_{03} dx_3)^2, \\ G_{kl} &= -g_{kl} + \frac{g_{0k}\, g_{0l}}{g_{00}}, \end{aligned}\right\} . \quad (2)$$

[1]) Evenals bij EINSTEIN zijn sommatieteekens over indices die tweemaal voorkomen in een product weggelaten.

[2]) Deze bepaling is noodig omdat het kan voorkomen, in speciale gevallen, dat ook bij nog andere transformaties dan (1) de onafhankelijkheid der $g_{\mu\nu}$'s van den tijd bewaard blijft

waarbij de sommatie is uit te voeren over $k,l = 1, 2, 3$. Als in 't vervolg een index slechts een der waarden 1, 2, 3 kan aannemen zullen wij dien index door een Latijnsche letter voorstellen. Kan een index daarentegen een van de waarden 0, 1, 2, 3 aannemen dan zal hij steeds door een Grieksche letter worden voorgesteld. Ingeval van sommatie over een tweemaal voorkomenden index zal in beide gevallen het sommatie-teeken worden weggelaten. Voeren wij nu de transformatie (1) uit, dan gaat $G_{kl}\, dx_k\, dx_l$ wederom in een quadratischen vorm van de differentialen der ruimte-coordinaten over, en $\frac{1}{g_{00}}\,(g_{0\mu}\, dx_\mu)^2$ wederom in het quadraat van een lineairen differentiaalvorm. Aangezien de verdeeling van de uitdrukking voor 't lijnelement, aangegeven in (2), slechts op één manier mogelijk is, mogen we dus besluiten dat de uitdrukkingen

$$G_{kl}\, dx_k\, dx_l \quad \text{en} \quad \frac{(g_{0\mu}\, dx_\mu)^2}{g_{00}}$$

invariant zijn tegenover de transformatie (1). De grootheden $g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}$ bezitten bijgevolg vector-karakter, en hieruit leiden we verder af dat de bilineaire differentiaalvorm

$$g_{00}^{s-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{g_{0\nu}}{g^s_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{g_{0\mu}}{g^s_{00}}\right) \right\} dx_\mu\, dx_\nu$$

ook invariant is tegenover de transformatie (1). De constante s mag willekeurig gekozen worden omdat de grootheid g_{00} bij de transformatie slechts met een constanten factor vermenigvuldigd wordt. Kiezen wij speciaal $s = 1$ dan zien we dat alle termen waarvoor $\mu = 0$ of $\nu = 0$ gelijk aan nul worden, zoodat we in dit geval den index 0 kunnen veronachtzamen bij de sommatie en we verkrijgen het resultaat dat de uitdrukking

$$\sqrt{g_{00}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{g_{0k}}{g_{00}}\right) \right\} dx_k\, dx_l \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

een invariante is. Daar de coefficienten van dezen differentiaalvorm antisymmetrisch in de indices k en l zijn, kunnen we (4) als een lineairen vorm van de differentialen $dx_{kl} = dx_k dx_l - dx_k dx_l$ beschouwen. Aangezien nu voor een driedimensionale uitgebreidheid de uitdrukking $\Sigma\sqrt{G}\, Dx_m dx_{kl}$, waar G den determinant van de coefficienten G_{kl} in de uitdrukking $d\varrho^2 = G_{kl}\, dx_k dx_l$ voor het invariante lijnelement voorstelt, en waar bij de sommatie k,l,m achtereenvolgens de stellen waarden 1, 2, 3 en 2, 3, 1 en 3, 1, 2 aannemen, invariant blijft bij een willekeurige coordinatentransformatie, transformeeren zich de grootheden $\sqrt{G}dx_{kl}$ als de componenten van een covarianten vector (waarbij we, zooals gewoonlijk gedaan wordt, de trans-

formatie van de componenten dx_k van een kleine verschuiving contravariant noemen). Uit de invariantie van de uitdrukking (4) kunnen we dus besluiten dat de grootheden

$$R^m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_{00}}{G}}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{g_{0k}}{g_{00}}\right)\right\},^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarbij k,l,m wederom de stellen waarden 1, 2, 3 en 2, 3, 1 en 3, 1, 2 kunnen aannemen, tegenover de transformatie (1) zich verhouden als de contravariante componenten van een vector in de driedimensionale uitgebreidheid met het invariante lijnelement $d\varrho^2 = G_{kl}\, dx_k dx_l$. De invariante absolute waarde R van dezen vector is bepaald door $R = \sqrt{G_{kl}\, R^k R^l}$.

Als de componenten R^m overal gelijk zijn aan nul hebben we met een statisch zwaarteveld te doen. Inderdaad, uit (5) volgt dat dan de grootheden g^{0k}/g_{00} kunnen worden afgeleid van een potentiaal φ zoodanig dat $g_{0k} = g_{00}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k}$, maar hieruit volgt weer dat het lijnelement geschreven kan worden in den vorm $ds^2 = - G_{kl}\, dx_k dx_l + g_{00} dx_0'^2$, waar $x_0' = x_0 + \varphi$. Als de componenten R^m niet gelijk zijn aan nul bepalen zij in ieder punt wat men zou kunnen noemen de „rotatorische" eigenschappen van het stationaire zwaarteveld. We zullen beginnen met dit te illustreeren door de beweging van een massapunt te beschouwen waarvan de snelheid klein is t.o.v. de lichtsnelheid. Voor de wereldlijn van een massapunt gelden de vergelijkingen

$$\frac{d^2 x_\lambda}{ds^2} + \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \lambda\end{matrix}\right\}\frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx_\nu}{ds} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Veronderstellen we nu dat een zoodanige coordinatentransformatie van de soort (1) is uitgevoerd dat in een punt P van de wereldlijn het lijnelement den vorm $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ aanneemt, dan is het gemakkelijk te verifieeren dat de vergelijkingen (6), met verwaarloozing van kleine termen van dezelfde orde van grootte als het quadraat van de snelheid, zich voor het punt P reduceeren tot

$$\frac{d^2 x_k}{dx_0^2} = 2\left(R^l \frac{dx_m}{dx_0} - R^m \frac{dx_l}{dx_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x_k}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarbij k,l,m evenals vroeger de stellen waarden 1, 2, 3 en 2, 3 1 en 3, 1, 2 kunnen aannemen.

Deze vergelijkingen leeren ons dat de „kracht" welke het zwaarteveld in 't punt P op de eenheid van massa uitoefent kan beschre-

[1]) Als we alleen zulke transformaties toelaten voor welke de functionaaldeterminant positief is, mogen we met het wortelteeken steeds den positieven wortel bedoelen.

ven worden als de som van een Coriolis-kracht welke loodrecht staat op en evenredig is met de snelheid, en een kracht die van een potentiaal $\frac{1}{2} g_{00}$ is afgeleid.

Beschouwt men nu hiernaast de beweging van een massapunt in een conservatief krachtveld, zooals die volgens de mechanica van NEWTON zou plaats vinden, dan verkrijgt men bewegingsvergelijkingen van denzelfden vorm als (7), als men de Cartesische coordinaten van het massapunt laat betrekking hebben op een uniform in de ruimte roteerend coordinatensysteem. Inderdaad, wanneer de bewegingsvergelijkingen in het niet-draaiend coordinatensysteem den vorm

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

hebben, verkrijgen ze in een coordinatensysteem x_1', x_2', x_3' dat roteert om een as door het nulpunt met een hoeksnelheid R die, beschouwd als vector, de componenten $-R^1, -R^2$ en $-R^3$, heeft [1]), den vorm

$$\frac{d^2 x'_k}{dt^2} = 2\left(R^l \frac{dx'_m}{dt} - R^m \frac{dx'_l}{dt}\right) - \frac{\partial (\varphi - \psi)}{\partial x'_k},$$

$$\psi = \tfrac{1}{2} R^2 (x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) - \tfrac{1}{2} (R^1 x'_1 + R^2 x'_2 + R^3 x'_3)^2,$$

welke geheel met dien der vergelijkingen (7) overeenkomt als we $t = x_0$ en $\varphi - \psi = \frac{1}{2} g_{00}$ zetten. Het essentieele verschil met de bewegingsvergelijkingen in het niet-draaiend coordinatensysteem ligt dus in het optreden van de Coriolis-kracht en we zijn gerechtvaardigd den vector R^k in het stationaire zwaarteveld in 't vervolg met den naam *rotatie-vector* aan te duiden.

Het karakter van den rotatie-vector kunnen we verder verduidelijken door na te gaan in hoeverre het mogelijk is door een coordinatentransformatie van den vorm (1) het lijnelement van een stationair zwaarteveld op zoodanigen vorm te brengen dat in een gegeven punt P niet alleen geldt $g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}$, waar de grootheden $\varepsilon_{\mu\nu}$ gedefinieerd zijn door

$$\varepsilon_{00} = -\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33} = 1, \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu), \quad . \quad (8)$$

maar dat zooveel mogelijk tevens de grootheden $\dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_k} = g_{\mu\nu,k}$ gelijk aan nul worden. Was het mogelijk al deze grootheden gelijk aan nul te maken dan zouden we te doen hebben met een coördinaten-

[1]) Hier en in 't vervolg gelde steeds de gewone regel dat aan een draaiingszin in een plat vlak een richting van de normaal is toegevoegd op zoodanige wijze dat bij een draaiing in het x_1, x_2-vlak van de positieve x_1-as naar de positieve x_2-as over een hoek kleiner dan π, de bijbehoorende normaal in dezelfde ruimtehelft wijst als de positieve x_3-as.

systeem dat in P „geodetisch" was. Nu is het steeds op vele manieren mogelijk door middel van een transformatie (1) de grootheden $g_{\mu\nu}$ in P de waarden $\varepsilon_{\mu\nu}$ te doen aannemen, maar in 't algemeen zal het niet mogelijk zijn alle grootheden $g_{\mu\nu,k}$ te doen verdwijnen. Dit is in de eerste plaats gemakkelijk in te zien voor de grootheden $g_{00,k}$, omdat g_{00} bij de transformatie (1) slechts met een constanten factor vermenigvuldigd wordt. Maar ook de grootheden $g_{0k,l}$ kunnen niet alle tegelijk aan nul gelijk worden omdat zulks zou beduiden dat de componenten van den rotatievector gelijk aan nul zouden worden, iets wat in het algemeen natuurlijk niet mogelijk is. Daarentegen is het wel mogelijk de grootheden $g_{kl,n}$ te doen verdwijnen, door namelijk een zoodanige transformatie uit te voeren dat het coordinaatsysteem in de driedimensioneele uitgebreidheid met het lijnelement $d\sigma^2 = G_{kl}\,dx_k\,dx_l$ geodetisch wordt in het punt P. Want dan heeft men $\frac{\partial G_{kl}}{\partial x_n} = 0$ en bijgevolg ook $g_{kl,n} = 0$, omdat $g_{kl} = -G_{kl} + \frac{g_{k0}\,g_{l0}}{g_{00}}$ en omdat de grootheden g_{k0} in 't punt P reeds gelijk zijn aan nul.

Men denke zich nu dat met behulp van (1) het lijnelement op zoodanigen vorm gebracht zij dat in een gegeven punt P de volgende betrekkingen gelden

$$\left.\begin{array}{ll} a) & g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} \\ b) & g_{kl,\nu} = 0 \\ c) & g_{0k,l} + g_{0l,k} = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Dat de symmetrische grootheden $A_{kl} = g_{0k,l} + g_{0l,k}$ in P gelijk aan nul worden kan men steeds verkrijgen door een doelmatige tijdtransformatie uit te voeren. Veronderstellen wij namelijk dat wel aan (a) en (b) voldaan is, maar niet aan (c), dan is het gemakkelijk in te zien dat de transformatie $x'_0 = x_0 + \frac{1}{2}(A_{kl})_P(x_k - (x_k)_P)(x_l - (x_l)_P)$ ons tot het gewenschte doel brengt, waarbij we de waarde van een grootheid in 't punt P door toevoeging van den index P rechts onderaan hebben aangeduid. Vervolgens denken we ons een coordinatentransformatie uitgevoerd die beantwoordt aan een uniforme rotatie van de x_1, x_2, x_3-ruimte, gedacht als een Euklidische ruimte met het lijnelement $d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, en met een hoeksnelheid welke, als vector beschouwd, R^1, R^2 en R^3 tot componenten heeft, om een as die door het punt P gaat. Wij beweren nu dat bij deze „*rotatie-transformatie*" de bovengenoemde betrekkingen (a) en (b) bestaan blijven, maar dat bovendien alle grootheden $g_{0k,l}$ in P gelijk zullen worden aan nul. Het bewijs hiervoor kan door uit-

rekening bewezen worden en wordt vooral eenvoudig als we, wat zonder de algemeenheid schade te doen kan geschieden, aannemen dat in P de grootheden R^1 en R^2 gelijk aan nul waren, zoodat we met een uniforme rotatie om de richting van de x_3-coördinaat te doen krijgen met een hoeksnelheid $R^3 = \omega$. Daar in 't punt P de grootheden R^k zich reduceeren tot $\frac{1}{2}(g_{0m,l} - g_{0l,m})$ zijn dus ten gevolge van betrekking (c) alleen nog maar de twee gelijke en tegengestelde grootheden $g_{01,2}$ en $g_{02,1}$ van nul verschillend, zoodanig dat $\omega = g_{02,1} = - g_{01,2}$. De rotatie-transformatie kan nu geschreven worden in den vorm

$$x_1 - (x_1)_P = x'_1 \cos \omega x_0 - x'_2 \sin \omega x_0,$$
$$x_2 - (x_2)_P = x'_1 \sin \omega x_0 + x'_2 \cos \omega x_0.$$

Transformeert men met behulp van deze formules het lijnelement (2) en maakt men gebruik van de bovengemelde betrekkingen (a), (b) en (c), dan is het gemakkelijk te verifieeren:

dat voor de getransformeerde grootheden $g'_{\mu\nu}$ in het punt P nog steeds de betrekkingen (a) en (b) gelden,

dat, hoewel de $g'_{\mu\nu}$'s den tijd x_0 zullen bevatten, hun eerste afgeleiden naar den tijd in P gelijk zullen zijn aan nul,

en dat alle eerste afgeleiden van g_{01}, g_{02} en g_{03} gelijk zijn geworden aan nul.

Wij zien dus in de eerste plaats dat na de rotatietransformatie de vergelijkingen voor de wereldlijn van een massapunt waarvan de snelheid klein is t.o.v. de lichtsnelheid in het punt P den eenvoudigen vorm

$$\frac{d^2 x_k}{dx_0^2} = - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x_k}$$

aannemen, zoodat de term beantwoordende aan een Corioliskracht niet meer voorkomt, iets wat natuurlijk na het boven besprokene te verwachten was. Laat ons verder het geval onder oogen zien dat in het punt P een massapunt in evenwicht kan verkeeren, d. w. z. dat in dit punt de grootheden $g_{00,k}$ in het oorspronkelijke coördinatensysteem gelijk zijn aan nul. In dat geval vinden wij dat in het nieuwe, door de rotatie-transformatie ontstane coördinatensysteem alle grootheden $g_{\mu\nu,\rho}$ zonder uitzondering in het punt P verdwijnen, zoodat dit coördinaten-systeem in dat punt geodetisch is.

§ 2. *Over het zwaartereld dat door stationair stroomende massa's wordt opgewekt.*

Wij denken ons een ruimte-tijd-uitgebreidheid voor welke het lijnelement op grooten afstand van het nulpunt der coördinaten tot

$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ [1]) nadert, en waarin zich massa's bevinden die stationaire bewegingen uitvoeren, d. w. z. de componenten $T_{\mu\nu}$ van den energie-tensor der materie hangen niet van den tijd af. Het zwaarteveld dat deze massa's opwekken, zal dan stationair zijn in de in § 1 aangegeven beteekenis en is bepaald door de vergelijkingen van EINSTEIN

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R = -\, 8\, \pi\, \varkappa\, T_{\mu\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin $R_{\mu\nu}$ den z.g.n. verjongden krommings-tensor van 't zwaarteveld voorstelt:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix}\mu\varrho\\ \varrho\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_\rho}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varrho\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\nu\sigma\\ \varrho\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \varrho\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\varrho\sigma\\ \sigma\end{matrix}\right\},$$

terwijl $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Voorts is $\varkappa$ de gravitatieconstante van EINSTEIN die, als we als eenheid van massa het gram kiezen, gelijk is aan 10^{-27}. Nemen we aan dat de $g_{\mu\nu}$'s van het lijnelement dat bij het zwaarteveld behoort slechts weinig afwijken van $\varepsilon_{\mu\nu}$, dan bestaat er een eenvoudige, door EINSTEIN aangegeven, methode om in eerste benadering een oplossing van deze vergelijkingen (10) te krijgen. Deze oplossing verkrijgt men als volgt. Schrijf

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

waar dus de functies $\gamma_{\mu\nu}$ overal een zeer kleine waarde bezitten, en voer in de grootheden $\gamma'_{\mu\nu}$ gedefinieerd door

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, (\varepsilon_{\alpha\beta}\, \gamma_{\alpha\beta}),$$

waaruit volgt

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, (\varepsilon_{\alpha\beta}\, \gamma'_{\alpha\beta}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dan kunnen de waarden der $\gamma'_{\mu\nu}$'s in het punt $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ en op het oogenblik $\overline{x}_0$ berekend worden als geretardeerde potentialen met behulp van de formules

$$\gamma'_{\mu\nu} = -\, 4\varkappa \int \frac{T_{\mu\nu}\, [x_0 = \overline{x}_0 - r]}{r}\, dS \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Hier stelt dS het ruimte-element $dx_1\, dx_2\, dx_3$ voor en r den afstand van dat ruimte-element tot het punt $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ $\overline{x}_3$ $(r^2 = (x_1 - \overline{x}_1)^2 + + (x_2 - \overline{x}_2)^2 + (x_3 - \overline{x}_3)^2)$.

De bijvoeging $x_0 = \overline{x}_0 - r$ beduidt dat men telkens de waarde van $T_{\mu\nu}$ moet gebruiken zooals die was op het oogenblik $\overline{x}_0 - r$. Past men de formules (13) toe op ons geval, waar de $T_{\mu\nu}$'s niet van den tijd afhangen dan mag men klaarblijkelijk de laatste bepaling laten

[1]) Hier, en in 't vervolg, zullen we ons steeds denken dat als eenheid van lengte de centimeter gekozen is; de tijdeenheid is dan bepaald door de vaststelling dat de lichtsnelheid gelijk is aan 1.

vervallen en we krijgen de gewone formules voor statische potentialen

$$\gamma'_{\mu\nu} = - 4\varkappa \int \frac{T_{\mu\nu}}{r} dS \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Nu willen wij in het punt $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ de componenten van den rotatie-vector berekenen. Met verwaarloozing van kleine termen die ten opzichte van de hoofdtermen van dezelfde orde van grootte als de $\gamma'_{\mu\nu}$'s zijn krijgen we voor de x_1-componente van den rotatie-vector

$$R^1 = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{g_{00}}{G}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \overline{x}_2} \left(\frac{g_{30}}{g_{00}} \right) - \frac{\partial}{\partial \overline{x}_3} \left(\frac{g_{20}}{g_{00}} \right) \right\} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma'_{03}}{\partial \overline{x}_2} - \frac{\partial \gamma'_{02}}{\partial \overline{x}_3} \right)$$

$$= - 2\varkappa \int \left\{ T_{03} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_2} \left(\frac{1}{r} \right) - T_{02} \frac{\partial}{\partial \overline{x}_3} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS =$$

$$= 2\varkappa \int \frac{(\overline{x}_2 - x_2)\, T_{03} - (\overline{x}_3 - x_3)\, T_{02}}{r^3} dS,$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor de componenten R^2 en R^3. Met verwaarloozing van kleine termen van dezelfde orde van grootte als het quadraat van de snelheid der massadeelen gelden voorts de formules

$$T_{00} = m, \qquad T_{01} = - m v_1, \qquad T_{02} = - m v_2, \qquad T_{03} = - m v_3,$$

waar m de massadichtheid der materie is en v_1, v_2, v_3 de componenten van de snelheid der materie beduiden. Substitueeren we deze waarde in de zooeven gevonden uitdrukking dan krijgen we

$$R^1 = 2\varkappa \int m \frac{(x_2 - \overline{x}_2)\, v_3 - (x_3 - \overline{x}_3)\, v_2}{r^3} dS \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

en overeenkomstig voor R^2 en R^3. Deze formule leert ons dat de bijdrage van ieder massadeel tot den rotatie-vector in een punt P gelijk is aan het moment van hoeveelheid van beweging van dat massadeel t.o.v. van het punt P, gedeeld door de derde macht van den afstand tot P en vermenigvuldigd met tweemaal de gravitatie-constante van EINSTEIN.

Formule (15) kan worden toegepast op een probleem dat indertijd door H. THIRRING [1]) is behandeld teneinde den invloed van roteerende massa's op het zwaarteveld te illustreeren. Een homogene bolschaal met massa M en straal a roteert met een constante hoeksnelheid ω in een ruimte waarin zich overigens geen materie bevindt en waarvoor in het oneindige de grootheden $g_{\mu\nu}$ tot $\varepsilon_{\mu\nu}$ naderen. Gevraagd wordt te bepalen den invloed van de bolschaal op de beweging van een massapunt dat zich juist in het middelpunt O

[1]) H. THIRRING, Phys. Zeitschr. XIX, blz. 33 (1918).

bevindt. Het zwaarteveld door de bolschaal veroorzaakt is stationair; uit symmetrie-overwegingen kunnen we voorts besluiten dat in O een massapunt zich in evenwicht kan bevinden, d.w.z. dat aldaar de grootheden $\frac{\partial g_{00}}{\partial x_k}$ verdwijnen. Bij benadering, d.i. met weglating van kleine termen evenredig aan ω^2, zal zelfs g_{00} constant zijn in de ruimte binnen de bolschaal, en de grootheden $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_k \partial x_l}$ die de kracht bepalen die een rustend massapunt even buiten O ondervindt, zullen in het algemeen evenredig zijn met ω^2, doch kunnen niet bepaald worden als de constitutie van de bolschaal niet nader is aangegeven. De rotatie-vector in O kan daarentegen direct met benadering berekend worden met behulp van (15); hij is natuurlijk volgens de rotatie-as gericht. We voeren een rechthoekig coördinaten-systeem x,y,z in, waarvan het nulpunt in O valt en waarvan de z-as met de rotatie-as samenvalt. De massa van de eenheid van oppervlakte van de bolschaal zij m. De bijdrage tot de waarde van R^z die geleverd wordt door een ring van de bolschaal waarvan de hoekafstand tot de z-as ϑ bedraagt zal dan gelijk zijn aan

$$2\varkappa \times 2\pi a^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \times m \frac{x \,.\, x\omega + y \,.\, y\omega}{a^3} = \frac{\varkappa M \omega}{a} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta$$

en voor R^z zelf krijgen we dus

$$R^z = \frac{\varkappa M \omega}{a} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = \frac{4\varkappa M \omega}{3a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Hieruit leeren we dat als we in O een coördinaten-systeem invoeren dat uniform roteert in den zelfden zin als de bolschaal met een hoeksnelheid gelijk aan $\frac{4\varkappa M}{3a}$ maal die van de bolschaal, de Coriolis-krachten zullen verdwijnen uit de bewegingsvergelijkingen voor een massapunt in O. Dit resultaat is in overeenstemming met wat THIRRING heeft gevonden in bovenvermelde verhandeling.

Een andere toepassing van formule (15) kunnen we nog maken in verband met het volgende probleem. We denken ons een uniform roteerenden bol, zooals b. v. de aarde, en veronderstellen dat aan de noordpool de slingerproef van FOUCAULT worde uitgevoerd. Dan zal men vinden dat het vlak waarin de slinger zich beweegt niet in rust is t. o. v. van de vaste sterren maar langzaam roteert in den zelfden zin als de aarde. De hoeksnelheid van deze langzame rotatie is gegeven door de absolute waarde van den rotatie-vector aan de

pool, welke met behulp van (15) door een eenvoudige integratie is te vinden. Men vindt

$$R = \frac{4\varkappa M \omega}{5a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

waar M de massa van de homogeen veronderstelde aarde beduidt, terwijl a den straal en ω de hoeksnelheid van de aarde voorstellen. De factor $\frac{4\varkappa M}{5a}$ is natuurlijk te klein dan dat er kwestie van zou zijn die meesleeping van het slingervlak aan te toonen. Ook op lagere breedten zal een dergelijke invloed op het resultaat van de proef van FOUCAULT bestaan, maar daar zullen we hier niet op ingaan.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer H. A. KRAMERS: „*Over de toepassing van* EINSTEIN'S *gravitatietheorie op een stationair zwaarteveld*". II.

(Mede aangeboden door den Heer EHRENFEST).

§ 3. *Invloed van een stationair zwaarteveld op de beweging van een vast lichaam om zijn zwaartepunt.*

Na in de vorige § een voorbeeld gegeven te hebben van het optreden van den rotatie-vector zullen we in deze § direct aansluiten bij het in § 1 besprokene, en de noodzakelijke voorbereiding geven voor de behandeling van het in § 4 te bespreken probleem van den invloed van het zwaarteveld van de zon op de praecessie van de aardas.

Wanneer wij in het volgende over een vast lichaam spreken, kunnen we daarmee slechts bedoelen een lichaam dat *practisch gesproken* vast is en dat zich op de uit de klassieke mechanica bekende, door 6 vrijheidsgraden gekarakteriseerde wijze, kan bewegen zonder vormveranderingen en zonder dat er enorm hooge spanningen optreden. We moeten dus aannemen dat de uitgebreidheid van het lichaam zoo gering is dat de „meetkunde" binnen in het lichaam, die bepaald wordt door de grootheden $g_{\mu\nu}$ en hunne afgeleiden, onmerkbaar weinig van de Euclidische afwijkt, en dat de relatieve snelheden die bij de beweging de verschillende deelen van het lichaam ten opzichte van elkaar bezitten zeer klein zijn vergeleken bij de lichtsnelheid. Voor een dergelijk vast lichaam is het mogelijk direkt de waarden van de componenten van den energietensor der materie met zeer grooten graad van benadering aan te geven. Voeren we namelijk een zoodanig coordinatensysteem in dat in ieder punt van het lichaam het lijnelement slechts uiterst weinig van $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ afwijkt, iets wat volgens bovenstaande veronderstellingen steeds mogelijk is, en noemen we v een klein getal van dezelfde orde van grootte als de snelheid $\frac{dx_k}{dx_0}$ van de deelen van het lichaam, dan geldt met verwaarloozing van termen die relatief van de orde v^2 zijn

$$T_{oo} = m, \qquad T_{ok} = -m\frac{dx_k}{dx_o} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

terwijl de grootheden T_{kl} $(k,l = 1, 2, 3)$ die met de in het lichaam optredende spanningen verband houden, en die alleen bepaald kunnen worden als de constitutie van het lichaam nader bekend is, zeer klein zullen zijn t. o. v. de grootheden T_{ok} en die beschouwd mogen worden als zijnde van de orde van grootte v^2. De grootheid m in de formules (18) is de massa per volumeneenheid. Voorts dient opgemerkt dat we, op het teeken na, geen verschil behoeven te maken tusschen covariante, contravariante en gemengde componenten van den energietensor [1]). Theoretisch is er wel verschil, doch dit verschil hangt af van de afwijkingen die de $g_{\mu\nu}$'s van de $\varepsilon_{\mu\nu}$'s vertoonen, en die afwijkingen zijn volgens veronderstelling buitengewoon gering.

Na aldus te hebben vastgesteld wat we onder een vast lichaam hebben te verstaan, denken we ons zulk een lichaam op een gegeven oogenblik geplaatst in een stationair zwaarteveld zoodanig dat het zwaartepunt in rust is en samenvalt met een punt P van het veld waar de afgeleiden $\frac{\partial g_{oo}}{\partial x_k}$ alle drie gelijk zijn aan nul, en we stellen ons voor den invloed te discuteeren dien het stationaire zwaarteveld zal hebben op de bewegingen die het lichaam kan uitvoeren.

Laat ons daartoe aanvankelijk veronderstellen dat we het eigen zwaarteveld van het lichaam mogen verwaarloozen, d. w. z. dat tengevolge van de aanwezigheid van het lichaam de gravitatie-potentialen $g_{\mu\nu}$ en hunne afgeleiden geen merkbare verandering hebben ondergaan. We zullen dan beginnen met te bewijzen dat het zwaartepunt in P in rust zal blijven. Hiertoe hebben we gebruik te maken van de energie-impuls vergelijkingen voor de materie

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_k^\lambda}{\partial x_\lambda} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\varkappa}\mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0, \quad \mathfrak{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}\sqrt{-g}, \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

waar g den determinant der grootheden $g_{\mu\nu}$ voorstelt. Ten einde deze vergelijkingen toe te passen op ons probleem moeten we de grootheden $g_{\mu\nu}$ in alle punten van het lichaam kennen. Hiertoe veronderstellen we dat er met behulp van een transformatie van den vorm (I) voor gezorgd is dat het coördinatensysteem in P aan de betrekkingen (9) voldoet. Dan hebben we dat de $g_{\mu\nu}$'s in de omgeving van P voorgesteld kunnen worden door

---

[1]) $T^{ok} = T_o^{\ k} = -T^o_{\ k} = -T_{ok} = m\frac{dx_\lambda}{dx_o}$, $T^{oo} = T^o_{\ o} = T_{oo} = m.$

$$g_{00} = \varepsilon_{00} + \tfrac{1}{2}(g_{00,mn})_P\, x_m\, x_n, \qquad \left(g_{\mu\nu,mn} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_m \partial x_n}\right)$$

$$g_{0k} = (g_{0k,m})_P\, x_m + \tfrac{1}{2}(g_{0k,mn})_P\, x_m\, x_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$g_{kl} = \varepsilon_{kl} + \tfrac{1}{2}(g_{kl,mn})_P\, x_m\, x_n.$$

Hierbij is gemakshalve aangenomen dat de coördinaten x_1, x_2 en x_3 van het punt P gelijk zijn aan nul, en hebben we kleine termen van de orde van grootte x^3, x^4 enz., d. w. z. termen die producten van drie en meer x'_ks zouden bevatten, verwaarloosd.

Denken we ons nu een gesloten oppervlak in de x_1-x_2-x_3-ruimte dat het beschouwde lichaam geheel omsluit en waarbinnen met genoegzame nauwkeurigheid de betrekkingen (20) gelden, en integreeren we beide zijden van (19) over de ruimte binnen dit oppervlak, dan krijgen we, het ruimteelement $dx_1\, dx_2\, dx_3$ door dS aanduidende,

$$\frac{d}{dx_0}\left(\int T^0_i\, dS\right) = \tfrac{1}{2}(g_{00,ik})_P \int x_k\, T^{00}\, dS + \tfrac{1}{2}(g_{0k,i})_P \int T^{0k}\, dS +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(g_{0k,li})_P \int x_l\, T^{0k}\, dS + \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Hierbij hebben we stelselmatig termen weggelaten die van de orde v^2 (termen met T^{kl}) en zulke die van de orde x^2 zouden zijn. Het linkerlid van (21) stelt, op het teeken na, de verandering in den tijd voor van de totale hoeveelheid van beweging van het lichaam in de richting van de x_i-as; de integraal in den eersten term van het rechterlid (orde van grootte x) is gelijk aan het totale moment van het lichaam t.o.v. een vlak door P loodrecht op de x_k-as en is gelijk aan nul omdat we aannamen dat P in het zwaartepunt valt; de integraal in den tweeden term van het rechterlid (orde van grootte v) is gelijk aan de totale hoeveelheid van beweging van het lichaam in de richting van de x_k-as en is ook gelijk aan nul omdat we aannamen dat het zwaartepunt in rust verkeerde op het beschouwde oogenblik; de derde term eindelijk is een kleine term van de orde van grootte xv en mag verwaarloosd worden daar we reeds termen van de orde van grootte x en van de orde v hebben weggelaten. In eerste benadering blijft dus de hoeveelheid van beweging gelijk aan nul in den loop van den tijd en blijft tengevolge daarvan ook het zwaartepunt in rust. (Hierbij mag het van belang zijn even op te merken dat het uit den aard der zaak niet mogelijk is het zwaartepunt van een zekere hoeveelheid materie op invariante wijze vast te leggen; wil men aan de klassieke definitie vasthouden dan bestaat er steeds een kleine onzekerheid in de ligging van het zwaartepunt).

Nemen we aan dat het evenwicht waarin het lichaam P verkeert stabiel is, dan geeft de vergelijking (21) ons bovendien het middel in de hand om de kleine „trillingen" die het zwaartepunt om P kan uitvoeren te berekenen maar daar zullen we niet verder op ingaan.

Vervolgens hebben we de mogelijke beweging van het vaste lichaam om zijn zwaartepunt, die drie vrijheidsgraden bezit, te discuteeren. Dit geschiedt het eenvoudigst door de verandering met den tijd van de totale hoeveelheid van beweging van het lichaam rondom de coördinaatassen te berekenen. Hiertoe is het van voordeel te beginnen met het coördinatensysteem in te voeren dat in het einde van de eerste § is besproken, en dat ontstaat door de aldaar besproken „rotatietransformatie". Op dat nieuwe coördinatensysteem dat uniform roteert om het punt P t. o. v. een coördinatensysteem dat rust in het stationaire zwaarteveld, met een hoeksnelheid waarvan de componenten gegeven zijn door die van den rotatie-vector R^k, zullen we de momenten van hoeveelheid van beweging van het lichaam betrekking laten hebben. In het punt P is het nu te gebruiken coördinaten systeem geodetisch, maar de grootheden $g_{\mu\nu}$ zullen, in tegenstelling met daarstraks, afhangen van den tijd x_0, en periodisch in den tijd zijn met een periode $T = \frac{2\pi}{R}$, waar R de absolute waarde van den rotatievector voorstelt. In de omgeving van P zullen dus nu, in plaats van (20), de volgende formules treden

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} (g_{\mu\nu,mn})_P \, x_m \, x_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (22)$$

waarbij de grootheden $(g_{\mu\nu,mn})_P$ periodische functies van den tijd zijn.

Om nu de verandering met den tijd van de hoeveelheid van beweging om de x_1-as te bepalen maken we wederom gebruik van (19) en krijgen

$$x_2 \frac{\partial T_3^{\lambda}}{\partial x_\lambda} - x_3 \frac{\partial T_2^{\lambda}}{\partial x_\lambda} = + \tfrac{1}{2} (x_2 \, g_{\mu\nu,3} - x_3 \, g_{\mu\nu,2}) \, T^{\mu\nu}.$$

Wederom integreerende over een gesloten oppervlak in de $x_1-x_2-x_3$-ruimte dat het lichaam geheel omsluit, vinden we, met verwaarloozing van termen van de orde xv^2, $x^2 v$, x^3, en hoogere ordes,

$$-\frac{d}{dx_0}\left(\int (x_2 \, T_3^{\lambda} - x_3 \, T_2^{\lambda}) \, dS\right) = -\tfrac{1}{2} \int (x_2 \, (g_{oo,3k})_P -$$
$$- x_3 \, (g_{oo,2k})_P) x_k \, T^{oo} \, dS. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

Het linkerlid stelt de verandering met den tijd voor van het totale moment van hoeveelheid van beweging van het lichaam om de x_1-as; het rechterlid kan direct worden geïnterpreteerd als de

x_1-component van het koppel dat een versnellingsveld met potentiaal- $+\frac{1}{2}g_{00}$ uitoefent op het lichaam, en hangt blijkbaar ten nauwste samen met de integralen $\int x_k x_l T^{00} dS$, die de traagheidsellipsoide van het lichaam bepalen; in geval van een homogeen bolvormig lichaam wordt het gelijk aan nul. Met behulp van (23) en van de twee analoge vergelijkingen, die betrekking hebben op het moment om de x_2-as en dat om de x_3-as, laat zich de beweging van het lichaam om zijn zwaartepunt in het stationaire zwaarteveld dus volkomen bepalen. Ze laat zich beschrijven als een POINSOT-beweging die min of meer gestoord is door den invloed van een „versnellingsveld" met potentiaal $+\frac{1}{2}g_{00}$ (rechterlid van (23)) en waarop gesuperponeerd is een uniforme rotatie met hoeksnelheid-componenten R^1, R^2 en R^3. Deze rotatie is geheel onafhankelijk van den aard van het lichaam, in tegenstelling met den invloed van het versnellingsveld, die er juist ten nauwste mee samenhangt en die b.v. verdwijnt als we met een homogeen bolvormig lichaam te doen hebben.

Tot nu toe hebben we den invloed van het eigen zwaarteveld van het lichaam verwaarloosd, maar bij de toepassingen op bepaalde gevallen zal deze verwaarloozing niet steeds zonder meer te rechtvaardigen zijn. Als we b.v. in de volgende § de praecessie van de aardas zullen bespreken hebben we daar te doen met de aarde wier eigen zwaarteveld b.v. aan haar oppervlak veel sterker is dan dat van de zon (hetwelk zich uit, gelijk men weet, in de krachten die eb en vloed veroorzaken). Men zou zich dus kunnen denken dat er in zoo'n geval nog andere invloeden op de beweging om het zwaartepunt zouden inwerken die veel sterker waren dan de zooeven besprokene of deze verstoorden. Bij nadere beschouwing blijkt het echter dat als de massa van het lichaam maar zoo klein is dat het op genoegzamen afstand slechts een geringe verandering kan teweeg brengen in de beweging van het lichaam, die gesuperponeerd is op de invloeden van het stationaire zwaarteveld die in het voorgaande besproken zijn, en die evenredig zal zijn met de massa van het lichaam. Ten einde dit in te zien denken we ons het lichaam eerst geplaatst in een ruimte waarin zich overigens geen materie bevindt en waarvan het lijnelement in het oneindige tot $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ nadert. Dan is het eenvoudig in te zien dat in eerste benadering het eigen zwaarteveld in het geheel geen invloed zal uitoefenen op de Poinsot-beweging van het lichaam, omdat de door de $g_{\mu\nu}$'s bepaalde „krachten" die de verschillende, op eenigen afstand van elkaar gelegen, deelen van het vaste lichaam op elkaar uitoe-

fenen in eerste benadering aan het principe van actie en reactie voldoen, juist zooals dit bij de zwaartekracht-theorie van NEWTON het geval is. Dit laat zich eenvoudig bewijzen door de benaderende oplossing van EINSTEIN, beschreven op blz. 417, op de vergelijkingen van de materie (19) toe te passen, doch kortheidshalve zullen we daar niet op in gaan. Het resultaat van de bewijsvoering kan uitgedrukt worden door te zeggen dat het eigen zwaarteveld geen invloed op de beweging van het lichaam heeft met dezelfde benadering als die met welke het lichaam als vast kan beschouwd worden, ook al mag de versnelling, aan het oppervlak van het lichaam bijvoorbeeld, betrekkelijk groote waarden aannemen.

Denken we ons nu wederom dat het lichaam zich met zijn zwaartepunt in het punt P van het stationaire zwaarteveld bevindt dan kan men op de volgende wijze te werk gaan. We veronderstellen dat de waarden der $g_{\mu\nu}$'s slechts kleine veranderingen $\Delta_{\mu\nu}$ ondergaan door de aanwezigheid van het lichaam. zoodat dus

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Dan verkrijgt men, gebruik makende van de vergelijkingen (10) voor het zwaarteveld, voor de $\Delta_{\mu\nu}$'s 10 partieele lineaire inhomogene differentiaalvergelijkingen van de 2e orde, van welke we zullen aannemen dat er een reguliere oplossing van bestaat. (Zoo noodig moeten er nog grensvoorwaarden worden aangegeven. Is het stationaire zwaarteveld zóo dat het lijnelement overal zeer weinig van $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ verschilt en in het oneindige hieraan gelijk wordt, dan kunnen de $\Delta_{\mu\nu}$'s met zeer groote benadering met behulp van de formules (13) van EINSTEIN berekend worden.) In en in de naaste omgeving van het vaste lichaam zal deze oplossing dezelfde zijn als in de afwezigheid van het stationaire zwaarteveld, en is er dus evenals daar straks geen directe invloed van het eigen zwaarteveld op de beweging van het lichaam. Verder is het eenvoudig in te zien dat de waarden der $\Delta_{\mu\nu}$'s op grooteren afstand van het lichaam met groote benadering alleen nog maar van de totale massa van het lichaam zullen afhangen, omdat op zulke groote afstanden de invloed van het lichaam alleen nog maar als die van een singulier punt (of, beter, van een singuliere lijn) te beschouwen is, gekarakteriseerd door de integraal van de grootheden $T_{\mu\nu}$ over het volume van het lichaam. Maar van deze integralen zijn die van de T_{kl}'s te verwaarloozen klein, terwijl die van de T_{k0}'s verdwijnen omdat het zwaartepunt in rust is, zoodat we alleen maar met de integraal van T_{00} over het volume, dat is met de totale massa M van het lichaam te maken hebben. We vinden dus dat het lichaam kleine krachten evenredig aan M zal uitoefenen op de

lichamen die het stationaire zwaarteveld veroorzaken. De beweging van deze lichamen zal dus een geringe storing ondergaan en tengevolge daarvan zullen de $g_{\mu\nu}$'s van het stationaire zwaarteveld zelve weer een modificatie ondergaan. In plaats van (24) zullen we dus moeten schrijven

$$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Delta_{\mu\nu} + \Delta'_{\mu\nu}, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

waar de $\Delta'_{\mu\nu}$'s de laatstgenoemde modificaties voorstellen. De $\Delta'_{\mu\nu}$'s zijn termen die klein zullen zijn t.o.v. de $\Delta_{\mu\nu}$'s, en die evenredig zijn met M; in tegenstelling met de grootheden $\Delta_{\mu\nu}$ zullen ze echter wel een invloed hebben op de beweging van het lichaam, een invloed die klaarblijkelijk evenredig zal zijn met M. Over dezen invloed valt het volgende te zeggen. De $\Delta'_{\mu\nu}$'s zullen in het algemeen niet meer van den tijd onafhankelijk zijn.

Maar veronderstel eens dat ze dit wel waren, dan zou men in de eerste plaats hebben dat de grootheden $\frac{\partial \Delta'_{00}}{\partial x_k}$ in P in 't algemeen niet gelijk aan nul waren, zoodat er een punt P' gevonden moet worden in de nabijheid van P waar nu het zwaartepunt van het lichaam in rust kan verkeeren. In de tweede plaats zal men in formule (5) voor de componenten van den rotatie-vector de grootheden $g_{\mu\nu}$ door de grootheden $g_{\mu\nu} + \Delta'_{\mu\nu}$ te vervangen hebben en deze laatste op het punt P' betrekking laten hebben; op die wijze zal men een kleine modificatie, evenredig met M, in de waarde van den rotatievector ter plaatse van het lichaam vinden, en tengevolge daarvan een daaraan beantwoordende modificatie in den storenden invloed dien het zwaarteveld op de beweging van het lichaam uitoefent. Dat verder ook de invloed die volgens (23) door het zwaarteveld op de beweging van het lichaam wordt uitgeoefend een modificatie evenredig met M zal ondergaan, is zonder meer duidelijk. We zullen er niet verder op ingaan hoe men zou hebben te rekenen in geval de $\Delta'_{\mu\nu}$'s wel van den tijd afhingen.

De resultaten van deze § kunnen we als volgt samenvatten. Wanneer een vast lichaam zich bevindt in een stationair zwaarteveld, zoodanig dat zijn zwaartepunt in rust is, zal de Poinsot-beweging, die het lichaam bij afwezigheid van het zwaarteveld op de in de klassieke mechanica beschreven wijze zou uitvoeren, gestoord worden door een gesuperponeerde uniforme rotatie die onafhankelijk is van den aard van het lichaam, en door den invloed van een versnellingsveld dat een potentiaal bezit, welke invloed ten nauwste met de eigenschappen van het lichaam (c.q. de traagheidsellipsoide) samenhangt.

Het eigen zwaarteveld van het lichaam zal tengevolge hebben dat

alle grootheden die de plaats en de zooeven vermelde storingen in de beweging van het lichaam karakteriseeren kleine modificaties evenredig met de massa M van het lichaam zullen ondergaan. Bij toepassingen op praktische gevallen kunnen deze invloeden natuurlijk van heel verschillende orde van grootte zijn, en het kan b.v. zijn dat de eene praktisch te verwaarloozen is, terwijl de ander misschien zoo groot is dat de nauwkeurigheid misschien nog verder kan en moet gedreven worden dan in deze § is aangeduid.

§ 4. *Invloed van het zwaarteveld der zon op de rotatie der aarde.*

Het lijnelement van het zwaarteveld dat door de in rust veronderstelde zon wordt opgewekt kan geschreven worden in den voor het eerst door SCHWARZSCHILD aangegeven vorm

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dT^2 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2), \quad (26)$$

waar T den tijd voorstelt, de tijdeenheid zoo gekozen zijnde dat de lichtsnelheid op grooten afstand van de zon gelijk is aan 1. r, ϑ, φ zijn poolcoordinaten die de plaats van een punt in de ruimte bepalen, en α is een constante die met de massa M_z van de zon samenhangt door de formule

$$\alpha = 2\varkappa M_z, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

waarin $\varkappa$ wederom de gravitatieconstante van EINSTEIN beduidt.

We voeren nu een coordinatensysteem in dat om de as van het coördinatensysteem roteert met een hoeksnelheid ω. Het lijnelement in de nieuwe coordinaten kan dan berekend worden door de transformatie

$$\varphi = \psi + \omega T$$

uit te voeren. Dit geeft

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = &\left(1 - \frac{\alpha}{r} - r^2 \sin^2 \vartheta \, \omega^2\right) dT^2 \\ &- 2r^2 \sin^2 \vartheta \, \omega \, d\psi \, dT - \\ &- \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\psi^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

Het zwaarteveld waarbij dit lijnelement behoort is stationair. We zullen aanvangen met een punt P te zoeken waar een massapunt in evenwicht kan verkeeren. In zulk een punt moeten de eerste afgeleiden van $g_{TT} = 1 - \frac{\alpha}{r} r^2 \sin^2 \vartheta \omega^2$ verdwijnen. Dit geeft de volgende betrekkingen waaraan de coordinaten van P moeten voldoen:

$$\frac{\partial g_{TT}}{\partial r} = \frac{a}{r^2} - 2r \sin^2 \vartheta\, \omega^2 = 0, \qquad \frac{\partial g_{TT}}{\partial \vartheta} = -2r^2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta\, \omega^2 = 0.$$

Hieruit zien we dat ieder punt P, dat in het equatorvlak $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ligt en waarvan de afstand A tot aan de zon voldoet aan de betrekking

$$2 A^3 \omega^2 = a, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

in evenwicht kan verkeeren. Deze betrekking geeft dus het verband aan tusschen de hoeksnelheid en den baanstraal van een planeet die in een cirkel om de zon loopt. Ten einde nu de rotatie van zulk een planeet om zijn as te discuteeren zullen we beginnen met den rotatievector in P te berekenen. Om met behulp van (5) haar contravariante componenten te berekenen moeten we eerst den determinant van de grootheden $G_{kl} = -g_{kl} + \frac{g_{ko} g_{lo}}{g_{oo}}$ kennen. We vinden

$$G_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}}, \quad G_{\vartheta\vartheta} = r^2, \quad G_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta + \frac{(r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega)^2}{1 - \frac{a}{r} - r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega^2} =$$

$$= r^2 \sin^2 \vartheta \frac{1 - \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r} - r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega^2},$$

$$G_{r\vartheta} = G_{\vartheta\varphi} = G_{\varphi r} = 0, \quad G = \frac{1}{1 - \frac{a}{r}} \cdot r^2 \cdot r^2 \sin^2 \vartheta \frac{1 - {}^{a}/_{r}}{1 - {}^{a}/_{r} - r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega^2} =$$

$$= \frac{r^4 \sin^2 \vartheta}{g_{TT}}.$$

Aangezien de afgeleiden van g_{TT} in het punt P gelijk zijn aan nul, reduceeren de uitdrukkingen (5) zich in dat punt tot

$$(R^m)_P = \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{00} G}} \left\{ \frac{\partial g_{ol}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{ok}}{\partial x_l} \right\}.$$

Dit geeft

$$(R^r)_P = -\tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{00} G}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega) = 0,$$

$$(R^\vartheta)_P = \tfrac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{00} G}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin^2 \vartheta\, \omega) = \left(\frac{r \sin^2 \vartheta\, \omega}{\sqrt{r^4 \sin^2 \vartheta}} \right)_P = \frac{\omega}{A}, \quad (R^\varphi)_P = 0.$$

De rotatievector in P staat dus loodrecht op het equatorvlak, en voor hare absolute waarde R vinden wij

$$R = \sqrt{G_{kl} R^k R^l} = R^\vartheta \sqrt{G_{\vartheta\vartheta}} = \frac{\omega}{A} \cdot A = \omega, \quad \ldots \quad (30)$$

d.i. juist de hoeksnelheid van de planeet in haar baan om de zon.

Dat in eerste approximatie de absolute waarde van den rotatievector gelijk zou zijn aan ω was natuurlijk te verwachten, maar uit de voorgaande rekening blijkt dat ook bij gebruik van de nauwkeurige uitdrukking voor het zwaarteveld van de zon deze waarde precies gelijk wordt aan ω en niet daarvan verschilt ten bedrage van een kleine grootheid die relatief tot ω van de orde van grootte $\frac{a}{A}$ is. Teneinde in te zien dat het optreden van een dergelijk verschil niet a-priori onwaarschijnlijk was bedenke men dat de baan van een planeet om de zon van een ellipsbeweging van KEPLER afwijkt juist ten bedrage van kleine grootheden van die orde van grootte (praecessie van het perihelium van Mercurius).

We zijn nu in staat het probleem van de praecessie van de rotatieas van een planeet, die in een cirkel om de zon loopt, de aarde b.v., nader te discuteeren. We voeren een coördinatensysteem in dat t. o. v. het stationaire zwaarteveld (28) met een hoeksnelheid ω om het zwaartepunt der aarde roteert in een zin tegengesteld aan die waarin de aarde om de zon loopt, en t. o. v. hetwelk de vaste sterren dus niet roteeren. Dit is een rotatietransformatie van de soort besproken in § 1 en we kunnen het dus zoo inrichten dat het nieuwe coördinatenstelsel geodetisch is ter plaatse van het zwaartepunt der aarde. De aarde zij een omwentelingslichaam dat om zijn as roteert; dan zal volgens het in § 3 besprokene *de praecessie van deze as dus alleen afhangen van de tweede afgeleiden van g_{TT} in het zwaartepunt* $\left(\text{in casu van de waarde van } \frac{2a}{A^3}\right)$ *en van de traagheidsellipsoide van de aarde, en kan berekend worden juist zooals dat pleegt te geschieden in de astronomie.*

We zien dus dat er tengevolge van het feit dat de rotatievector precies gelijk was aan ω, er in de uitdrukking voor de praecessie van de aardas geen term zal optreden die onafhankelijk zou zijn van de constitutie der aarde en die van de orde van grootte $\frac{a}{A}\omega$ zou zijn. We hebben hier dus een bevestiging gevonden van een vermoeden door professor DE SITTER uitgesproken naar aanleiding van een verhandeling van Prof. SCHOUTEN [1]). In die verhandeling werd er opmerkzaam op gemaakt dat het zwaarteveld van de zon zoodanig was dat een lichaam dat langs een cirkel om de zon met straal A geodetisch werd voortbewogen bij terugkomst in hetzelfde punt niet

[1]) Versl. Kon. Ak. XXVII. 1919. 214.

meer dezelfde positie had als te voren, maar gedraaid was om een kleinen hoek ter grootte van $\pi \frac{\alpha}{A}$. Prof. SCHOUTEN wees er op dat hiermee kon samenhangen een mogelijke praecessie van de aardas t.o.v. de vaste sterren; in een naschrift wees Prof. DE SITTER er dan verder op dat het best kon wezen dat tengevolge van een compensatie een dergelijke praecessie in het geheel niet aanwezig was.

Nu rest ons nog na te gaan welken invloed het eigen zwaarteveld van de aarde op hare beweging kan hebben. Volgens het in de vorige § besprokene mag men principieel verwachten dat deze invloed storingen zal teweegbrengen, zoowel in de baan der aarde als in haar beweging om het zwaartepunt, ten bedrage van kleine grootheden evenredig aan de massa M_A der aarde. Hoe de invloed op de baan zal zijn in eerste benadering weten we reeds uit de resultaten der klassieke mechanica: de zon staat niet stil maar beschrijft om het gemeenschappelijk zwaartepunt O van zon en aarde een baan gelijkvormig aan die van de aarde, zoodanig dat de afstand tot O steeds gelijk is aan den afstand van de aarde tot O vermenigvuldigd met $\frac{M_A}{M_z}$. Aannemende dat de baan van de aarde wederom een cirkel is zal nog steeds het product van het quadraat der hoeksnelheid ω met de derde macht van den afstand aarde-zon een constante waarde hebben, doch deze waarde is niet meer gelijk aan $\alpha/_2$ maar aan $\alpha/_2 \left(1 + \frac{M_A}{M_z}\right) = k\,(M_A + M_z)$. Voert men wederom een met de hoeksnelheid ω roteerend coördinaten systeem in t.o.v. hetwelk het zwaartepunt der aarde rust dan zal het zwaarteveld in deze roteerende coördinaten wederom stationair zijn (als we afzien van de beweging van de aarde om zijn zwaartepunt), doch de afstand van de aarde tot O behoorende bij deze hoeksnelheid is niet meer dezelfde als toen we de aardmassa verwaarloosden, doch kleiner, in de verhouding $\left(1 - \frac{2 M_A}{3 M}\right)$. We hebben dus te doen met een verplaatsing van het punt waar het zwaartepunt der aarde in rust kan verkeeren, die een gevolg is van het eigen zwaarteveld der aarde, en die evenredig is met de aardmassa; zulk een verplaatsing hadden we volgens de beschouwingen op blz. 425 te verwachten.

Voortgaande moeten we de mogelijkheid onder oogen zien dat ook de absolute waarde van den rotatie-vector ter plaatse waar de aarde zich bevindt niet meer precies gelijk is aan ω maar b.v. geschreven kan worden in den vorm $\omega\left(1 + k\,\frac{M_A}{M_z}\right)$, waar k een nummerieke

factor van dezelfde orde van grootte als de eenheid is. Hierbij zij er nog even aan herinnerd dat als we spreken van den rotatievector ter plaatse van de aarde met inachtneming van het eigen zwaarteveld der aarde, we de grootheid bedoelen die volgens het in de vorige § besproken schema berekend kan worden met behulp van formule (5) door, om het zoo eens te zeggen, het direct van de aarde afkomstige zwaarteveld te verwaarloozen, of, nauwkeuriger, wanneer we de $g_{\mu\nu}$'s van het oorspronkelijke stationaire zwaarteveld vervangen door de grootheden $g_{\mu\nu} + \Delta'_{\mu\nu}$, waarbij de $\Delta'_{\mu\nu}$'s de kleine, aan M evenredige, termen voorstellen, die op blz. 425 besproken zijn We kunnen nu bewijzen dat de zooeven genoemde factor k gelijk is aan nul, althans met verwaarloozing van kleine grootheden van de orde $^{\alpha}/_{A}$. Teneinde dit bewijs te leveren kunnen we het gemakkelijkst te werk gaan door gebruik te maken van de daar straks reeds genoemde resultaten van de klassieke mechanica aangaande de baan die aarde en zon zullen beschrijven rondom hun gemeenschappelijk zwaartepunt, resultaten die, met verwaarloozing van kleine grootheden van de relatieve orde van grootte $^{\alpha}/_{A}$, met die van EINSTEIN's gravitatie-theorie in overeenstemming zijn. Uitgaande van die resultaten zullen we met dezelfde benadering de gravitatiepotentialen in ieder punt van de ruimte kunnen bepalen met behulp van EINSTEIN's benaderende oplossingen besproken op blz. 420, 421. Noem de afstand van de zon en van de aarde tot hun gemeenschappelijk. zwaartepunt O respectievelijk Z en A (Z klein t.o.v. A), en zij ω de hoeksnelheid waarmee ze om dat zwaartepunt roteeren. Laat voorts de afstand van een punt Q waarin we op zeker oogenblik de waarden der $g_{\mu\nu}$'s willen leeren kennen, tot aan de plaats waar op dat oogenblik de zon, resp. de aarde zich bevindt aangeduid worden door ϱ_Z, resp. ϱ_A. We voeren een t.o.v. de vaste sterren rustend, rechthoekig coördinatensysteem in, zoodanig dat het nulpunt met Q en het x-y-vlak met het baanvlak van zon en aarde samenvalt. De hoek tusschen de x-as en de richting zon-aarde noemen we χ. Dan vindt men met behulp van de formules (13) bij benadering de volgende waarden voor de geretardeerde potentialen in Q:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma'_{TT} &= -4\varkappa\left(\frac{M_Z}{\varrho_Z} + \frac{M_A}{\varrho_A}\right) = -2\gamma, \\
\gamma'_{Tx} &= -4\varkappa\left(\frac{\omega Z \sin\chi\, M_Z}{\varrho_Z} - \frac{\omega A \sin\chi\, M_A}{\varrho_A}\right) = -2\,\omega\,\xi \sin\chi, \\
\gamma'_{Ty} &= -4\varkappa\left(-\frac{\omega Z \cos\chi\, M_Z}{\varrho_Z} + \frac{\omega A \cos\chi\, M_A}{\varrho_A}\right) = +2\,\omega\,\xi \cos\chi, \\
\gamma'_{xx} &= \gamma'_{yy} = \gamma'_{zz} = \gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = \gamma'_{zT} = 0, \qquad \chi = \omega T.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Voor het lijnelement van het zwaarteveld vinden we dan, gebruik makende van (11) en (12)

$$ds^2 = (1-\gamma)\,dT^2 + 4\,\omega\,\zeta\,(-\sin\omega T\,.\,dx + \cos\omega T\,dy)\,dT -$$
$$-(1+\gamma)(dx^2 + dy^2 + dx^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Dat, niettegenstaande we met geretardeerde potentialen te doen hebben, in (31) toch de momentane afstanden van Q tot aarde en zon voorkomen, vindt zijn oorzaak in de omstandigheid dat de snelheid van deze lichamen zoo gering is en zoo langzaam verandert dat in eerste benadering de afwijkingen van bovenstaande formules die een gevolg zouden zijn van de retardatie elkaar juist compenseeren (een verschijnsel welbekend b.v. in de theorie van geretardeerde potentialen van electronen). Men kan er zich van vergewissen dat de termen die in de formules (31) verwaarloosd zijn t. o. v. de hoofdtermen van dezelfde orde van grootte zijn als $\frac{\varkappa M_A}{A}$ voor alle punten wier afstanden tot zon en aarde van dezelfde orde van grootte zijn als de onderlinge afstand van deze twee lichamen. Voorts dient opgemerkt dat de termen die ϱ_z resp. ϱ_A in den noemer bevatten niet meer juist zullen zijn binnenin of vlak buiten het lichaam van de zon, resp. van de aarde, omdat daar de massaverdeeling in deze lichamen en de beweging om hun zwaartepunt een rol zullen spelen. Om nu formule (32) op ons probleem toe te passen hebben we een coördinatensysteem $x'-y'-z'$ in te voeren dat om de z-as met een hoeksnelheid ω roteert en t. o. v. het zwaartepunt van aarde en zon in rust is. Laat de z'-as samenvallen met de z-as en laat de x'-as samenvallen met de lijn zon—aarde. Dan zal de transformatie gegeven zijn door

$$x = x'\cos\omega T - y'\sin\omega T,$$
$$y = x'\sin\omega T + y'\cos\omega T,$$
$$z = z'.$$

Het lijnelement gegeven door (32) verkrijgt door deze transformatie den vorm

$$\left.\begin{aligned} ds^2 = [1-\gamma-\omega^2(x'^2+y'^2) - \omega^2(\gamma(x'^2+y'^2) - 4\,\zeta\,x')]\,dT^2 - \\ - 2\omega y'\,dx'dT + 2\omega(x'+2\zeta)\,dy'dT - (1+\gamma)(dx'^2+dy'^2+dz'^2), \\ \gamma = \frac{2\varkappa M_z}{\varrho_z} + \frac{2\varkappa M_A}{\varrho_A} \qquad\qquad \zeta = \frac{2\varkappa M_z Z}{\varrho_z} - \frac{2\varkappa M_A A}{\varrho_A}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

We zien dat in de roteerende coordinaten de $g_{\mu\nu}$'s niet meer van den tijd afhangen en we dus met een stationair zwaarteveld te maken hebben. Zetten we $M_A = 0$, $Z = 0$ dan valt het lijnelement samen met het lijnelement (28) als we door een geschikte transformatie der ruimtecoordinaten op poolcoordinaten r, ϑ, φ overgaan, en afzien

van kleine termen die t. o. v. de hoofdtermen van de orde $\frac{\varkappa M_z}{A}$ zijn. Willen we nu met behulp van (33) den evenwichtstand van de aarde en den rotatievector ter plaatse van haar zwaartepunt berekenen dan hebben we ons eerst alle termen die ϱ_A in de noemer bevatten weg te denken. Deze termen verliezen, gelijk boven vermeld, binnen en in de naaste omgeving van de aarde hare geldigheid; ze representeeren wat we op blz. 423 noemden het directe eigen zwaarteveld der aarde, beantwoorden aan de grootheden $\Delta_{\mu\nu}$ in (25) en hebben geen invloed op de beweging van de aarde om haar zwaartepunt. De termen die beantwoorden aan de $\Delta'_{\mu\nu}$'s in (25) zijn niet direct af te lezen uit den in (33) aangegeven vorm voor het lijnelement doch zouden gemakkelijk zijn aan te geven.

Wat den evenwichtstand aangaat moeten dus de eerste afgeleiden van $1-\gamma-\omega^2(x'^2+y'^2)$, waarbij $\gamma=\frac{2\varkappa M_z}{\varrho_z}$, en waarbij we den laatsten term in de uitdrukking voor g_{TT} verwaarloosd hebben omdat deze t. o. v. de andere termen hoogstens slechts van de orde $\frac{\varkappa M_z}{A}$ is, gelijk zijn aan nul. Dat wil echter niet anders zeggen dan dat de aantrekkende kracht van de zon, waarvan de versnellingspotentiaal $+\frac{\gamma}{2}$ is, evenwicht moet houden met de middelpuntvliedende kracht, waarvan de versnellingspotentiaal $\frac{\omega^2(x'^2+y'^2)}{2}$ is; en we hebben er voor gezorgd dat dit zoo is door van de uit de klassieke mechanica bekende baan voor aarde en zon uit te gaan. Op dezelfde wijze heeft men dat de zon in evenwicht verkeert, omdat de eerste afgeleiden van $1-\gamma-\omega^2(x'^2+y'^2)$, waar $\gamma=\frac{2\varkappa M_A}{\varrho_A}$, gelijk aan nul zijn ter plaatse van de zon.

Om verder den rotatievector ter plaatse van de aarde te berekenen mogen we in den coefficient $g_{y'T}$ van $dy'dT$ de grootheid ζ gelijk aan nul stellen, omdat de eerste term ζ t. o. v. den hoofdterm x' van de orde van grootte $\frac{\varkappa M_A}{A}$ en bijgevolg te verwaarloozen is, terwijl de tweede term in ζ van het directe eigen zwaarteveld der aarde afkomstig is. Voorts mogen we den coefficient g_{TT} van dT^2 en evenzeer den determinant G gelijk aan 1 nemen; en we krijgen dus voor de absolute waarde van den rotatievector, die natuurlijk langs de z'-as gericht is,

$$R = \left| \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x'}(+\omega x') - \frac{\partial}{\partial y'}(-\omega y') \right) \right| = \omega.$$

Hiermee is echter bewezen wat we boven beweerden, dat nl. de rotatievector, ook als we de massa der aarde niet verwaarloozen, in eerste benadering niet van de hoeksnelheid der aarde om de zon verschillend is, een resultaat waarover we ons in den grond van de zaak niet behoeven te verwonderen. We mogen dus het besluit trekken dat *in eerste benadering* (*d.i. met verwaarloozing van termen van de orde* $\frac{\varkappa M_z}{A} \cdot \frac{M_A}{M_z} \cdot \omega$) *de invloed van de aardmassa op de praecessie van de aardas t. o. v. de vaste sterren uitsluitend te zoeken zal zijn in de modificatie die men ook volgens de klassieke mechanica zou vinden, op grond van de verandering van het krachtveld van de zon in het punt waar de aarde zich bevindt* (in casu van de veranderde waarde van $\frac{2\alpha}{B^3}$, bij gelijk gebleven hoeksnelheid ω, waar B de afstand aarde-zon voorstelt).

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt een mededeeling aan van den Heer W. VAN DER WOUDE: *„Over de beweging van een vast stelsel"*.

(Mede aangeboden door den Heer KLUYVER).

§ *1*. Bij een bespreking van de beweging van een vast *vlak* stelsel wordt gewoonlijk de aandacht gevestigd op de meetkundige plaats der punten, die op een bepaald oogenblik in hun baan een buigpunt doorloopen en op de meetkundige plaats der lijnen, die bij hunne beweging op dat oogenblik hunne omhullende in een keerpunt aanraken; deze meetkundige plaatsen worden als de buigcirkel en de keercirkel aangeduid. 't Uitgangspunt hierbij is de zoogenaamde formule van SAVARY voor den kromtestraal van de baan van een punt, resp. voor den kromtestraal van de omhullende van een kromme (of rechte) lijn uit 't beweeglijke stelsel.

Een dergelijke bespreking van de singulariteiten bij de beweging van een vast ruimtestelsel is minder eenvoudig, de uitdrukkingen voor de kromming en de torsie van de baan van een punt zijn van dien aard, dat ze niet tot verdere conclusies uitnoodigen. Voorzoover mij bekend is, worden deze singulariteiten alleen in 't bekende werkje van SCHOENFLIES [1]) behandeld; ~~bij wijst~~ daarbij op de merkwaardige kubische verwantschap, die er bestaat tusschen de punten A van 't beweeglijke stelsel en de punten A' van de vaste ruimte, wanneer aan elk punt A wordt toegevoegd 't punt A', dat 't middelpunt van den kromtebol van A in zijn baan is, en op 't feit, dat bij de „omgekeerde beweging" A 't middelpunt is van den kromtebol van A' in zijn baan.

Deze resultaten wensch ik nu op geheel andere wijze te bereiken; ik zal daarbij gebruik maken van de zoogenaamde methode van 't beweeglijke assenstelsel (trièdre mobile), voor wier toepassing op de kinematika naar 't leerboek van KOENIGS [2]) verwezen kan worden. In de §§ 2, 3 zal ik daarvoor enkele bekende formules herhalen.

§ 2. Onder $T_f(O_1, X_1, Y_1, Z_1)$ en $T_m(O, X, Y, Z)$ verstaan wij

---

[1]) Dr. A. SCHOENFLIES: Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. (Leipzig, Teubner, 1886).

[2]) G. KOENIGS: Leçons de Cinématique (Paris, HERMANN, 1897).

twee gelijk georiënteerde rechthoekige assenstelsels, die zich ten opzichte van elkaar bewegen. De snelheid t. o. v. T_f van een punt $P(x, y, z)$ — d. w. z. met de coördinaten x, y, z, t. o. v. T_m — heet de *absolute* snelheid van P, die t. o. v. T_m de *relatieve* snelheid van P, de absolute snelheid van een met P samenvallend en vast aan T_m verbonden punt de *meesleepingssnelheid* van P; ze worden resp. door $\bar{v}_a, \bar{v}_r, \bar{v}_m$ voorgesteld.

Dan is

$$v_{r,x} = \frac{dx}{dt}, \quad v_{r,y} = \frac{dy}{dt}, \quad v_{r,z} = \frac{dz}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} v_{a,x} &= v_{m,x} + v_{r,x} = \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt} \\ v_{a,y} &= v_{m,y} + v_{r,y} = \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt} \\ v_{a,z} &= v_{m,z} + v_{r,z} = \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (1a)$$

waarin $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ de bekende beteekenis hebben van componenten der absolute snelheid van 't punt O en componenten der rotatie-as, wanneer wij deze beide ontbonden denken volgens OX, OY, OZ.

Is P aan T_m vast verbonden, dan is

$$v_{r,x} = \frac{dx}{dt} = 0$$

$$v_{a,x} = v_{m,x} = \xi + qz - ry \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

De absolute snelheid van een aan T_m verbonden punt zullen wij in 't vervolg gewoonlijk door v_m aanduiden.

Is $\bar{J}_a$ de absolute versnelling van $P(x, y, z)$, dan kunnen wij $J_{a,x}$, $J_{a,y}$, $J_{a,z}$ op de volgende wijze uitdrukken.

Wij kiezen een willekeurig *vast*, d. w. z. aan T_f verbonden punt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en beschouwen 't segment P_0P_1, dat gelijk aan, evenwijdig en gelijk gericht is met den vector v_a, die de absolute snelheid van P voorstelt; dan is de absolute versnelling van P volgens hare definitie in grootte en richting gelijk aan de absolute snelheid van P_1.

Daar $x_0 + v_{a,x}, y_0 + v_{a,y}, z_0 + v_{a,z}$ de coördinaten van P_1 zijn, is dus

$$J_{a,x} = \xi + q(z_0 + v_{a,z}) - r(y_0 + v_{a,y}) + \frac{d}{dt}(x_0 + v_{a,x});$$

maar de absolute snelheid van 't vaste punt P_0 is gelijk nul, dus is

$$\xi + qz_0 - ry_0 + \frac{dx_0}{dt} = 0,$$

zoodat

$$J_{a,x} = \frac{dv_{a,x}}{dt} + qv_{a,z} - rv_{a,y}\,; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of door toepassing van (1^a)

$$J_{a,x} = \xi_1 + z\frac{dq}{dt} - y\frac{dr}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + \frac{d^2x}{dt^2}. \quad . \quad (3)$$

waarbij

$$\xi_1 = \frac{d\xi}{dt} + q\,\zeta - r\eta,$$

$$2\,H = (px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

met dergelijke uitdrukkingen voor $J_{a,y}$ en $J_{a,z}$.

Wij kunnen (3) — formules van BOUR — ook schrijven:

$$J_{a,x} = J_{m,x} + 2\,(q\,v_{r,z} - r\,v_{r,y}) + J_{r,x} \quad \text{(CORIOLIS)}.$$

Voor een punt, dat aan T_f verbonden is, geldt

$$J_{a,x} = J_{m,x}\,.$$

Verstaan wij onder $\overline{J}_a^{(2)}$ de absolute versnelling van de tweede orde van $P(x, y, z)$, d. w. z. de vector wiens projecties op de vaste assen zijn:

$$J^{(2)}_{a,x_1} = \frac{dJ_{a,x_1}}{dt}, \quad J^{(2)}_{a,y_1} = \frac{dJ_{a,y_1}}{dt}, \quad J^{(2)}_{a,z_1} = \frac{dJ_{a,z_1}}{dt},$$

dan blijkt op dezelfde wijze

$$J^{(2)}_{a,x} = \frac{dJ_{a,x}}{dt} + q\,J_{a,z} - r\,J_{a,y}$$

en algemeener

$$J^{(n)}_{a,x} = \frac{dJ^{(n-1)}_{a,x}}{dt} + q\,J^{(n-1)}_{a,z} - r\,J^{(n-1)}_{a,y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wij vestigen er nog de aandacht op, dat voor elke waarde van n de uitdrukkingen voor $J^{(n)}_{a,x}$, $J^{(n)}_{a,y}$, $J^{(n)}_{a,z}$ lineair zijn in x, y, z.

Opmerking. De voorafgaande formules worden vereenvoudigd door de as OZ met de oogenblikkelijke schroefas te laten samenvallen; dan is

$$\xi = \eta = p = q = 0.$$

§ 3. Wanneer wij de beweging van T_m t. o. v. T_f de direkte beweging noemen, dan wordt onder de „omgekeerde beweging" verstaan de beweging van T_f t. o. v. T_m; de meeslepingssnelheid hierbij is dus de snelheid t. o. v. T_m van een aan T_f verbonden punt; wij zullen deze door $\overline{v}^{(i)}_m$ voorstellen.

Laat $P(x, y, z)$ nu vast aan T_f verbonden zijn, dan is volgens (1^a)

$$0 = v_{m,x} + \overset{(i)}{v}_{m,x} = v_{m,y} + \overset{(i)}{v}_{m,y} = v_{m,z} + \overset{(i)}{v}_{m,z}$$

of

$$\overset{(i)}{v}_{m,x} = -v_{m,x}, \quad \overset{(i)}{v}_{m,y} = -v_{m,y}, \quad \overset{(i)}{v}_{m,z} = -v_{m,z} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

§ 4. Wij denken ons nu T_m verbonden aan een vast stelsel.

Gevraagd wordt in de eerste plaats:

„de meetkundige plaats der punten, die in hun baan — d. w. z. hun baan t. o. v. T_f — een buigpunt beschrijven."

De projectie van de versnelling van een beweeglijk punt op de binormaal van zijn baan is steeds gelijk nul; zal ook de projektie op de hoofdnormaal gelijk nul zijn, dan is daarvoor noodig en voldoende, dat de kromtestraal van de baan oneindig is [1]), m. a. w. dat het punt in zijn baan een buigpunt beschrijft. Een punt doorloopt dus een buigpunt, als de snelheid en de versnelling gelijk gericht zijn, dus als λ zoo bepaald kan worden, dat

$$J_{a,x} - \lambda v_{a,x} = J_{a,y} - \lambda v_{a,y} = J_{a,z} - \lambda v_{a,z} = 0,$$

of, daar wij slechts punten op 't oog hebben, die aan T_m vast verbonden zijn, als

$$J_{m,x} - \lambda v_{m,x} = J_{m,y} - \lambda v_{m,y} = J_{m,z} - \lambda v_{m,z} = 0.$$

Hieruit wordt gevonden — zie (1^b) en (3) —

$$x = \frac{\Delta_1(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad y = \frac{\Delta_2(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad z = \frac{\Delta_3(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

waarin $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_2(\lambda)$, $\Delta_3(\lambda)$ en $\Delta(\lambda)$ functies van den derden graad in λ zijn.

De gevraagde meetkundige plaats is dus een ruimtekromme van den derden graad.

Laten wij OZ met de oogenblikkelijke schroefas samenvallen, dan is

$$\xi = \eta = p = q = 0$$

$$v_{m,x} = -ry, \quad v_{m,y} = rx, \quad v_{m,z} = \zeta,$$

$$J_{m,x} = \frac{d\xi}{dt} - r^2 x - y\frac{dr}{dt} + z\frac{dq}{dt}$$

$$J_{m,y} = \frac{d\eta}{dt} - r^2 y + x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt}$$

$$J_{m,z} = \frac{d\zeta}{dt} \qquad - x\frac{dq}{dt} + y\frac{dp}{dt}$$

$$\Delta(\lambda) = -r^2\left[\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right]$$

[1]) Hierbij is aangenomen, dat 't punt zich *beweegt*; de gevallen, waarbij of 't geheele vaste stelsel op 't beschouwde oogenblik in rust is of een lijn van punten vast is, zouden (met weinig moeite) afzonderlijk behandeld kunnen worden.

terwijl Δ_1 en Δ_2 functies van den tweeden graad in λ zijn en slechts Δ_3 den derden graad van λ bevat (dit laatste in de onderstelling, dat ζ en r beide ongelijk zijn aan nul).

Derhalve worden x, y en z slechts oneindig groot voor $\lambda = \infty$, en wel zoo, dat

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{x}{z} = \lim_{\lambda=\infty} \frac{y}{z} = 0.$$

De meetkundige plaats der buigpunten is in 't algemeen (d. w. z. tenzij ζ of r gelijk nul is) een ruimteparabool, die door 't oneindig vergelegen vlak geosculeerd wordt in 't oneindig vergelegen punt der schroefas.

In 't geval, dat r gelijk is aan nul, is de beweging op het beschouwde oogenblik een zuivere translatie; dan zijn $v_{m,x}$ en $v_{m,y}$ gelijk nul; zal $P(x, y, z)$ een buigpunt beschrijven, dan is daarvoor noodig en voldoende, dat ook $I_{m,x}$ en $I_{m,y}$ gelijk nul zijn.

Is de beweging op 't beschouwde oogenblik een zuivere translatie, dan is de meetkundige plaats der punten, die een buigpunt beschrijven een rechte lijn:

$$\left.\begin{aligned} -y\frac{dr}{dt} + z\frac{dq}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = 0 \\ x\frac{dr}{dt} - z\frac{dp}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Is op 't beschouwde oogenblik $\zeta = 0$, dan is op dat oogenblik de beweging een zuivere rotatie. De vergelijkingen der gevraagde meetkundige plaats luiden dan

$$-x\frac{dq}{dt} + y\frac{dp}{dt} + \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

$$r^2(x^2 + y^2) - x\frac{d\xi}{dt} - y\frac{d\eta}{dt} - z\frac{d\zeta}{dt} = 0$$

Is de beweging op 't beschouwde oogenblik een zuivere rotatie, dan is de bedoelde meetkundige plaats een parabool in een vlak evenwijdig aan de draaiingsas; ten slotte zijn hierop nog uitgezonderd de gevallen:

a. $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$, $\frac{d\xi}{dt}$ of $\frac{d\eta}{dt} \neq 0$; de bedoelde meetkundige plaats is een omwentelingscylinder door de as.

b. $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = 0$; er zijn buiten de oogenblikkelijke draaiingsas geen punten, die in hun baan een buigpunt beschrijven.

§ 5. **Laat in de tweede plaats gevraagd zijn:**
de meetkundige plaats der punten, wier baan op 't beschouwde oogenblik een stationnair osculatievlak bezit.

Wij herinneren er aan[1]), dat de afstand van 't punt $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ tot 't osculatievlak van P gelijk is aan $\pm\left(\frac{\Delta s^3}{6RT}+\epsilon\right)$, waarbij $\frac{1}{R}$ en $\frac{1}{T}$ de kromming en de torsie in P voorstellen en $\frac{\epsilon}{\Delta s^3}$ tot nul nadert tegelijk met Δs; een stationnair osculatievlak komt dus alleen daar voor waar $\frac{1}{RT}$ gelijk nul is (d. w. z. buiten de buigpunten nog daar, waar de torsie gelijk nul is).

Wij berekenen de projekties $J_t^{(2)}$, $J_h^{(2)}$, $J_b^{(2)}$ van de versnelling der tweede orde op de raaklijn, hoofdnormaal en binormaal. Zijn α, α_1, α_2 de cosinussen der hoeken, die deze met de vaste X_1-as maken, dan vinden wij uit:

$$J_{x_1}=\alpha_1\frac{v^2}{R}+\alpha\frac{dv}{dt}$$

door toepassing van de formules van Frenet—Serret.

$$J_{x_1}^{(2)}=\frac{d}{dt}J_{x_1}=\alpha\left(\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{v^3}{R^2}\right)+\alpha_1\left(\frac{3v}{R}\frac{dv}{dt}-\frac{v^2}{R^2}\frac{dR}{dt}\right)-\alpha_2\frac{v^3}{RT}$$

Derhalve

$$J_t^{(2)}=\frac{d^2v}{dt^2}-\frac{v^3}{R^2}, J_h^{(2)}=\frac{3v}{R}\frac{dv}{dt}-\frac{v^2}{R^2}\frac{dR}{dt}, J_b^{(2)}=-\frac{v^3}{RT}.$$

Bij de beweging t. o. v. T_f van een aan T_m verbonden vast stelsel is dus $J_{m,b}^{(2)}$ gelijk nul in die punten, waar 't osculatievlak stationnair is en omgekeerd, daar — tenminste in 't algemeene geval — er geen punten voorkomen, waarvoor $\bar{v}_m$ gelijk nul is.

Daar de snelheid volgens de raaklijn gericht is en de versnelling (van de eerste orde) in 't osculatievlak ligt, is 't osculatievlak dus stationnair in die punten, en in die punten alleen, waar de snelheid

[1]) Zie b.v. L. P. Eisenhart: Differential Geometry (Ginn and Co, Boston) p. 21, Ex. 10. Leggen wij de assen OX, OY, OZ langs de raaklijn, hoofdnormaal en binormaal in een gewoon punt van de kromme, dan kan deze voor voldoend kleine waarden van s voorgesteld worden door:

$$x=s-\frac{s^3}{6R^2}+\frac{s^4}{8R^3}\frac{dR}{ds}+\ldots, y=\frac{s^2}{2R}-\frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds}+\frac{s^4}{24}\left[\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{R}-\frac{1}{R^3}-\frac{1}{RT^2}\right]+\ldots$$

$$z=\frac{s^3}{6RT}-\frac{s^4}{24}\left[\frac{d}{ds}\frac{1}{RT}+\frac{1}{T}\frac{d}{ds}\frac{1}{R}\right]+\ldots.$$

de versnelling en de versnelling van de tweede orde in een zelfde vlak liggen. Als de gevraagde meetkundige plaats vinden wij dus 't oppervlak voorgesteld door:

$$\begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} \end{vmatrix} = 0.$$

De meetkundige plaats der punten, wier banen op 't beschouwde oogenblik een stationnair osculatievlak bezitten, is een oppervlak van den derden graad.

Op dezelfde wijze toonen wij aan, dat de meetkundige plaats der punten wier banen op 't beschouwde oogenblik contact van de vierde orde met 't osculatievlak hebben, voorgesteld wordt door

$$\left\|\begin{matrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} \\ J^{(3)}_{m,x} & J^{(3)}_{m,y} & J^{(3)}_{m,z} \end{matrix}\right\| = 0,$$

d.w.z. tot deze meetkundige plaats behooren de punten, gemeen aan de vier derdegraadsoppervlakken, wier vergelijkingen ontstaan door telkens uit bovenstaande matrix een rij weg te laten. De gevraagde meetkundige plaats is dus volgens een bekende stelling uit de leer der determinanten de snijkromme van

$$\begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \\ J^{(3)}_{m,x} & J^{(3)}_{m,y} & J^{(3)}_{m,z} \end{vmatrix} = 0$$

mits niet meegeteld worden de punten, bepaald door

$$\left\|\begin{matrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \end{matrix}\right\| = 0,$$

d.w.z. de derdegraadskromme, die wij vroeger als de meetkundige plaats der buigpunten vonden. De gemeenschappelijke punten der vier oppervlakken van den derden graad vormen dus een ruimtekromme van den zesden graad.

De meetkundige plaats der punten, wier banen op 't beschouwde oogenblik contact van de vierde orde met 't osculatievlak hebben, is een ruimtekromme van den zesden graad.

§ 6. Laat nu $P(x, y, z)$ een punt zijn van 't aan T_m verbonden vaste stelsel en $P'(x', y', z')$ 't middelpunt van den kromtebol van de

baan van P, dan heeft P' de karakteristieke eigenschap, dat 't normaalvlak in P samenvalt met 't osculatievlak in P' van de kromme, die de meetkundige plaats is van P', als P zijn baan beschrijft. Dus ligt P' steeds in 't normaalvlak van P, terwijl de snelheid en de versnelling van P', die immers beide liggen in 't osculatievlak van P' dus in 't normaalvlak van P, loodrecht op de snelheid van P staan. Derhalve is

$$\left.\begin{aligned}(x-x')\,v_{m,x}+(y-y')\,v_{m,y}+(z-z')\,v_{m,z}&=0\\ v_{m,x}\cdot v_{a,x'}+v_{m,y}\,v_{a,y'}+v_{m,z}\,v_{a,z'}&=0\\ v_{m,x}\,J_{a,x'}+v_{m,y}\,J_{a,y'}+v_{m,z}\,J_{a,z'}&=0\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (7)$$

waarbij $v_{a,x'}$ uit $(1a)$, $J_{(a,x')}$ uit (3) bepaald moet worden.

Schrijven wij de eerste dezer vergelijkingen aldus:

$$x'\,v_{m,x}+y'\,v_{m,y}+z'\,v_{m,z}=x\,v_{m,x}+y\,v_{m,y}+z v_{m,z}$$

en vullen wij in 't tweede lid uit $(1b)$ de uitdrukkingen voor $v_{m,x}$, $v_{m,y}$, $v_{m,z}$ in, dan vinden wij

$$x'\,v_{m,x}+y'\,v_{m,y}+z'\,v_{m,z}=\xi x+\eta y+\zeta z \quad . \; . \; . \quad (8a)$$

De tweede der vergelijkingen (7) schrijven wij:

$$v_{m,x}\left(\xi+qz'-ry'+\frac{dx'}{dt}\right)+v_{m,y}\left(\eta+rx'-pz'+\frac{dy'}{dt}\right)+$$
$$+v_{m,z}\left(\zeta+py'-qx'+\frac{dz'}{dt}\right)=0$$

en trekken hiervan af

$$v_{m,x}\frac{dx'}{dt}+v_{m,y}\frac{dy'}{dt}+v_{m,z}\frac{dz'}{dt}+x'\frac{dv_{m,x}}{dt}+y'\frac{dv_{m,y}}{dt}+z'\frac{dv_{m,z}}{dt}=$$
$$=x\frac{d\xi}{dt}+y\frac{d\eta}{dt}+z\frac{d\zeta}{dt},$$

die uit $(8a)$ door differentiatie ontstaat.

Bedenken wij dan dat:

$$J_{m,x}=\frac{dv_{m,x}}{dt}+qv_{m,z}-rv_{m,y}$$

dan blijkt

$$x'J_{m,x}+y'J_{m,z}+z'J_{m,z}=x\frac{d\xi}{dt}+y\frac{d\eta}{dt}+z\frac{d\zeta}{dt}+\xi v_{m,x}+\eta v_{m,y}+\zeta v_{m,z}$$

of

$$x'J_{m,x}+y'J_{m,y}+z'J_{m,z}=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-(\xi_1^{(i)}x+\eta_1^{(i)}y+\zeta_1^{(i)}z)\,.\;.\;(8b)$$

waarin $\xi_1^{(i)}=-\dfrac{d\xi}{dt}+q\zeta-r\eta$

Schrijven wij eindelijk de derde vergelijking van (7)

$$v_{m,x}\left(\frac{dv_{a,x'}}{dt}+qv_{a,z'}-rv_{a,y'}\right)+v_{m,y}\left(\frac{dv_{a,y'}}{dt}+rv_{a,x'}+pv_{a,r'}\right)+$$
$$+v_{m,z}\left(\frac{dv_{a,z'}}{dt}+pv_{a,y'}-qv_{a,x'}\right)=0$$

en trekken wij hiervan af de vergelijking, die uit de tweede van (7) door differentiatie ontstaat, dan blijkt in de eerste plaats, dat wij de derde van (7) kunnen vervangen door

$$v_{a,x'}J_{m,x}+v_{a,y'}J_{m,y}+v_{a,z'}J_{m,z}=0,$$

wat ook dadelijk in te zien is.

De meetkundige plaats van P'' is n.l. de keerkromme van 't ontwikkelbaar oppervlak beschreven door de poolas (kromteas) van de baan van P, die steeds loodrecht op 't osculatievlak in P staat, waarin de snelheid en de versnelling van P liggen.

Dus vinden wij dan nogmaals

$$\left.\begin{array}{l} v_{a,x'}v_{m,x}+v_{a,y'}v_{m,y}+v_{a,z'}v_{m,z}=0 \\ v_{a,x'}J_{m,x}+v_{a,y'}J_{m,y}+v_{a,z'}J_{m,z}=0 \end{array}\right\}$$

Schrijven wij nu deze laatste vergelijking

$$J_{m,x}\left(\xi+qz'-ry'+\frac{dx'}{dt}\right)+J_{m,y}\left(\eta+rx'-pz'+\frac{dy'}{dt}\right)+$$
$$+J_{m,z}\left(\zeta+py'-qx'+\frac{dz'}{dt}\right)=0$$

en trekken wij hiervan af de vergelijking, die uit (8b) door differentiatie gevonden wordt, dan vinden wij

$$x'J^{(2)}_{m,x}+y'J^{(2)}_{m,y}+z'J^{(2)}_{m,z}=3\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right)-$$
$$-\left(\xi^{(i)}_2x+\eta^{(i)}_2y+\zeta^{(i)}_2z\right), \ldots (8c)$$

waarin

$$\xi^{(i)}_2=-\left[\frac{d^2\xi}{dt^2}-q\frac{d\zeta}{dt}+r\frac{d\eta}{dt}-2\zeta\frac{dq}{dt}+2\eta\frac{dr}{dt}+2\frac{\partial H(\xi,\eta,\zeta)}{\partial\xi}\right]$$

(voor de beteekenis van H zie § 2).

Door de drie vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} x'v_{m,x}+y'v_{m,y}+z'v_{m,z}=\xi x+\eta y+\zeta z \\ x'J_{m,x}+y'J_{m,y}+z'J_{m,z}=\Sigma\xi^2-\Sigma\xi^{(i)}_1x \\ x'J^{(2)}_{m,x}+y'J^{(2)}_{m,y}+z'J^{(2)}_{m,z}=\Sigma\xi\frac{d\xi}{dt}-\Sigma\xi^{(i)}_2x \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \quad (8)$$

is een kubische verwantschap tusschen de punten $P(x,y,z)$ en $P'(x',y',z')$ bepaald. Derhalve:

er bestaat een kubische verwantschap, wanneer aan elkaar worden

toegevoegd een punt P van 't aan T_m verbonden stelsel en 't middelpunt P' van den kromtebol, die met de baan van P t.o.v. T_f contact van de derde orde heeft.

§ 7. Wij vinden nu dadelijk terug de meetkundige plaats der punten, wier banen op 't beschouwde oogenblik een stationnair osculatievlak bezitten; 't zijn die punten P, waarvan 't toegevoegde punt P' oneindig ver ligt, dus de punten, bepaald door

$$\begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} \end{vmatrix} = 0.$$

Wij vragen nu de meetkundige plaats van het punt P, welks baan met den kromtecirkel contact van de derde orde (m. a. w. vierpuntige aanraking) heeft.

Aan een dergelijk punt P is niet een enkel punt P' maar een lijn van punten P' toegevoegd; ze vormen de singuliere punten van de transformatie, waardoor de punten van de ruimte (P) in die van de ruimte (P') overgaan. Dus wordt deze meetkundige plaats bepaald door:

$$\begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} & \Sigma\, \xi_x \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} & \Sigma\, \xi^2 - \Sigma\, \xi_1^{(i)}\, x \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} & 3\, \Sigma\, \xi \dfrac{d\xi}{dt} - \xi_2^{(i)}\, x \end{vmatrix} = 0.$$

Op dezelfde wijze als in § 6 blijkt:

De punten van 't aan T_m verbonden stelsel, wier banen met den kromtecirkel contact van de derde orde (vierpuntige aanraking) hebben, vormen een ruimtekromme van den zesden graad.

Laat nu nog gevraagd worden naar die punten P, wier banen in P met den kromtebol contact van de vierde orde (vijfpuntige aanraking) hebben.

Zal een punt P tot deze meetkundige plaats behooren en P' 't middelpunt van den kromtebol zijn, dan is [1])

$$v_{a,x'} = v_{a,y'} \qquad v_{a,z'} = 0.$$

De coördinaten van P' moeten dus voldoen behalve aan (8) ook nog aan de vergelijkingen, die daaruit ontstaan door differentiatie

[1]) Zie de Noot aan 't slot.

en invulling van

$$\frac{dx'}{dt} = -(\xi + qz' - ry'), \quad \frac{dy'}{dt} = -(\eta + rx' - pz'),$$
$$\frac{dz'}{dt} = -(\zeta + py' - qx').$$

Differentieeren wij echter (8*a*), dan geeft deze substitutie ons slechts (8*b*); uit (8*b*) ontstaat op dezelfde wijze (8*c*); uit (8*c*) vinden wij

$$x' J^{(3)}_{m,x} + y' J^{(3)}_{m,y} + z' J^{(3)}_{m,z} = \Sigma \left[\xi J^{(2)}_x + \frac{d}{dt}\left(3\xi \frac{d\xi}{dt} + \xi^{(i)}_2 x\right)\right]$$

of

$$x' J^{(3)}_{m,x} + y' J^{(3)}_{m,y} + z' J^{(3)}_{m,z} = A_3 + \Sigma \xi^{(i)}_3 x, \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (8d)$$

waarin de coefficiënten A^3, $\xi^{(i)}_3$, $\eta^{(i)}_3$, $\zeta^{(i)}_3$, vrij omvangrijke maar gemakkelijk te berekenen uitdrukkingen hebben.

Voor de gevraagde meetkundige plaats wordt dus gevonden:

$$\begin{vmatrix} v_{m,x} & v_{m,y} & v_{m,z} & \Sigma \xi x \\ J_{m,x} & J_{m,y} & J_{m,z} & \Sigma \xi^2 - \xi^{(i)}_1 x \\ J^{(2)}_{m,x} & J^{(2)}_{m,y} & J^{(2)}_{m,z} & \Sigma \xi \frac{d\xi}{dt} - \Sigma \xi^{(i)}_2 x \\ J^{(3)}_{m,x} & J^{(3)}_{m,y} & J^{(3)}_{m,z} & A_3 - \Sigma \xi^{(i)}_3 x \end{vmatrix} = 0$$

De punten P van 't aan T_m verbonden stelsel, wier banen t.o.v. T_f met den kromtebol in P contact van de vierde orde hebben, vormen een oppervlak van den vierden graad.

§ 8. 't Is duidelijk, dat wij gelijkluidende uitkomsten zullen vinden bij de beschouwing van de bewegingssingulariteiten bij de omgekeerde beweging; in 't bijzonder stippen wij thans aan, dat daarbij een kubische verwantschap zal bestaan, als wij op een bepaald oogenblik laten overeenstemmen een punt P' van de vaste ruimte met 't middelpunt P van den kromtebol van de baan, die P' t.o.v. T_m doorloopt. Op deze tweede kubische verwantschap willen wij nader ingaan.

De voorwaarde, dat $P'(x', y', z')$ ligt in 't normaalvlak van de baan van $P(x, y, z)$ t.o.v. T_f wordt uitgedrukt door de eerste der vergelijkingen (7):

$$(x' - x)\, v_{m,x} + (y' - y)\, v_{m,y} + (z' - z)\, v_{m,z} = 0.$$

Nu is

$$(x'-x)\, v_{m,x} + (y'-y)\, v_{m,y} + (z'-z)\, v_{m,z} \equiv (x'-x)(\xi + qz - ry) +$$
$$+ (y'-y)(\eta + rx - pz) + (z'-z)(\zeta + py - qx) \equiv$$
$$(x'-x)(\xi + qz' - ry') + (y'-y)(\eta + rx' - pz') + (z'-z)(\zeta + py' - qx'),$$

dus volgens (5)

$$(x'-x)\, v_{m,x} + (y'-y)\, v_{m,y} + (z'-z)\, v_{m,z} \equiv (x-x')\, \overset{(i)}{v}_{m,x'} +$$
$$+ (y-y')\, \overset{(i)}{v}_{m,y'} + (z-z')\, \overset{(i)}{v}_{m,z'}$$

Wij kunnen (7) dus ook schrijven

$$(x-x')\, \overset{(i)}{v}_{m,x'} + (y-y')\, \overset{(i)}{v}_{m,y'} + (z-z')\, \overset{(i)}{v}_{m,z'} = 0 \quad . \; . \; . \quad (9)$$

d. w. z. bij de omgekeerde beweging ligt P in 't normaalvlak van de baan van het aan T_f verbonden punt P'.

Ligt op eenig oogenblik bij de directe beweging P' in 't normaalvlak van de baan van 't aan T_m verbonden punt P, dan ligt bij de omgekeerde beweging P in 't normaalvlak van de baan van 't aan T_f verbonden punt P'.

Wij zagen reeds, dat de eisch, dat P' 't middelpunt is van den kromtebol van de baan van P bij de direkte beweging wordt uitgedrukt door de vergelijkingen (7) of (8); welke zijn nu de voorwaarden, dat P 't middelpunt is van den kromtebol van de baan van P' bij de omgekeerde beweging?

De vergelijking van 't normaalvlak van de baan van P' bij de omgekeerde beweging is

$$(X-x')\, \overset{(i)}{v}_{m,x'} + (Y-y')\, \overset{(i)}{v}_{m,y'} + (Z-z')\, \overset{(i)}{v}_{m,z'} = 0\,; \quad . \; . \quad (10)$$

't middelpunt van den kromtebol van de baan van P' wordt dus bepaald uit deze vergelijking en nog twee, die uit haar ontstaan door differentiatie naar t; daarbij moeten voor $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ de waarden ingevuld worden, die volgen uit

$$v_{a,x'} = v_{a,y'} = v_{a,z'} = 0$$

dus b.v.

$$\frac{dx'}{dt} = -(\xi + qz' - ry').$$

Om uit te drukken, dat $P(x, y, z)$ 't gezochte middelpunt is, moet dan nog gesubstitueerd worden

$$X = x, \;\; Y = y, \;\; Z = z.$$

Dan gaat echter (10) over in (8*a*), terwijl wij reeds zagen, dat op de aangegeven wijze uit (8*a*) de vergelijkingen (8*b*) en (8*c*) ontstaan (§ 7). Derhalve:

Is P' 't middelpunt van den kromtebol van de baan van P bij de direkte beweging, dan is P 't middelpunt van den kromtebol van de baan van P' bij de omgekeerde beweging, m. a. w. de kubische transformatie wordt tegelijk met de beweging omgekeerd.

Wij kunnen hier nog een stap verder gaan.

De meetkundige plaats van het aan T'_m verbonden punt P, welks baan t.o.v. T_f — dus bij de direkte beweging — met den kromtebol in P contact van de vierde orde heeft, is op elk bepaald oogenblik een oppervlak O_m van den vierden graad (§ 7); eveneens zal een oppervlak O'_f van den vierden graad de meetkundige plaats zijn van het punt P', welks baan bij de omgekeerde beweging contact van de vierde orde heeft met den kromtebol in P'.

't Eerste dezer oppervlakken werd bepaald door aan (8) nog de vergelijking (8*d*) toe te voegen, die uit (8*c*) door differentiatie ontstaat, als voor $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ de waarden gesubstitueerd worden, die volgen uit

$$v_{a,x'} = v_{a,y'} = v_{a,z'} = 0$$

Wij vragen nu niet naar O'_f maar naar de meetkundige plaats van 't punt P, dat 't middelpunt is van den kromtebol, die met de baan van een punt P' van O'_f bij de omgekeerde beweging contact van de vierde orde heeft.

't Normaalvlak van de baan van P' heeft tot vergelijking:

$$N^{(i)} = (X-x')\, v^{(i)}_{m,x'} + (Y-y')\, v^{(i)}_{m,y'} + (Z-z')\, v^{(i)}_{m,z'} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

't middelpunt van den kromtebol wordt gevonden uit:

$$N^{(i)} = 0, \; \frac{dN^{(i)}}{dt} = 0, \; \frac{d^2N^{(i)}}{dt^2} = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

de voorwaarde, dat deze bol met de baan van P' contact van de vierde orde heeft, wordt uitgedrukt door

$$\frac{d^3N^{(i)}}{dt^3} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

terwijl $\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$ bepaald worden uit

$$v_{a,x'} = v_{a,y'} = v_{a,z'} = 0$$

De gevraagde meetkundige plaats wordt dan gevonden door uit (11) en (12) x', y', z' te elimineeren.

Op dezelfde wijze hebben wij echter — want 't eerste lid van (10) is identiek gelijk aan dat van (8) — het oppervlak O_m voortgebracht; de gezochte meetkundige plaats is dus O_m.

Bij de direkte beweging is een oppervlak $\bar{O}_m$ van den vierden graad de meetkundige plaats der aan T_m verbonden punten, wier banen door den kromtebol vijfpuntig worden aangeraakt; eveneens is bij de omgekeerde beweging een oppervlak $\bar{O}'_f$ van den vierden graad de meetkundige plaats der aan T_f verbonden punten, wier banen door den kromtebol vijfpuntig worden aangeraakt; de punten van $\bar{O}_m$ en $\bar{O}'_f$ correspondeeren bij beide kubische verwantschappen, zoodat b.v. bij de direkte beweging een punt P' van $\bar{O}'_f$ 't middelpunt is van den kromtebol, die de baan van een punt P van $\bar{O}_m$ vijfpuntig aanraakt.

SLOTNOOT.

In § 7 merkten wij op:

Beschrijft een punt P een ruimtekromme γ en 't punt P' de kromme, die de meetkundige plaats is van 't middelpunt van den kromtebol van γ in P, dan wordt de voorwaarde, dat deze bol met γ contact van de vierde orde heeft, uitgedrukt door de snelheid van P' gelijk nul te stellen.

't Bewijs van deze stelling willen wij nog even aangeven.

Stellen wij γ voor door de ontwikkeling in § 5 (voetnoot) en den kromtebol door:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,Ry - 2\,R^2 T \frac{d}{ds}\frac{1}{R} = 0,$$

dan vinden wij als voorwaarde voor contact van de vierde orde

$$\sigma_4 = \frac{1}{RT}\left\{\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right)\right\} = 0,$$

en voor de boog door P' doorloopen (zie b.v. BIANCHI-LUKAT: Vorlesungen über Differential-Geometrie, I, zweite Auflage, p. 25)

$$ds' = v_{a,x'}\,dt = \frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right).$$

Uit $v_{a,x'} = 0$ volgt $\sigma_4 = 0$, daar $\dfrac{1}{RT} = \infty$ uitgesloten is. Omgekeerd is σ_4 alleen dan gelijk nul, als $v_{a,x'}$ geluk nul is, daar voor $\dfrac{1}{RT} = 0$ in 't algemeen $v_{a,x'}$ oneindig groot wordt en σ_4 van nul verschilt. 't Zou ons te ver voeren hierop nader in te gaan.

Dierkunde. De Heer WEBER biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. VERSLUYS en R. DEMOLL: *„De verwantschap der Merostomata met de Arachnida en met de andere klassen der Arthropoda"* (eerste mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer SLUITER).

I.

Nog steeds loopen de opvattingen over den phylogenetischen samenhang van de groote afdeelingen der Arthropoden, der *Onychophora, Myriapoda, Hexapoda, Arachnida* en *Crustacea*, sterk uiteen. En het is vooral de verschillende beoordeeling van de verwantschap der Merostomen met de Arachniden, welke tot zoo verschillende opvattingen in deze vragen voert.

In het middelpunt der discussie staat de eenige levende vertegenwoordiger der Merostomen, het geslacht *Limulus*. Deze vorm leeft in zee en haalt adem door kieuwen, welke blijkbaar door ledematen worden gedragen. In overeenstemming daarmede werd het dier het eerst tot de Crustaceen gerekend. Verder onderzoek scheen deze opvatting te bevestigen; vooral maakte de ontdekking grooten indruk, dat de jonge larve van *Limulus* in algemeenen lichaamsbouw gelijkt op de Trilobiten, oude, uitgestorven vertegenwoordigers der Crustaceen. Men sprak van een Trilobitenstadium in de ontwikkeling van *Limulus*.

Anderzijds had reeds in het jaar 1829 STRAUS DÜRKHEIM met grooten nadruk op eene bloedsverwantschap van *Limulus* met de Arachniden gewezen. Hem volgden eenige andere onderzoekers, tot in 1881 en volgende jaren RAY LANKESTER het Limulusprobleem aan een nauwkeurig onderzoek onderwierp. Hij toonde daarbij een werkelijk verrassende overeenstemming in den bouw van *Limulus* met de Arachniden aan, in het bijzonder met de Scorpioniden. LANKESTER twijfelde anderzijds niet aan de verwantschap van *Limulus* met de Trilobiten en andere Crustaceen. Daar *Limulus* in vergelijking met de kreeften een veel meer gespecialiseerde vorm is, moest hij aannemen, dat *Limulus* van de Trilobiten of daarmede verwante Crustaceen afstamt. De Arachniden moesten dan weer van *Limulus* of van diens minder gespecialiseerde voorvaderen, de *Gigantostraca*, afstammen, waarbij de stamvormen der Arachniden van het zeeleven tot het landleven moesten zijn overgegaan.

Deze Limulustheorie van LANKESTER is zeer belangrijk wegens hare consequenties; deze zijn:

1. Daar *Limulus* en nog meer de Gigantostraken in hun bouw bijzonder opvallend met de Scorpioniden overeenstemmen, moeten de oudste landbewonende Arachniden in hoofdzaken den bouw der Scorpioniden bezeten hebben. Alle andere typen der Arachniden moeten dus van eenen scorpionidenachtigen stamvorm afgeleid worden.

2. Daar het geheel en al uitgesloten is, dat vormen als de *Myriapoda* van Arachniden afstammen (de eerste staan op een veel lageren ontwikkelingstrap), zoo moeten de *Myriapoda* en de daarmede verwante *Hexapoda* een eigen stam in de ontwikkeling der landarthropoden vormen. Aan diens wortel moet men de zeer oorspronkelijke *Onychophora* plaatsen. De Arachniden vormen dan daarnaast een tweeden stam der landarthropoden, die uit de marine *Merostomata* ontsprong en aan wiens wortel de Scorpioniden staan. Het is dus eene noodzakelijke consequentie der Limulustheorie van LANKESTER dat landarthropen tweemaal zijn ontstaan. Ook hun eigenaardige ademhalingsorganen, de tracheen, zouden dan tweemaal geheel onafhankelijk van elkaar, ontstaan zijn.

Deze twee consequenties der Limulustheorie van LANKESTER zijn van groote beteekenis. Men bedenke dat een tracheensysteem volstrekt niet zoo eenvoudig gebouwd is en dat een tweemalig ontstaan reeds zeer opmerkelijk zoude zijn. En dan verlangt de afleiding der zoo uiteenloopende, ten deele zoo eenvoudigen bouw bezittende typen der Arachniden van scorpioenachtige voorvaderen eene verbazingwekkende plasticiteit van den lichaamsbouw, met diepingrijpende veranderingen daarvan, en veelvuldigen terugkeer tot eene meer oorspronkelijke organisatie. De omvormingsmogelijkheid van een reeds samengestelden lichaamsbouw wordt hier in een verrassend licht gebracht.

II.

Onderzoeken wij eerst de vraag, hoever de overeenstemming in bouw bij de Merostomen en de Arachniden, vooral de Scorpioniden, gaat.

LANKESTER trachte (1881) het bewijs te leveren, dat de organisatie van *Limulus* segment met segment en orgaan met orgaan met die van den scorpioen overeenkomt. En al moesten wij ook ten opzichte van de beoordeeling van enkele organen tot wezenlijk andere opvattingen komen, zoo is toch het resultaat van eene nieuwe vergelijking de volkomen bevestiging van LANKESTER's conclusie.

De uitwendige vorm van *Limulus* is wel is waar belangrijk gewijzigd (Fig. 1), in aanpassing aan eene in het zand woelende levenswijze. Maar de uitgestorven voorvaderen van *Limulus*, de

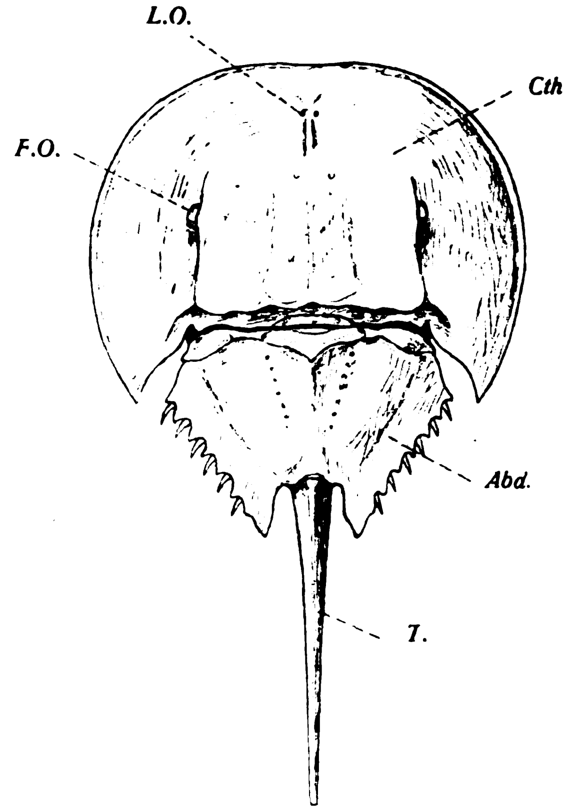


Fig. 1. *Limulus*, van de rugzijde gezien. Ongeveer ⅓ der ware grootte. Naar SHIPLEY, Cambridge Nat. Hist., vol. 4, 1909, p. 261, iets gewijzigd.

Abd abdomen; *Cth* cephalothorax; *F.O* facettenoog; *L.O* lensoog; *T* telson.

Gigantostraca, gelijken zeer sterk op de Scorpioniden in uitwendigen vorm, segmenteering en ledematen (Fig. 2 en 3). De belangrijkste punten van overeenstemming zijn de volgende:

Het lichaam bestaat uit een cephalothorax, een praeabdomen van 7 en een postabdomen van 5 segmenten met telson.

De cephalothorax is opgebouwd uit 6 goed ontwikkelde, ledematen dragende segmenten. De embryologie van den scorpioen en van *Limulus* leert ons, dat daarbij voor nog een koplap (acron) en een rudimentair praecheliceren-segment komen, en dat achter zich een tweede rudimentair segment, het praegenitaal segment, aansluit (vergelijk: BRAUER, 1895; KISHINOUYE, 1891; KINGSLEY, 1893;

Patten en Redenbaugh, 1899; Heymons, 1905). Het praecheliceren segment is zeer rudimentair; het vormt geen zelfstandig coeloom-

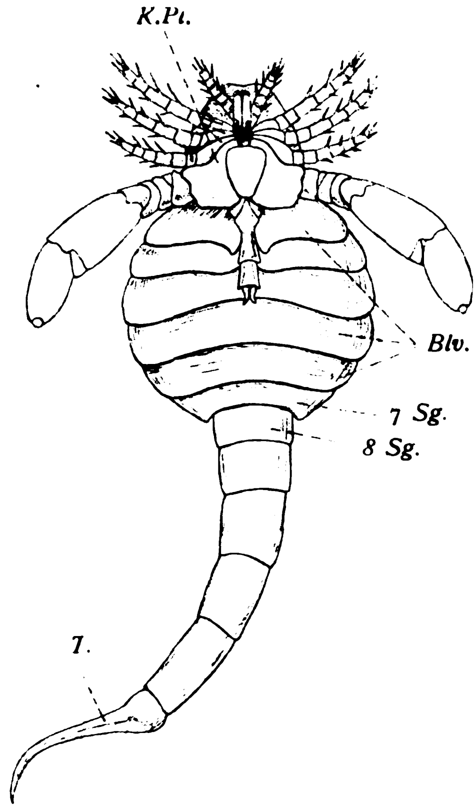


Fig. 2. Een scorpionidenachtige gigantostrake, *Eusarcus scorpionis* Grote en Pitt, van de buikzijde. Circa ⅓ der nat. grootte. Naar Clarke en Ruedemann, 1912, Vol. 2, Tab. 28.

Blv. bladvoeten; *K.Pl* kauwplaten der ledematen, welke de mondopening omgeven; 7 *Sg* 7de abdom. segment (laatste praeabdominale segment = 1ste segment zonder bladvoet en zonder kieuwen, met normaal sterniet); 8 *Sg* 8ste segment van het abdomen (eerste postabd. segment, met ringvormig chitinepantser); *T* telson (giftstekel).

zakje meer, maar het coeloomzakje van het chelicerensegment groeit naar voren toe in het praechelicerensegment.

Terwijl het voorste segment, dat ledematen draagt, bij de meeste Arthropoden antennen draagt, ontbreken deze bij de Arachniden en Merostomen; de voorste ledematen zijn hier de cheliceren, korte, twee- of drieledige en meest scharendragende aanvalswapenen. Het is dit een zeer opvallend kenmerk, hetwelk *Merostomata* en *Arach-*

nida vereenigt; een zelfden toestand vinden wij alleen nog maar bij de Pycnogoniden, een groep, die volgens nieuwste onderzoekingen (WIREN, 1918) waarschijnlijk met de Merostomen en Arachniden

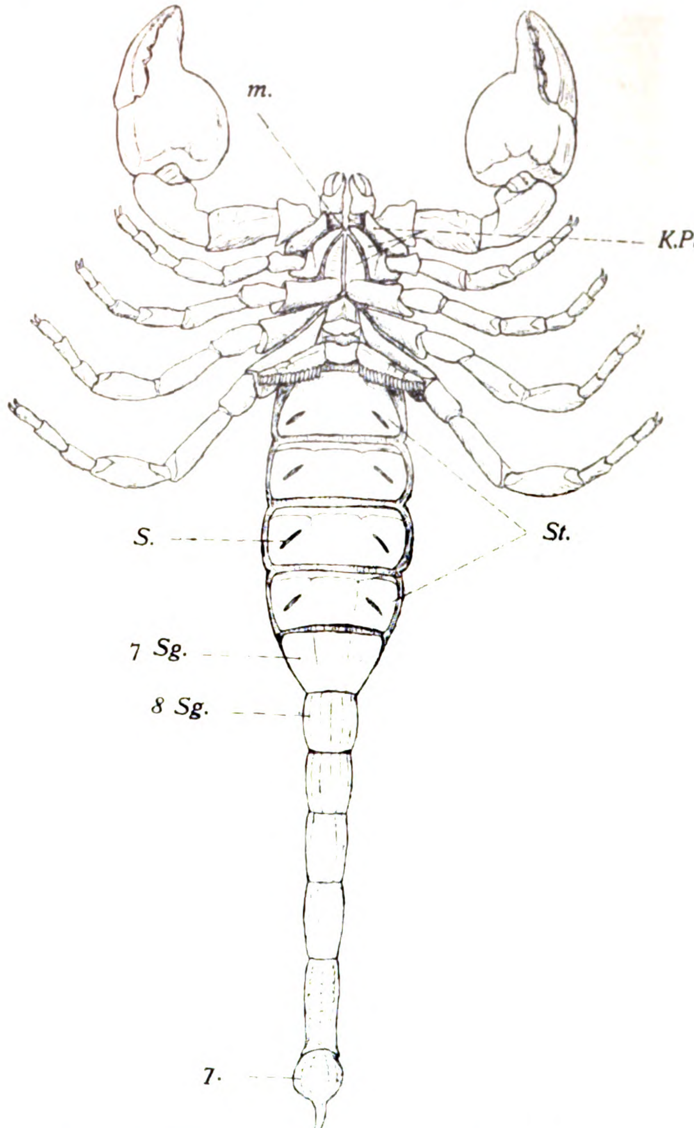


Fig. 3 Scorpioen, *Pandinus*, van de buikzijde; origineel. 2/3 der nat. grootte.

K.Pl kauwplaten; *m* mond; *S* stigmata; 7 *Sg* 7de abdom. segment (laatste praeabd. segment = 1ste segment zonder ademhalingsorganen); 8 *Sg* 8ste abdom. segment (eerste postabdom. segment, met ringvormig chitinepantser); *St* sternieten van het 3de—6de abdominale segment, welke de tracheenlongen bedekken; *T* telson (giftstekel).

verwant is. Dat de cheliceren der *Merostomata* en *Arachnida* aan het zelfde lichaamssegment liggen is niet twijfelachtig. Het segment volgt op acron en praechelicerensegment en verschillende overeenstemmingen in bijzonderheden spreken voor deze homologie. Zoo treedt het chelicerensegment in de ontogenese later op dan de vijf volgende ledematen dragende segmenten van den cephalothorax en wel snoert het zich dan van het voorste gedeelte van het lichaam af. Verder ligt het chelicerensegment eerst postoraal en verschuift eerst in den loop der ontwikkeling naar voren tot eene praeorale ligging bereikt is. Een zelfde verschuiving vertoont het bijbehoorende chelicerenganglion.

Typisch voor de Arachniden is het, dat de verdere ledematen van den cephalothorax, 5 paar, geen eigenlijke monddeelen vormen, maar als lange, meerleedige looppooten, of, zooals in het bijzonder met het voorste dezer pooten, de pedipalpen, het geval is, als tastorganen, ontwikkeld zijn. Daarnaast slechts zijn de voorste dezer ledematen ook als monddeelen werkzaam, doordat als kauwplaten dienende uitsteekende gedeelten der coxae bij het verwerken van het voedsel medewerken. Mandibels en maxillen ontbreken bij de Arachniden. Bij de *Merostomata* vinden wij een geheel gelijken toestand; wel is waar zijn hier aan de coxae van alle vijf pootenparen kauwplaten ontwikkeld, maar voor het overige wordt de vorm dezer ledematen door deze aanpassing niet beïnvloed (Fig. 2, 3, *K.Pl*). In bijzonderheden is de geleding der pooten eenigszins verschillend, maar een nauwkeurig onderzoek toont hier toch ook veel overeenstemming aan. Bij den in zee levenden (fossielen) scorpioen *Palaeophonus* nadert de vorm der pooten dien der *Merostomata*.

Op de goedontwikkelde segmenten van den cephalothorax volgt het rudimentaire praegenitaalsegment. Bij verschillende Arachniden is dit segment ook bij het volwassen dier nog duidelijk als *voorste abdominale* segment afgegrensd. Bij de volwassen Scorpioniden en *Merostomata* heeft het door vergroeiing *met den cephalotorax* zijn zelfstandigheid verloren.

Ook in de segmenteering van het abdomen bestaat tusschen de Scorpioniden en de primitive *Merostomata*, de *Gigantostraca*, volkomen overeenstemming. Het abdomen bestaat uit 12 segmenten en het postanale telson (de giftstekel der scorpioenen). De differentieering in een uit 7 segmenten bestaand praeabdomen met gescheiden tergieten en sternieten, en een uit 5 segmenten bestaand postabdomen, waarvan de segmenten door een gesloten, uit een stuk bestaanden skeletring omgeven worden, is scorpioenen en *Gigantostraca* gemeen. Het telson eindelijk is bij den Gigantostrake *Eusarcus scorpionis* van

denzelfden eigenaardigen vorm als bij de scorpioenen (verg. fig. 2 en 3): bij *Hughmilleria* vertoont het nog overeenstemming daarmede. Het eigenaardige gebruik van het telson als wapen (giftstekel) zal dus wel aan scorpioenen en primitive Gigantostraken gemeen geweest zijn. Eveneens dan wel ook de met deze functie van het telson eng verbonden vorming van een slank en zeer beweeglijk postabdomen.

Overeenstemming bestaat verder in zooverre als het praeabdomen de ademhalingsorganen draagt — bij de scorpioenen aan segment 3 tot 6 de tracheenlongen, bij de *Gigantostraca* en *Limulus* aan segment 2 tot 6 de kieuwen. Bij vergelijking der kieuwen van *Limulus* met de tracheenlongen der scorpioenen en van andere Arachniden blijkt eene in menig opzicht opvallende overeenstemming in den bouw. In de ligging schijnt eerst in zooverre een aanmerkelijk verschil voorhanden te zijn, als de kieuwen der *Merostomata* op de achterzijde van bladvoeten liggen, terwijl de tracheenlongen der Arachniden aan de buikzijde binnen in het lichaam liggen, bedekt door de sternieten der segmenten, waarin zij liggen. Bladvoeten ontbreken bij de Arachniden en het verschil wordt daardoor schijnbaar nog grooter. Lankester (1881, 1885), Kingsley (1885, 1893) en Mac Leod (1884) trachtten dit verschil in ligging te verklaren en de ademhalingsorganen der Arachniden van de kieuwen van *Limulus* af te leiden. Nader onderzoek toont echter, dat een zoo belangrijk verschil als de genoemde onderzoekers hier meenden te vinden, in het geheel niet voorhanden is. De bladvoeten der *Gigantostraca* komen geheel overeen met de sternieten aan het praeabdomen der scorpioenen (verg. fig. 2 en 3): zij zijn daarmede identiek en werden ook herhaaldelijk als sternieten aangeduid (o.a. door Sarle, 1903, p. 1093, en door Clarke en Ruedemann in hun monographie, 1912, p. 60, 65). De kieuwen der *Gigantostraca* liggen nu juist zoo op de naar het lichaam gekeerde oppervlakte dezer sternieten, als de tracheenlongen bij de Arachniden. In de *ligging* is geen verschil voorhanden. Alleen liggen de kieuwen der *Gigantostraca* niet in een enge, slechts door een stigma geopende ruimte, zooals de tracheenlongen, maar in eene ruime holte die aan den achterrand en zijrand der sternieten in open verbinding met de buitenwereld staat. De fout bij Lankester, Kingsley en Mac Leod lag hierin, dat zij in de bladvoeten ware ledematen zagen, homoloog met de typische ledematen der Arthropoden. Bij de *Gigantostraca* is het zonder meer duidelijk, dat dit niet juist is, maar dat het sternieten zijn, die beweeglijk zijn geworden. Dat de bladvoeten van *Limulus* ook slechts gewijzigde sternieten zijn (daarnaast wellicht nog restes van ledematen insluitend) is bij hun meer samengestelden bouw veel minder

duidelijk, moet echter toch naar analogie met den bij de *Gigantostraca* voorhanden toestand aangenomen worden (verg. de uitvoeriger uiteenzetting bij VERSLUYS, 1919).

Scorpioniden en primitive *Merostomata* (*Gigantostraca*) vertoonen dus tot in de bijzonderheden der segmenteering geheel gelijken bouw, gelijke indeeling van het lichaam in afdeelingen, die uit een overeenkomend aantal segmenten bestaan, en gelijke rudimentaire segmenten. De neuromerie, die oorspronkelijke toestanden zoo taai kan vasthouden, brengt geen aanwijzing van een of ander belangrijk verschil in de segmenteering, bijvoorbeeld door het voorkomen van rudimentaire Neuromeren, die slechts aan de eene of andere der twee groepen eigen zijn. Dat bij *Limulus* met de verkorting van het abdomen eenige *achterste* segmenten en neuromeren ontbreken is niet verwonderlijk. In den bouw der hersenen bestaat zeer vergaande overeenstemming (verg. HOLMGREN, 1916, p. 107 en volgende).

Eene interessante overeenstemming ligt verder in het optreden van een gelijk, in den cephalothorax liggend inwendig skelet, van een endosterniet, bij *Limulus* en bij de Arachniden. Het heeft bij *Limulus* ook in den vorm overeenstemming met dat der *Araneae* en der Scorpioenen, zoowel in de uitsteeksels als in de vorming van eenen subneuralen boog, die het centrale zenuwstelsel als een ring omgeeft.

Bij het spierstelsel is het optreden van eigenaardige, dorsoventrale spieren van beteekenis, die zich in het abdomen (praeabdomen) in segmentale rangschikking van den dorsalen tot den ventralen lichaamswand uitstrekken. Bijzonder interessant zijn de, in dezelfde afdeeling van den romp liggende venopericardiale spieren, welke van *Limulus*, de scorpioenen, *Araneae* en *Pedipalpi* bekend zijn; zij verbinden den wand van het pericard met dien van den ventralen bloedsinus en zijn, voor zoover wij weten, van andere Arthropoden niet bekend (verg. LANKESTER, BENHAM & BECK, 1885). Het spierstelsel van den cephalothorax vertoont, in samenhang met het voorhanden gelijkvormige endosterniet een zekere mate van overeenstemming. Deze gelijkenissen zijn daarom van eenige beteekenis, omdat in overeenstemming met den geheel anderen vorm van het huidskelet belangrijke verschillen in het spierstelsel bij *Limulus* en den scorpioen te verwachten zijn, en in menig opzicht ook voorkomen. BERNARD (1896, p. 395) ziet in deze verschillen eene moeilijkheid voor de onderstelling eener engere verwantschap van *Limulus* met de Arachniden, maar deze verschillen komen ons volstrekt niet grooter voor dan bij de bijzondere specialisatie van het abdomen van *Limulus* te verwachten is. De verschillen in het spierstelsel zouden alleen dan in dezen zin beteekenis gehad hebben, wanneer zij bij *gelijken*

bouw van het abdomen, dus bijv. tusschen het spierstelsel der scorpioenen en de ons in dit opzicht als fossiele vormen onbekende *Gigantostraca* aangetoond waren.

Aan het darmkanaal zijn als punten van overeenstemming, welke met eene verwantschap in betrekking gebracht kunnen worden, in het bijzonder te vermelden het voorkomen van meerdere achter elkander liggende darmuitstulpingen (zoogen. lever), en hun gelijke, eigenaardige wijze van vorming bij het embryo door de inwoekering van mesodermale septa in de dooiermassa. Bij de Crustaceen ontstaat het hepatopancreas (lever) daardoor, dat op een punt van den middendarm uitstulpingen uitgroeien.

Ook de late aanleg van het proctodaeum hebben Arachniden en *Limulus* gemeen. WESTER (1913) toonde verder aan, dat de chitinebekleeding van het darmkanaal bij *Limulus* met die der Arachniden overeenkomt, in zooverre een belangrijk stuk van het darmkanaal zonder inwendige chitinebekleeding blijft; bij Crustaceen, zooverre onderzocht, vond hij steeds den geheelen darm door een chitinelaagje bekleed.

LANKESTER (1881, p. 615; 1904, p. 196) heeft ook op verscheidene punten van overeenkomst in het bloedvaatstelsel gewezen. Zonder twijfel bestaat hier gelijkenis. Maar afgezien van de reeds vermelde eigenaardige venopericardiale spieren, die op eene gelijke bijzonderheid in den bloedsomloop wijzen, zijn de overige punten van overeenstemming toch niet zoodanige, dat zij niet ook een gevolg van convergente ontwikkeling zouden kunnen zijn; zij zijn daarom als *bewijzen* voor eene verwantschap van *Limulus* met de scorpioenen niet van groote waarde. Daarmede willen wij niet ontkennen dat deze punten van gelijkenis met de opvatting eener nauwe verwantschap dezer dieren zeer goed overeenstemmen.

Evenzoo schijnen ons de — naast niet onwezenlijke verschillen — voorhanden punten van overeenstemming in den bouw der coxaalklieren van scorpioen en *Limulus* te moeten worden beoordeeld. De monding der coxaalklieren aan de coxae van het 5[de] paar ledematen stemt overeen.

De wijze waarop in de ovarien de eifollikels gevormd worden, doet *Limulus* en de Arachniden als eene scherp omgrensde groep herkennen. Denzelfden bouw vinden wij alleen nog bij *Peripatus* en bij de Myriapoden. Dat deze vormen bijeen behooren wordt verder door de in de eieren voorhanden dooierkernen bevestigd.

Uit al deze punten van overeenkomst moet met beslistheid eene nadere verwantschap van *Limulus* en der *Gigantostraca* met de Arachniden afgeleid worden. En deze verwantschap moet zeer eng

geweest zijn, want de overeenstemming in den bouw die tusschen de *Gigantostraca* en de Scorpioniden bestaat, is niet alleen eene algemeene, fundamenteele, maar zij strekt zich ook uit over eene reeks van bijzondere aanpassingen. Convergentie wordt uitgesloten door het feit, dat de noodzakelijke basis daartoe, gelijkheid in levenswijze, reeds door het verschil in milieu (zee- en landbewoners!) niet voorhanden is. Daartegen spreekt ook de diepere overeenstemming in den bouw van vele organen en het ontbreken van eenig belangrijk verschil, zoowel in den bouw als in de ontwikkeling, zooals toch verwacht moest worden indien de overeenstemming slechts op convergentie beruste. Belangrijk is ook, dat juist onder de oudere vormen der Merostomen eenige voorkomen die het meest op scorpioenen gelijken en de verschillen in eenige ontwikkelingsreeksen der *Gigantostraca* toenemen, zoo bij de *Pterygotidae* en bij de *Xiphosura*, tot bij de levende *Limulus* ten slotte een van dien der scorpioenen zeer afwijkenden lichaamsvorm bereikt is.

De overeenkomst in den bouw bij *Merostomata* en Arachniden is dus niet het gevolg van convergentie, maar van ware en nauwe bloedsverwantschap.

Wij sluiten ons dus bij Straus Dürkheim en Lankester aan in de opvatting dat de *Merostomata* met de Arachniden nauw verwant zijn en met deze in eene afdeeling, eene klasse der *Arthropoda* gerangschikt moeten worden. Zij vertoonen alle wezenlijke bijzonderheden van de organisatie der Arachniden. De *Gigantostraca* zijn zelfs met de scorpioenen blijkbaar veel nauwer verwant dan deze met de Opilioniden, Acariden of Solifugen.

III.

Het wezenlijkste, belangrijkste gedeelte van het Limulus-probleem is echter niet de graad van verwantschap der Merostomen met de Arachniden, maar de beantwoording der vraag of de Arachniden van de in zee levende *Merostomata* afstammen, of omgekeerd deze laatste uit op land levende Arachniden zijn voortgekomen. De eerste opvatting is die van Lankester en de aanhangers zijner theorie [1]). Zij sluit noodzakelijkerwijze in zich de opvatting dat alle Arachniden van vormen afstammen, die in bouw de scorpioenen zeer nabij kwamen, in het algemeen zelfs in bouw daarmede identiek waren. Zij alleen ook dwingt ons, die eigenaardige consequenties der Limulus-theorie aan te nemen, die pag. 449 op den voorgrond

[1]) Vergelijk ook Woodward, 1917.

gebracht werden. Is daarentegen de opvatting juist, dat de *Merostomata* van op land levende Arachniden afstammen, dan verkrijgen wij een zeer veel eenvondiger voorstelling van de verwantschap der groote groepen der Arthropoden en van de omvorming van den bouw bij de Arachniden. Een derde mogelijkheid, in het bijzonder eene afleiding der *Gigantostraca* en scorpioenen beide van een gemeenschappelijken, maar wezenlijk eenvoudiger en oorspronkelijker gebouwden stamvorm, is er niet. Zulk eene opvatting werd wel is waar in het bijzonder voor de ademhalingsorganen der Arachniden uitgesproken (verg. HEYMONS, 1905; REUTER, 1909; KAUTSCH, 1910), maar zij is niet houdbaar. *Gigantostraca* als *Eusarcus*, *Hughmilleria* en *Slimonia* zijn zoo gelijk aan de scorpioniden, dat de gemeenschappelijke stamvorm dezer dieren ook een vrijwel geheel scorpioenachtigen bouw gehad moet hebben; scorpioniden-habitus en hooggedifferencieerde, geheel op tracheenlongen gelijkende ademhalingsorganen moeten voorhanden geweest zijn (verg. ook KASSIANOW, 1914, p. 208, en VERSLUYS, 1919, p. 8, 9). LANKESTER heeft dan ook volkomen juist ingezien, dat de stamvorm van alle Arachniden volgens zijn theorie zeer op scorpioenen geleken moet hebben (verg. de schildering van dezen stamvorm bij zijn leerling POCOCK, 1893, p. 2).

Dat LANKESTERS Limulus-theorie bij het uitwerken tot verscheidene merkwaardige en onwaarschijnlijke konsequenties voert, valt uit het eigen werk van LANKESTERS leerlingen en aanhangers af te leiden. Zijn theorie dwingt ons aan te nemen, dat de tracheen, welke de meeste Arachniden bezitten, met de tracheen der *Onychophora*, *Myriapoda* en *Hexapoda* niet in genetische betrekking staan; wij worden er verder toe gedwongen, aan te nemen, dat tracheen zich bij de Arachniden meerdere malen gevormd hebben, en daarbij nog wel gedeeltelijk uit tracheenlongen, gedeeltelijk als organen sui generis (vergel. POCOCK, 1893, p. 17; LAURIE, 1894, p. 46—47; PURCELL, 1909, p. 88; VERSLUYS, 1919, p. 43—44). Het blijkt zelfs verder, dat de omvorming der kieuwen der *Merostomata* tot tracheenlongen onafhankelijk van elkaar bij de scorpioenen eenerzijds en bij de overige pulmonate Arachniden anderzijds zou hebben moeten plaatsgrijpen (PURCELL).

Neemt men met LANKESTER aan, dat de bladvoeten der *Merostomata* echte ledematen zijn (dit is niet juist; zij zijn beweeglijk geworden sternieten, zooals boven pag. 454 uiteengezet werd), dan zijn de kammen, *pectines*, der scorpioenen en de spintepels (tenminste de buitenste) der *Araneae* met deze bladvoeten homolog. De pectines worden dan echter bij de *Pedipalpi* door tracheenlongen vertegenwoordigd en de spintepels zouden bij hun ontstaan uit kieuwen-

dragende bladvoeten een stadium als tracheeenlongen doorloopen moeten hebben (PURCELL, 1909, p. 90)!

En nog een verder uitgebreid feitenmateriaal bereidt groote moeilijkheden aan de theorie van LANKESTER. De scorpioniden, die volgens LANKESTER als vormen welke de stamvormen aller Arachniden zeer nabij komen, ook den meest oorspronkelijken bouw onder alle Arachniden moesten vertoonen, zijn in verscheiden belangrijke punten ongetwijfeld minder oorspronkelijk dan verschillende andere Arachniden. Op volgende punten moet hier gewezen worden.

1. De scorpioenen hebben, evenals de *Merostomata*, geen vrije segmenten meer aan den cephalo-thorax. Bij de solifugen (SÖRENSEN, 1914), de *Palpigradi* en de *Schizonotidae* echter zijn de twee laatste thoraxsegmenten vrij van het cephalothoracale rugschild.

2. Het praegenitaalsegment, hetwelk bij de scorpioniden en de *Merostomata* geheel met den cephalothorax vergroeid is, is bij andere Arachniden nog zelfstandig, bijvoorbeeld bij de *Palpigradi*, bij de *Schizonotidae* en andere *Pedipalpi*, bij de *Pseudoscorpiones*, en, zij het ook zwak ontwikkeld, bij de *Araneae* (vergel. BÖRNER, 1902).

3. De differentiatie van het abdomen in een zevenledig, breed praeabdomen en een slank, uit 5 geledingen en een telson bestaand postabdomen, zooals zij bij de scorpioenen en bij eenige *Gigantostraca* gevonden wordt, ontbreekt bij de andere Arachniden, ook daar waar het abdomen uit een grooter aantal segmenten bestaat (*Solifuga*, *Pseudoscorpiones* en amblypyge *Pedipalpi*).

4. Verschillende Arachniden, vooral de *Palpigradi* en de fossiele Arachnide *Sternarthron*, vertoonen zeer veel primitiever toestand der sterna, in zoo verre op ieder paar ledematen, ook tusschen de cheliceren, nog een zelfstandig sternum gevonden wordt. Bij de scorpioenen en de Merostomata vinden wij zeer vergaande versmelting en vermoedelijk ook verschuiving der sterna. De *Solifuga* en de *Pedipalpi* zijn in dit opzicht ook oorspronkelijker van bouw als de scorpioenen.

5. Het endosterniet vertoont bij de *Palpigradi* en de *Schizonotidae* veel oorspronkelijker verhoudingen dan bij de scorpioenen en *Limulus*. Bij de *Solifuga* ontbreekt een eigenlijk endosterniet en hier moet LANKESTER reductie aannemen; het endosterniet wordt hier echter functioneel vervangen door een paar van het uitwendige skelet uitgaande entapophysen, zoodat hier eveneens een veel eenvoudiger en meer oorspronkelijke toestand gevonden wordt, dan bij den scorpioen.

6. De coxaalklieren der Arachniden laten eene afleiding van het eene paar klieren met monding aan het 5[de] segment van den cepha-

lothorax, dat bij den scorpioen voorhanden is, niet toe. Er komt bij verschillende orden der arachniden naast dit paar klieren of wel uitsluitend, een paar klieren in het 3de segment van den cephalothorax voor, en de *Solifuga* en *Palpigradi* bezitten uitsluitend een paar coxaalklieren in het 2de segment Wij moeten deze verschillende toestanden van een oorspronkelijken toestand afleiden, waarbij coxaalklieren nog in de meeste (wel het 2de tot en met 5de of 2de tot 6de) segmenten van den cephalothorax voorhanden waren. Noch de scorpioenen, noch *Limulus* kunnen hier den uitgangstoestand geven (verg. BUXTON, 1913, 1917).

7. Bij *Sternarthron, Koenenia* (*Palpigradi*) en de *Solifuga* is de mondopening geheel onafhankelijk van de ledematen; kauwplaten ontbreken. Dit is een zeer oorspronkelijke toestand, die zich niet wel, zooals BÖRNER (1902, p. 436, 437) wil, door een soort atavisme laat verklaren. De opname van alleen vloeibaar voedsel, vereenigd met eene eigenaardige „voorverteering" (BERTKAU, 1884; verg. BERNARD, 1896, p. 363; BÖRNER, 1904, p. 75; JORDAN, 1913, p. 444), een typische toestand bij de Arachniden, maakte kauwwerktuigen van den beginne af overbodig. Waar deze nu optreden, zooals bij de scorpioenen en de *Merostomata*, zijn zij zeker eene nieuwvorming, waarmede ook eene ongetwijfeld secundaire verplaatsing der mondopening naar achteren toe verbonden is. Het meest gespecialiseerd zijn in dit opzicht juist de *Merostomata*.

8. Ook de oogen der scorpioenen kunnen niet het uitgangspunt voor die aller andere Arachniden gevormd hebben; zij zijn daartoe in vergelijking met de oogen van de overige Arachniden veel te zeer gespecialiseerd.

Wij zien uit dit overzicht, hoe de oerarachnide, welke de Lankestersche Limulus-theorie moet aannemen, met haar scorpionidenbouw, onmogelijk de werkelijke oerarachnide kan geweest zijn. Zij vertoont niet den passenden bouw van den cephalothorax, het praegenitaal-segment, het abdomen, der sterna, der ademhalingsorganen, van den mond, van het endosterniet, der coxaalklieren en der oogen! Den meer oorspronkelijken bouw vinden wij onder de Arachniden bij vormen, welke den scorpioenen en *Merostomata* verre staan, bij de *Solifuga*, de *Palpigradi* en de *Schizonotidae*. Hieruit moet ongetwijfeld afgeleid worden, dat wij met LANKESTERS opvatting van de afstamming der Arachniden van de *Merostomata* niet op den juisten weg zijn.

Voor literatuur zie de tweede mededeeling.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer ALPH. DEUMENS: „*Extinctie door een gezwarte photographische plaat als functie van golflengte, hoeveelheid zilver en korrelgrootte*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

Inleiding. Voor het goed begrip van het photographisch proces is kennis van het eindproduct: de gezwarte photographische plaat, onontbeerlijk. In deze mededeeling zullen wij een onderzoek van de gezwarte photographische plaat weergeven.

Wij hebben ons de vraag gesteld de zwarting [1]) voor verschillende golflengten te onderzoeken, de hoeveelheid zilver, die in de onderzochte platen per oppervlakte-eenheid aanwezig is, te meten en verder hebben wij de grootte der zilverkorrels bepaald [2]).

De extinctie van een photographische plaat is met die van een vaste colloidale oplossing, b.v. melkglas of robijnglas, waar ook kleine deeltjes in een ander medium gebed zijn, te vergelijken.

De genoemde grootheden zijn gemeten omdat de extinctie van een gezwarte photographische plaat theoretisch begrepen kan worden door haar op te vatten als het resultaat van de werking van een groot aantal, onregelmatig verdeelde korrels zilver, gebed in gelatine.

Bij kennis van de verdeeling en den aard van het zilver in de plaat is de inwerking op straling van gegeven golflengte af te leiden en omgekeerd is uit die inwerking voor gegeven straling op korrels van gegeven grootte iets omtrent den aard van het zilver in de plaat te besluiten.

Wij zullen in deze mededeeling op de theoretische beschouwingen niet nader ingaan, doch ons deze voor een volgende mededeeling voorbehouden.

---

[1]) Onder zwarting verstaat men de Briggsche logarithme van $\frac{I_0}{I}$, waarin I_0, resp. I, de intensiteit is van het licht dat door een ongezwart, resp. gezwart deel der plaat is gegaan.

De naam „zwarting" is niet gelukkig gekozen, daar de photographische plaat niet zwart is.

Beter ware het derhalve met R. LUTHER (Zeitschr. f. phys. Chem. 1900) te spreken van „de extinctie" der photographische plaat.

[2]) Tevens is de extinctie en zilvergehalte van een collargoloplossing onderzocht.

Thans bepalen wij ons tot de beschrijving van de gebruikte experimenteele methoden en van de daarmede verkregen resultaten.

Het onderzoek der zwarting voor verschillende kleuren heeft daarnaast nog een practisch nut. Vaak hebben gezwarte photographische platen als lichtverzwakkers dienst gedaan. In den laatsten tijd worden zij bij verschillende onderzoekingen in het Instituut voor theoretische Natuurkunde als zoodanig gebruikt. Vergelijk bij het onderzoek van Mej. RIWLIN [1]). Het was daarom noodzakelijk eene methode uit te werken om deze verzwakkers voor verschillende kleuren te ijken op de hoeveelheid licht, die zij voor die verschillende kleuren doorlaten.

De aandacht moge ook gevestigd worden op het feit, dat de zwartingswet, die men vindt, verschillen kan vertoonen als de plaat met verschillende kleuren wordt uitgemeten.

De zwarting toch is afhankelijk van de methode, volgens welke zij wordt gemeten, in tegenstelling met het aantal, de doorsnede en den aard der zilverkorrels in de photographische plaat per vlakte-eenheid aanwezig.

De micro-photometers nu werken met verschillend gekleurd licht, zoo b.v. die van HARTMANN [2]) en alle andere visueele in hoofdzaak met geel-groen, die van PAUL KOCH [3]) voornamelijk met licht van korte golflengten, die van MOLL [4]) grootendeels met rood en ultrarood.

Verschillen in uitkomsten kunnen dus steeds geïnterpreteerd worden door te bedenken, dat de gezwarte photographische plaat verre van zwart is.

§ 1. *Bepaling der zwarting voor verschillende deelen van het spectrum.*

I. *Werkmethode.* De bepaling der zwarting geschiedt door middel van den extinctiemeter van MOLL, gewijzigd volgens bijgaand schema [5]) (fig. 1).

Een Nitralampje *Lp* (25 kaars, 4 Volt) werpt een door lens *Ls* evenwijdig [6]) gemaakten bundel op de photographische plaat *Pt*, die steeds op dezelfde plaats in het toestel wordt gezet. Door middel

[1]) Deze Verslagen Mei 1920.

[2]) Zeitschr. f. Instrum. Kunde 1899 p. 97.

[3]) Ann. der Physik Bd. 39, 1912, p. 705—751.

[4]) Deze Verslagen Dl. 28. 29 Nov. 1919.

[5]) Zie deze Verslagen Dl. 28 p. 1001—1006, Maart 1920.

[6]) Wij kiezen een evenwijdigen bundel om de theorie van het waargenomen verschijnsel zoo eenvoudig mogelijk te maken. Wij vermijden dan ook het Calliereffect (Zeitschr. f. Wiss. Phot. Bd. 7, p. 257 enz.).

van een cuvet *Ct*, gevuld met een gekleurde vloeistof, en van een kleurfilter *Fr* heeft men het in zijne hand om een bundel van de

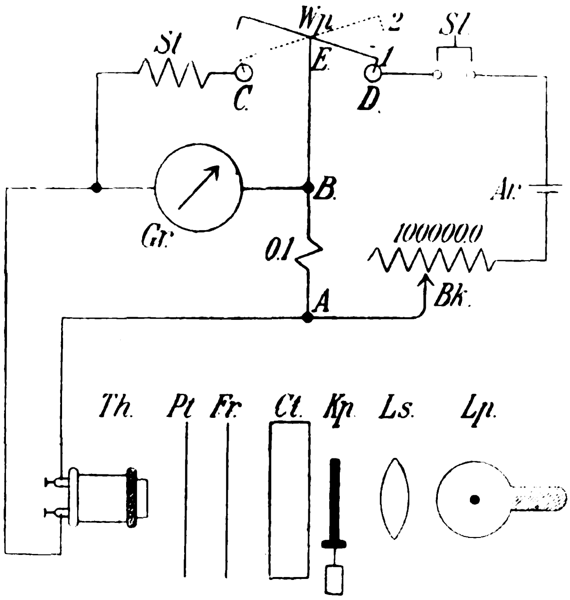


Fig. 1.

gewenschte kleur op de plaat toe te laten. Daarna treft de bundel de thermozuil *Th* en veroorzaakt een thermostroom, die evenredig is met de energie van het opvallende licht. De intensiteit wordt met behulp van een compensatiemethode gemeten.

De stroom van een accumulator *Ar* wordt door de decadenweerstandsbank *Bk* [1]) op de sterkte gebracht, waarbij de thermostroom gecompenseerd is. De galvanometer *Gr* is dan stroomloos De ketens van accumulator en thermozuil hebben den manganiendraad *AB*, van ongeveer 0.1 Ohm, gemeen. Shunt *St* beveiligt den Galvanometer *Gr* tegen te sterke stroomen. De nulstand wordt verkregen door Klep *Kp* voor de lamp te brengen en met Stroomsleutel *Sl* den stroom te verbreken.

De zwartingsmetingen geschieden op de volgende wijze: In den lichtweg der lamp *Lp* zetten wij het ongezwarte deel der photographische plaat *Pt* en bepalen den weerstand R_0, in weerstandsbank *Bk* noodig om den thermostroom te compenseeren. Daarna verschuiven wij *Pt*, totdat het gezwarte deel der plaat in den lichtweg staat en compenseeren weer, stel met R_1 Ohm. De zwarting wordt dan gegeven door $log\frac{I_0}{I_1} = log\frac{R_1}{R_0}$.

[1]) Op de decadenweerstandsbank kan men iederen weerstand van 0.1 tot 100.000 ohm. inschakelen.

Bij de metingen moeten we letten op de volgende foutenbronnen:

1°. De spectrale energieverdeeling der lamp (Lp) verandert bij langdurig gebruik. Dezelfde zwartingen, gemeten met een tusschenruimte van eenige uren branden der lamp gaven nooit verschillen grooter dan de nauwkeurigheid die de methode toestaat.

2°. De stroomsterkte van de lamp kan fluctueeren; daarom moet deze voortdurend gecontroleerd worden. Er is zorg gedragen dat de fout tengevolge van de fluctuaties in de intensiteit der lamp ten hoogste van de orde van 1°/₀ blijft.

Daar na het aansteken eener lamp eerst na eenigen tijd de stationaire en maximale intensiteit wordt bereikt, worden de waarnemingen steeds een half uur na het aansteken der lamp begonnen en blijft de lamp gedurende de geheele waarnemingsreeks branden.

3°. Wanneer wij op de thermozuil Th licht toelaten[1]), bereikt de galvanometer Gr binnen 2 seconden zijn evenwichtstoestand. Blijft de straling aanhouden, dan zien wij den uitslag, na even constant te zijn geweest, langzaam terugloopen. Dit is een gevolg van het warm worden van de omgeving van diè contactplaatsen in de thermozuil, welke niet direct bestraald worden[2]).

Om den invloed dezer fout zoo klein mogelijk te maken, worden de achtereenvolgende handgrepen bij de metingen met constante intervallen verricht.

Deze intervallen worden aangegeven door een electrische klok die elke 10 seconden een kwikcontact even sluit. Daardoor wordt via een relais door de wip Wp, die bij E om een horizontale as kan draaien, gedurende 10 seconden beurtelings de stroomketen bij C en D gesloten en verbroken. Alleen gedurende de 10 seconden dat de shunt St in C is uitgeschakeld en de accustroom in D is ingeschakeld, staat de klep Kp open en wordt het licht op de thermozuil toegelaten.

Het zal zonder meer duidelijk zijn, dat men in deze 10 seconden de weerstandsbank BK niet zoo kan instellen, dat de thermostroom totaal gecompenseerd is. Daarom maakt men door een voorloopig onderzoek uit, welke waarde van den weerstand voor iedere zwarting noodig is om den thermostroom ongeveer te compenseeren. De galvanometer vertoont dus een kleinen uitslag. Als uitslag geldt het verschil tusschen ongeshunten nulstand (1) d. i. als klep Kp dicht, wip Wp in stand 1 en sleutel Sl uit den stroomkring staat en den

[1]) De thermozuil is voorzien van een cylindrischen koker teneinde zijdelings invallend licht te weren.

[2]) Dit verschijnsel treedt in de nieuwste, verbeterde constructie der thermozuil in veel mindere mate op.

ongeshunten evenwichtsstand (3) d. i. als klep *Kp* open, wip *W* in stand 1 en sleutel *Sl* zich in den stroomkring bevindt. [1])

Uit den uitslag in m.m. wordt de correctie van den weerstand berekend.

De invloed van de onder N°. 3 genoemde fout is door deze wijze van werken zoo klein mogelijk geworden, want

1°. wordt de thermozuil steeds *op dezelfde wijze* en wel slechts *gedurende eenzelfden korten tijd* bestraald,

2°. is iedere waarneming het gemiddelde van verschillende metingen.

Bovendien wordt iedere photographische plaat minstens tweemaal doorgemeten.

II. *De metingen.* De eerste waarnemingen deden aanstonds zien dat, zooals te verwachten is, de zwarting eene functie is van de golflengte van het licht waarmede men haar meet. Vaak herhaalde waarnemingen bevestigden de eerste resultaten.

Gebruikt worden Wellington platen, Speed 100 en Speed 400, afmeting 13 × 18 c.m., telkens van eenzelfde emulsienummer. [2])

---

[1]) Zooals reeds gezegd is, heeft men telkens een periode van 10 sec.; deze tijd is ruimschoots voldoende om den galvanometer met of zonder thermozuil tot zijn evenwichtsstand te laten komen en den daarbij op de meetschaal bereikten stand tot op 0.1 m.m. af te lezen.

Op elke periode (1) en (3) van 10 sec. volgt eene periode (2) waarin de wip *Wp* in stand 2 staat en dus de galvanometer door de shunt beveiligd is tegen te groote uitslagen.

In deze periode (2) van 10 sec. kan men de noodige handgrepen, als het openen en sluiten van klep *Kp* en sleutel *Sl*, het instellen der weerstandsbank *BK* op den vooraf benaderden weerstand en het noteeren der waarneming, verrichten.

Iedere waarneming bestaat nu in het aflezen van 3 nulstanden (1) en 2 standen (3) en duurt dus 90 sec. Het verloop der waarneming kunnen wij karakteriseeren door de periode's (1) (2) en (3) in de goede volgorde aan te geven, n.l.:

(1)—(2)—(3)—(2)—(1)—(2)—(3)—(2)—(1). Door te middelen tusschen de 3 standen (1) en de 2 standen (3) en af te trekken, vindt men hieruit den gezochten kleinen uitslag in m.m.

[2]) De platen, Speed 100 worden ontwikkeld met hydrochinon volgens het recept:

1ste oplossing:	Hydrochinon	36	gram
	Kalium metabisulfiet	36	„
	Broomkalium	36	„
	Water	3000	„
2de oplossing:	Kalium hydroxyde	144	„
	Water	3000	„

Gebruikt worden gelijke volume deelen van beide oplossingen.

De platen Speed 400 worden ontwikkeld met glycine volgens het recept:

1°. Platen met hydrochinon ontwikkeld. [1])

De platen N°. 1—4 zijn 7½ min. ontwikkeld met 1 deel ontwikkelaar en 6 deelen water, plaat 1 bij 14.5°, plaat 2—4 bij 13°, de platen 5—10 zijn bij 13° vier min. ontwikkeld met 1 deel ontwikkelaar en 3 deel water. Na 't ontwikkelen zijn alle platen 1½ min. gespoeld, 15 min. gefixeerd, en 2 uur gespoeld.

Bij de platen 5—10 worden op iedere plaat de twee meest gelijkmatig gezwarte stukken van 15 c.m² uitgezocht. In de bijgevoegde tabellen staan deze twee stukken aangeduid door *A* en *B*. Van ieder stuk van 15 c.m² wordt op 3 verschillende plaatsen de zwarting gemeten. Daar het oppervlak van den stralenbundel op de photographische plaat ongeveer 4 c.m² bedraagt, wordt dus op 12 c.m² van de 15 c.m² de zwarting direct bepaald. De opgegeven zwarting is het gemiddelde van die drie.

Bij plaat 2—4 worden twee stukken van 65 c.m² genomen, daar men wegens de kleine zwarting een grooter oppervlak gebruiken moet bij de later te beschrijven zilverbepaling. De zwarting wordt bij ieder stuk op vier plaatsen gemeten. De opgegeven zwarting is het gemiddelde van deze vier.

Bij plaat 1 zijn de verschillende zwartingen — in de tabel genoemd α, β, γ en δ — zoo klein, dat er geen zilverbepalingen mee kunnen gedaan worden.

Dus wordt de zwarting maar op een plaats, echter steeds 2 gemeten.

2°. Platen met glycine ontwikkeld. [2])

De platen N°. 11—19 zijn 7½ min bij 18° ontwikkeld met 1 deel glycine en 2 deelen water en verder op dezelfde wijze behandeld als de platen 5—10 bij hydrochinon. Daar bij glycine nabij het gezwarte gedeelte een sluier optreedt, wordt bij de met glycine

Gedistilleerd water	3000	gram
Natriumsulfiet (poeder)	150	„
Glycine	30	„
Kalium carbonaat	150	„

Als fixeerbad wordt in beide gevallen gebruikt:

1ste oplossing:	Hyposulfiet	1500	gram
	Water	3000	„
2de oplossing:	Ammonium chloride	600	„
	Water	3000	„

A en *B* samenmengen.

[1]) Wij nemen Wellington platen, Speed 100, ontwikkeld met Hydrochinon en Broomkali om platen met kleine korrels te krijgen.

[2]) Wij wenschen het zwartings- en filteronderzoek voor twee verschillende ontwikkelaars te doen. Als tweeden ontwikkelaar nemen wij glycine zonder broomkali, omdat wij zoo een vrij constante en niet te kleine korrel krijgen.

ontwikkelde platen, een zeer breede strook der plaat onbelicht gelaten en wordt de weerstand R_0 der ongezwarte plaat gemeten op eene plaats ver genoeg verwijderd van het gesluierde deel der plaat.

De zwarting wordt voor alle platen gemeten voor de volgende kleuren:

a. Voor het heele spectrum behalve ultrarood.

Het cuvet *Ct* in den lichtweg der lamp *Lp* is gevuld met eene 3 °/₀ koperchlorideoplossing: filter *Fr* is hier overbodig.

b. Voor ultrarood (zwaartepunt der intensiteit geschat op 1.25 μ). Het cuvet *Ct* in den lichtweg der lamp *Lp* is gevuld met eene asphaltoplossing; filter *Fr* is hier overbodig.

c. Voor stralen van 0.640 μ tot 0.535 μ; zwaartepunt der intensiteit geschat op 0.58 μ; daarom zullen we dit golflengtegebied door „geel" aanduiden.

d. Voor stralen van 0.590 μ tot 0.435 μ met het zwaartepunt geschat op 0.54 μ. Dit gebied wordt door „groen" aangegeven.

In den lichtweg staat bij *c* en *d* een 3 °/₀ koperchlorideoplossing, en bovendien een gekleurd gelatinefilter, zooals in den handel is gebracht door KIPP, bij *c.* het filter 3*Cc*, bij *d.* 't filter 5*Ac*.

e. Voor het heele spectrum. In den lichtweg staat noch cuvet *Ct*, noch filter *Fr*.

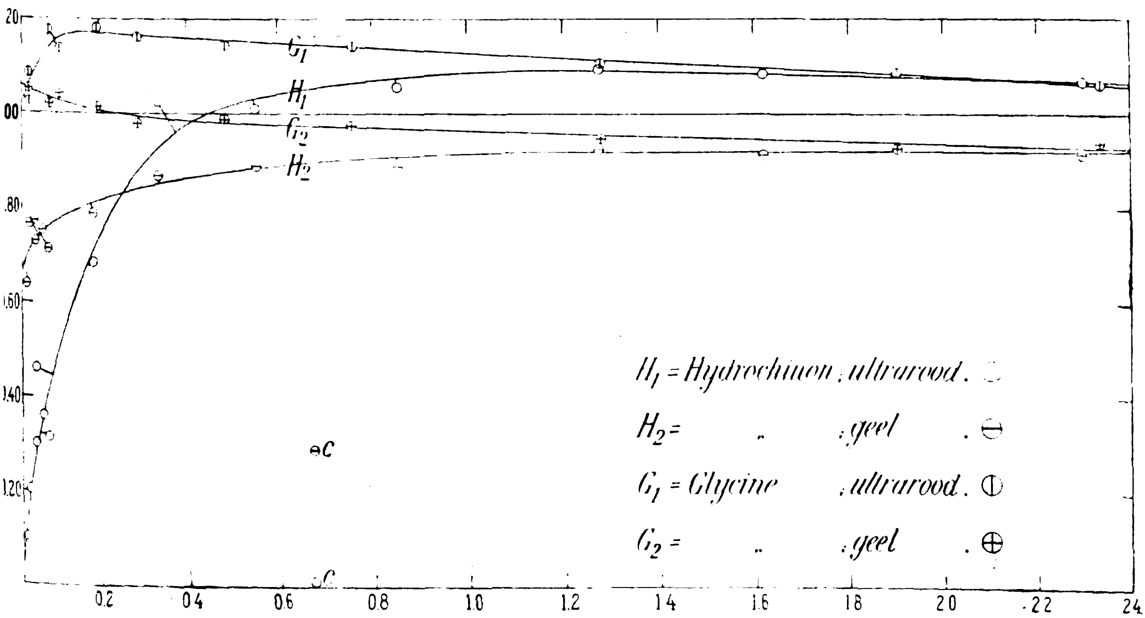


Fig. 2.

In fig. 2 vindt men, zoowel voor hydrochinon, als voor gelatine de verhouding $\frac{b}{d}$ en $\frac{c}{d}$ uitgezet tegen *d* als onafhankelijk verander-

lijke. Men verkrijgt dus twee krommen voor glycine, aangeduid door de letters G_1 en G_2 en twee voor hydrochinon, aangegeven door H_1 en H_2 [1]).

De in fig. 2 uitgezette punten zijn verkregen door overal het gemiddelde te nemen van de in tabel I (zie einde dezer mededeeling) opgegeven waarden A en B [2]).

Uit fig. 2 blijkt overtuigend dat de gevonden zwarting een functie van de golflengte is, waarmede de zwarting gemeten wordt.

Het sterke afwijken van H_1 voor zwarting 0 tot 0.6, zal, — gelijk wij in een volgende mededeeling nader hopen aan te toonen en zooals in § 3 uit de metingen blijkt, — aan den invloed van de korrelgrootte van het zilver moeten worden toegeschreven.

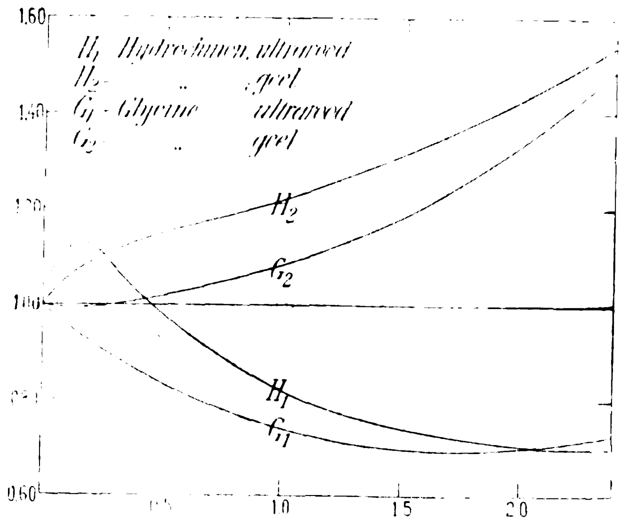


Fig. 3.

Ten einde het overzicht der bruikbaarheid van de photographische plaat als lichtverzwakker beter te doen zien, is (zie fig. 3) voor de gemeten zwartingen uit fig. 2 de doorlaatbaarheid afgeleid in ver-

[1]) Alleen de vier zwartingen van plaat 1 zijn behalve voor b, c en d ook gemeten voor het heele spectrum en voor het heele spectrum behalve ultrarood. In fig. 2 zijn ook van plaat 1 alleen maar $\frac{b}{d}$ en $\frac{c}{d}$ tegen d uitgezet. Men vindt echter al de metingen in de aan deze mededeeling toegevoegde tabel I.

[2]) Tenslotte zijn dezelfde metingen b, c en d verricht voor collargol. Als analogen van de blanke plaat dient een cuvet, gevuld met zuiver water, als analogen van de gezwarte plaat dient een zelfde cuvet, gevuld met de collargol-oplossing. Deze waarnemingen zijn op fig. 2 aangeduid door C. Genomen is 0.65×10^{-3} gram collargol per cm^3 water.

houding tot de doorlaatbaarheid van groen, door gebruik te maken van de betrekking:

$$10^{z_b - z_d} = \frac{I_b/I_0}{I_d/I_0} = \frac{D_b}{D_d},$$

waarin de D de doorlaatbaarheid voorstelt en de index b en d, ultrarood en groen beteekent.

(1) volgt onmiddellijk uit de definitie der zwarting.

In fig. 3 is de verhouding der doorlaatbaarheid van geel, resp. ultrarood tot groen als ordinaat uitgezet tegen de zwarting voor groen als abscis.

Het blijkt dus dat met glycine ontwikkelde platen voor het gebied geel-groen bij een zwarting 0 tot 1.0 tot 8 °/₀ zonder meer als verzwakkers te gebruiken zijn. Verder echter doet men goed de platen steeds wat hun doorlaatbaarheid betreft te ijken voor het golflengtegebied, waarvoor zij dienst moeten doen. In het boven geciteerde onderzoek van Mej. RIWLIN is dit met de door ons uitgewerkte methode geschiedt [1]).

De gemiddelde fout der zwartingswaarnemingen heeft voor zwartingen van 2.0 tot 0.1 de waarde van 0.7 °/₀, voor zwartingen van 0.1 tot 0.001 de waarde van 3.3 °/₀ [2]) der zwarting. Ook bij zwartingen boven 2.0 wordt de nauwkeurigheid geringer.

§ 2. *Bepaling van de hoeveelheid zilver per vlakteeenheid op een gezwarte photographische plaat aanwezig.*

I. *Werkmethode.* Uit de resultaten van § 1 volgt, dat de hoeveelheid zilver, per vlakte-eenheid op de photographische plaat aanwezig, niet evenredig met de zwarting kan zijn.

De zilverbepaling is geschiedt met den extinctiemeter van MOLL [3])

[1]) Bij ons onderzoek is het onmogelijk al de te onderzoeken zwartingen op één photographische plaat te brengen. Dit verdient de voorkeur vooral bij een onderzoek naar de zwartingswet, eigenschappen van de zwarting enz. Daar wegens den aard der probleemstelling de hoeveelheid zilver der platen moet bepaald worden en dit een zwarte plaat van voldoende groot oppervlak vereischt, stuiten we op practische bezwaren als wij alle zwartingen op één plaat willen brengen. Dezelfde onderzoekingen zijn echter eerst geschiedt met de verschillende zwartingen in kleine vakjes op eenzelfde plaat. De verkregen resultaten waren dezelfde. De door ons gevonden verschillen zijn dus niet toe te schrijven aan het gebruik van verschillende platen.

[2]) Deze kleine zwartingen kunnen met hetzelfde toestel langs een iets meer omslachtigen, maar ook meer nauwkeurigen weg gemeten worden, waardoor de gemiddelde fout daalt tot 0.9 %.

[3]) Deze verslagen Dl. 28, 1920 p. 1001—1006.

in den vorm, zooals die bij het nog te publiceeren onderzoek van den Heer VAN DITMARSCH voor het onderzoek van het uitvlokken van colloïden dient. Voor de bijzonderheden van het onderzoek verwijzen wij naar de publicatie van de resultaten van den Heer VAN DITMARSCH. Voor ons doel is het voldoende het volgende op te merken.

De uitslag van den galvanometer, die door verandering van de troebelheid in een der bakjes veroorzaakt wordt, wordt photographisch geregistreerd. [1] De door MOLL beschreven compensatieschakelaar [2]) is dus weggelaten. Uit de geregistreerde kromme kan men de verandering der troebelheid met den tijd aflezen.

Het gebruik van den extinctiemeter van MOLL ter bepaling van het gehalte eener zilveroplossing [3]) berust op het feit dat deze troebel wordt, indien men er eene bepaalde hoeveelheid natriumchlorideoplossing van gegeven sterkte bijvoegt. Het proces, dat dan plaats heeft, bestaat uit twee deelen. Vooreerst vereenigen zich de zilver- en natriumionen tot molekulen zilverchloride, hetgeen zeer snel geschiedt, en vervolgens gaat de moleculair disperse oplossing, die met een fijn verdeeld sol te vergelijken is, langzaam uitvlokken en wordt dientengevolge troebel. Na geruimen tijd wordt de troebelheid constant. Vandaar dat eene methode, die voor de studie van het uitvlokkingsproces is uitgewerkt, ook voor dit onderzoek goede diensten kan bewijzen.

Voor vloeistoffen met gelijk zilvergehalte is deze troebelheid alleen van den tijd afhankelijk. Gaan wij echter uit van vloeistoffen met verschillend zilvergehalte, dan blijkt uit den vorm der geregistreerde kromme, dat deze troebelheid in sterke mate afhankelijk is van de zilverconcentratie. Wij hebben hier dus een scherp middel om van een zilveroplossing het gehalte te bepalen. Deze methode is nu toegepast op de volgende wijze:

De geregistreerde uitslag van den galvanometer wordt uitgezet als functie van den tijd en het in tien minuten [4]) beschreven oppervlak — uitvlokkingsoppervlak genoemd — wordt berekend. Dit wordt gedaan voor verschillende oplossingen van bekend zilvergehalte. Zetten wij nu de berekende oppervlakten uit tegen de resp. zilver-

[1]) De fout ten gevolge van de veranderingen in de afmetingen van het registratiepapier, die na het ontwikkelen enz. kunnen optreden, blijkt kleiner te zijn dan 1 %.

[2]) Deze verslagen Dl. 28, 1920, p. 1002—1003.

[3]) In ons onderzoek is dit steeds eene zilvernitraat oplossing.

[4]) Na 10 min. is over 't algemeen de uitslag van den galvanometer reeds dicht bij zijn maximum gekomen.

gehalte's, dan krijgen wij eene ijkingskromme, [1]) waaruit na berekening van het uitvlokkingsoppervlak het gehalte van een te onderzoeken zilveroplossing kan worden afgelezen.

Past men de geschetste methode zonder meer op de photographische plaat toe, dan stuit men op het bezwaar dat de zilverkorrels der plaat gebed liggen in gelatine. Lost men het zilver der plaat op in salpeterzuur en voegt men natriumchloride toe, dan blijkt het gelatine of zijn ontledingsproducten het uitvlokken grootendeels tegen te houden. Uit 't varieeren van alle omstandigheden en het registreeren der daarbij behoorende uitvlokkingsoppervlakken, vonden wij als de gunstigste condities om de stukken plaat van 15 c.m²., resp. 65 c.m². gedurende 60 min., resp. 90 min. te koken met salpeterzuur van 50°/₀. De invloed van de gelatine of harer ontledingsproducten verdwijnt dan op 8°/₀ [2]) voor de stukken van 15 c.m². en op 17°/₀ [3]) voor die van 65 c.m².

Het gehalte van de zilvernitraatoplossingen, aldus uit de photographische plaat verkregen, kan men echter niet uit de boven beschreven ijkingskromme aflezen. Daartoe moeten wij eerst *vergelijkbare* zilvernitraatoplossingen van bekend gehalte maken. Ten dien einde worden onbelichte photographische platen, van de gebruikte soort, op dezelfde wijze ontwikkeld, gefixeerd en gespoeld, als de gezwarte photographische platen tot wier zilverbepaling zij moeten dienen.

Van deze onbelichte platen worden daarna stukken van 15 cm² resp. 65 cm² met dezelfde hoeveelheid salpeterzuur en een bekende hoeveelheid zilvernitraat gedurende 60 min. resp. 90 min. bij 100° verhit. De aldus verkregen zilveroplossingen bevatten dus de gelatine en zijne ontledingsproducten in denzelfden vorm als de uit de gezwarte platen verkregen zilvernitraatoplossingen en kunnen dus dienen voor het vervaardigen der ijkingskromme.

In fig. 4 vindt men twee van de gebruikte ijkingskrommen; het

[1]) Men zou in de plaats van het uitvl.oppervl. ook den na 10min. bereikten uitslag kunnen gebruiken, maar deze wijze van werken is minder nauwkeurig. Want het berekenen van het uitvlokkingsoppervlak komt neer op het verwerken van verschillende door gelijke tijdsintervallen van elkaar gescheidene uitslagen.

[2]) De omstandigheden maakten het noodig dat de cuvetjes door ons zelf vervaardigd werden. Wij stuitten daarbij op de moeilijkheid dat al de opgegeven, zuurbestendige kitmiddelen na min of meer langen tijd door het zuur werden aangetast. Ten slotte vonden we in bakeliet een geschikt kitmiddel. Past men het recept toe van BERTRAND—GAUTHIER, dan kan men den invloed der gelatine totaal, dus voor 100°/₀, doen verdwijnen. De daartoe vereischte zuurconcentratie tast echter ook bakeliet na een klein uur aan.

[3]) Langer verwarmen — waardoor men het percentage hooger zou kunnen opvoeren — stuitte op practische bezwaren.

uitvlokkingsoppervlak in cm^2 is als ordinaat uitgezet tegen het aantal m.g. $AgNO_3$ in 14 cm^3 oplossing, als abscis; *I* dient bij de bepaling van de hoeveelheid zilver bij platen van 15 cm^2, *II* bij die van 65 cm^2. Zooals moet, ligt *I* wegens den geringeren invloed der

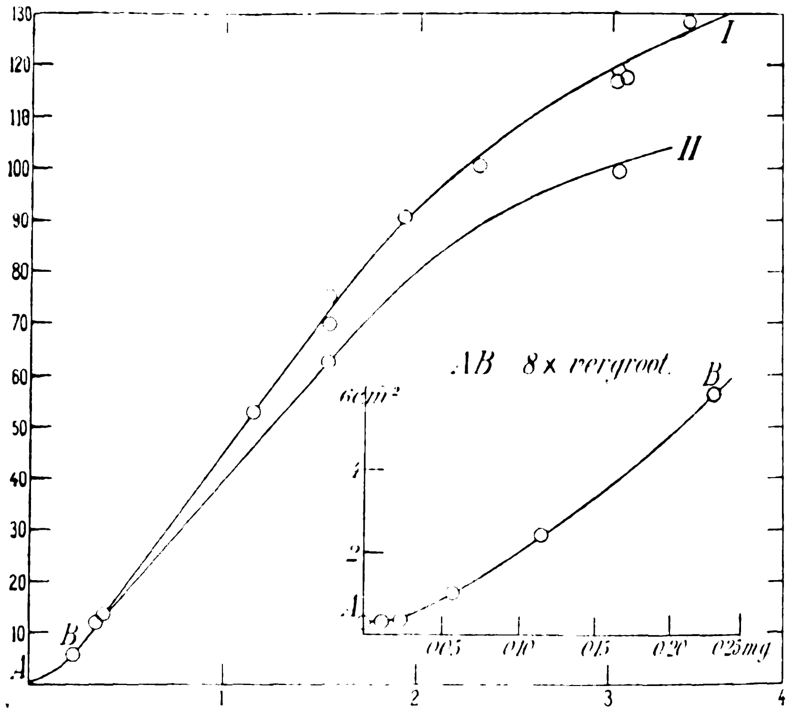


Fig. 4.

gelatine hooger dan *II*. Dat men bij nul zilver voor het uitvlokkingsoppervlak nog een kleine waarde vindt (zie fig. 4, stuk *AB* 8 × vergroot), is een gevolg van de troebeling door de kleine stofjes, die men opwoelt door het roeren na het toevoegen van het natriumchloride. De methode is gebruikt voor zilveroplossing met een gehalte aan zilver van 0.5×10^{-3} tot 156×10^{-3} gram per Liter; de gevoeligheid der methode om sporen zilver aan te toonen strekt zich echter veel verder uit dan 0.5×10^{-3} gram Ag per Liter.

De gemiddelde fout bij de zilverbepalingen bedraagt 3%.

Bij de metingen moet men verder nog op het volgende letten.

1°. Experimenteel blijkt dat het uitvlokkingsoppervlak grooter wordt door ultraviolette stralen. Om deze complicatie te vermijden, is in den lichtweg naar de te meten vloeistof een bakje met chininebisulphaat geplaatst.

2°. Het uitvlokkingsoppervlak is sterk afhankelijk van de concentratie van het zuur. Daarom is steeds dezelfde zuurconcentratie gebruikt.

3°. Het uitvlokkingsoppervlak groeit met de temperatuur. Bij 17° neemt het oppervlak per graad temperatuursverhooging met 2.7 °/₀ toe. Daarom worden steeds voor en na het uitvlokken de temperatuur van de vloeistof gemeten en zijn al de waarnemingen steeds gereduceerd tot eenzelfde temperatuur.

4°. Tengevolge van vuiltjes en te vroegtijdige uitvlokking door het overal aanwezige natriumchloride zal de te onderzoeken vloeistof reeds een aanvankelijke troebeling vertoonen. Deze fout kan vooral, bij kleine concentratie, vrij groot worden.

Door geschikte manipulaties kunnen wij de grootte van dit effect vóór iedere uitvlokking afzonderlijk registreeren. Op een enkele uitzondering na vinden wij dat deze fout steeds kleiner dan 5 °/₀ is. In vele gevallen bedraagt ze slechts 2 à 3 °/₀ dank zij de vele voorzorgen, bij het behandelen der platen genomen. Een daarvan is, dat alle platen na lang fixeeren en spoelen, nog eens 10 à 12 uur met gedistilleerd water worden gespoeld, alvorens ze op te lossen in salpeterzuur.

De grootte dezer fout is daarbij zoo volkomen toevallig, zoowel voor de ijkingsvloeistoffen, als voor de te onderzoeken vloeistoffen, dat wij ze niet in rekening hebben gebracht [1]).

§ 3. *Metingen van de doorsnede der zilverkorrels in de photographische plaat.*

De wijze, waarop het zilver van de photographische plaat op het licht inwerkt, en de zwarting, die men dientengevolge waarneemt, hangt, gelijk men onmiddellijk inziet, in sterke mate af van de wijze, waarop het zilver verdeeld is. De afmeting der zilverkorrels ten opzichte van de golflengte van het bij de zwartingsmeting gebruikte licht is van de allergrootste beteekenis. Wil men dus resultaten verkrijgen die voor theoretische discussie vatbaar zijn, dan moet naast de zwarting en de totale hoeveelheid zilver, ook de verdeeling van het zilver onderzocht worden. Wij hebben ons daarbij beperkt tot het bepalen van de gemiddelde grootte der zilverkorrels — voorzoover dit mogelijk is — in de platen waarvan in het vorige de zwarting en het totale zilvergehalte onderzocht is.

De meting geschiedt met een ZEISS-microscoop met olie emersie van numerieke apertuur 1.30, gecombineerd met oculair N°. 12. Een oculair micrometer is geijkt met een ZEISS-objectiefmicrometer. Het blijkt aldus dat een schaaldeel van het oculair-micrometer overeenkomt met 1.0 μ.

[1]) Van het gebruikte collargol is ook de hoeveelheid zilver bepaald.

De opgegeven korreldoorsnede is het gemiddelde van 40 waarnemingen [1]).

Bij de kleinste zwartingen van de met *hydrochinon* ontwikkelde platen N°. 1, 2 en 3 kan men de korrel niet meer meten omdat zij zoo klein is, dat men in de microscoop niets meer ziet dan een zwak grijze tint. Bij plaat 4 is de korrel nog gemeten, maar is zij toch reeds onscherp. Van de platen 5, 6 en 7 kan de korrelgrootte goed worden gemeten. Voor plaat 8 was het resultaat — gevonden werd voor de doorsnede 0.49 μ — wegens de groote zwarting min of meer onzeker. Daarom hebben wij de meting overgedaan, nadat de korrels der plaat mechanisch in dunnere lagen zijn uiteengedrukt. Voor de korreldoorsnede vinden wij na deze bewerking 0.48' μ. Het uit elkaar rukken schijnt dus bij de met hydrochinon ontwikkelde platen de doorsnede niet te veranderen.

Van de sterk gezwarte platen 9 en 10 is op gelijke wijze de korrelgrootte bepaald.

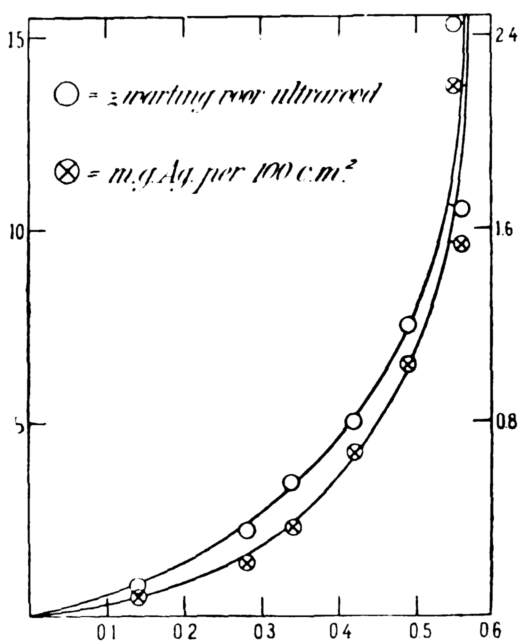


Fig. 5.

In fig. 5 zijn de gemeten korreldoorsneden der platen 4—10 uitgezet tegen de in § 2 gevonden zilverhoeveelheid in m.g. per 100 c.m² en tegen de in § 1 gemeten zwarting voor ultrarood. Voor de zilverhoeveelheid dient de linker verticale lijn, voor de zwarting de rechter verticale lijn als ordinaten-as.

Ontleent men aan tabel I (zie einde dezer mededeeling) van platen

[1]) Van deze 40 waarnemingen werden er steeds 20 door Dr. H. C. BURGER en 20 door mij gedaan. De gemiddelde afwijking tusschen beide waarnemingsreeksen bedroeg 5 %.

N°. 3 en 2 de hoeveelheid m.g. zilver per 100 c.m² en de zwarting van ultrarood en middelt men de waarden A en B, dan vindt men door substitutie in de krommen van fig. 5, die beiden door den oorsprong moeten gaan en dus tot den oorsprong zijn doorgetrokken, van iedere plaat twee waarden van de korrelgrootte.

Het gemiddelde daarvan is voor plaat 3 0.05 μ en voor plaat 2 0.03 μ. Daar deze grootheden door interpolatie zijn verkregen, zijn ze in tabel I cursief gedrukt.

Voor de theorie en het begrip van de inwerking der gezwarte photographische plaat op straling van gegeven golflengte zullen vooral onderzoekingen bij platen met kleine en toenemende korrels het meest interessant zijn. Juist om die platen met kleine, toenemende korrels te krijgen hebben we de gebruikte platen en ontwikkelaar uitgezocht. Men ziet uit fig. 5 dat dit doel volkomen is bereikt.

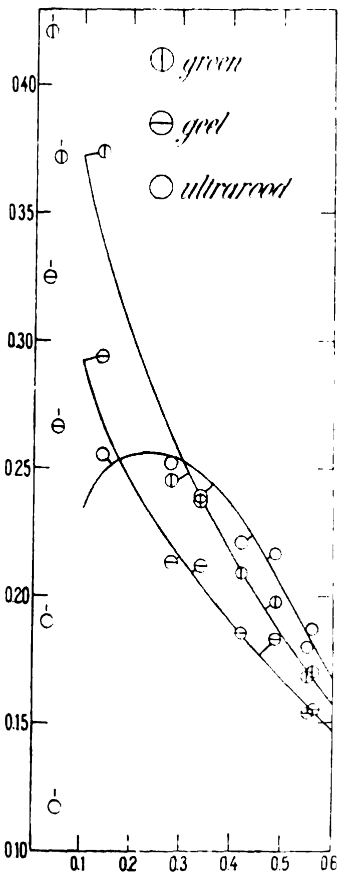


Fig. 6.

In fig. 6 wordt het geheele waarnemingsmateriaal in verband gebracht. Als onafhankelijk veranderlijke is de korreldoorsnede gekozen, als ordinaat de verhouding van de resp. zwarting en de hoeveelheid zilver in m.g. per 100 c.m² plaat.

Daar van plaat 3 en 2 de korrel door interpolatie is gevonden — deze punten staan op fig. 6 aangeduid door een vertikaal streepje boven het cirkeltje — en wij dus niet weten in hoeverre die korreldoorsnede juist is, zijn de krommen slechts doorgetrokken tot aan de punten verkregen uit de waarnemingen van plaat 4.

Bij de platen 10—4 is steeds voor fig. 6 het gemiddelde der waarden A en B genomen.

Het spreekt van zelf dat bij gelijke korrelgrootte en aard der korrels de zwarting evenredig met de hoeveelheid zilver per cM² moet zijn. SHEPPARD en MEES [1]) HURTER en DRIFFIELD [2]), EDER [3]) vonden dit resultaat, bij onze metingen blijkt dit niet

[1]) Zeitschr. f. Wiss. Phil. Bd. 3 1905, p. 282—289.
[2]) Jahrbuch f. Photographie und Reproduktionstechnik 1899, p. 219.
[3]) Beitrage zur Photochemie und Spectralanalyse Eder und Valenta II, p. 57—58.

het geval te zijn. Deze tegenspraak moet hare verklaring vinden in het feit dat genoemde onderzoekers bij de verschillende zwartingen gelijke korrels hebben gehad, terwijl dit bij ons niet het geval was.

Duidelijk blijkt dat inderdaad $\frac{z}{m}$ sterk van de korrelgrootte afhangt, zooals door NUTTING [1]) werd afgeleid.

De korrelmetingen van de met *glycine* ontwikkelde platen wijzen uit, dat de korrel vrijwel constant is en binnen de meetfouten schommelt om eene waarde van 0.96 μ bij een zwarting 1.3 tot 0.15 (gemeten voor groen); voor kleinere zwartingen daalt de grootte tot 0.9 μ.

Voor grootere zwartingen zijn geen metingen mogelijk geweest, daar de korrel zelf bij 't uiteendrukken van de gelatinelaag in kleinere stukken schijnt te worden uiteengescheurd.

In tabel II [2]) vindt men de verhouding van zwarting en zilverhoeveelheid voor de drie gebruikte kleuren. Men ziet dat deze verhouding met de zwarting afneemt.

SAMENVATTING.

1°. Er is eene methode aangegeven om zwartingen der photographische plaat tot een zwarting van 0.001 te meten voor verschillende golflengten met eene nauwkeurigheid van 0.7°/₀ voor de zwartingen van 2.0 tot 0.1 en 3.3°/₀ voor de zwartingen van 0.1 tot 0.001.

2°. Gevonden wordt, dat de zwarting der gezwarte photographische plaat in sterke mate afhangt van de kleur van het instralende licht en dat men dus de plaat bij gebruik als verzwakker eerst moet ijken voor de verschillende kleuren.

3°. De extinctiemeter van MOLL is toegepast op de zilveranalyse der photographische plaat. De methode is gebruikt van 0.5×10^{-3} tot 156×10^{-3} gram zilver per Liter. De nauwkeurigheid bedraagt gemiddeld 3°/₀.

4°. De gemiddelde korreldoorsnede der onderzochte platen is bepaald. Daar de verhouding van zwarting en zilverhoeveelheid per vlakte-eenheid in de photographische plaat aanwezig voor korrels van dezelfde grootte en geaardheid constant moet wezen, zijn krommen van deze verhouding en niet constante korrel uitgezet.

Tevens is deze verhouding bepaald voor platen met korrels van constante korreldoorsnede.

Het is ons eene aangename plicht de Heeren Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN, Dr. W. J. H. MOLL en Dr. H. C. BURGER te bedanken voor de sterke aanmoediging tot en de steeds bereidwillige hulp bij de uitwerking van deze onderzoekingen ondervonden.

[1]) Phil. Mag. 1913, Vol 26 p. 425.

[2]) De waarnemingen voor collargol zijn bijeengezet aan het einde van Tabel II.

TABEL I. (Hydrochinon).

Plaat-nummer.	Korrel-doorsnede in μ.	Verhouding van zwarting voor ultrarood en m.g. Ag per 100 c.m.².	Verhouding van zwarting voor geel en m.g. Ag. per 100 c.m ².	Verhouding van zwarting voor groen en m.g. Ag per 100 c.m.².
10 A	0.55 uitgeperst	$\frac{2.424}{13.2} = 0.184$	$\frac{2.060}{13.2} = 0.156$	$\frac{2.215}{13.2} = 0.168$
10 B		$\frac{2.482}{14.15} = 0.175$	$\frac{2.144}{14.15} = 0.152$	$\frac{2.381}{14.15} = 0.168$
9 A	0.56 uitgeperst	$\frac{1.787}{9.56} = 0.187$	$\frac{1.483}{9.56} = 0.155$	$\frac{1.636}{2.56} = 0.170$
9 B		1.726	1.483	1.602 [1]
8 A	0.49	$\frac{1.391}{6.60} = 0.211$	$\frac{1.178}{6.32} = 0.178$	$\frac{1.270}{6.60} = 0.192$
8 B		$\frac{1.409}{6.32} = 0.223$	$\frac{1.191}{6.32} = 0.188$	$\frac{1.282}{6.32} = 0.203$
7 A	0.42	$\frac{0.908}{4.31} = 0.211$	$\frac{0.777}{4.31} = 0.180$	$\frac{0.869}{4.31} = 0.202$
7 B		$\frac{0.943}{4.09} = 0.231$	$\frac{0.781}{4.09} = 0.191$	$\frac{0.880}{4.09} = 0.215$
6 A	0.34	$\frac{0.559}{2.51} = 0.223$	$\frac{0.491}{2.51} = 0.196$	$\frac{0.547}{2.51} = 0.218$
6 A		$\frac{0.554}{2.17} = 0.255$	$\frac{0.492}{2.17} = 0.227$	$\frac{0.656}{2.17} = 0.256$
5 A	0.28	$\frac{0.361}{1.70} = 0.212$	$\frac{0.307}{1.70} = 0.181$	$\frac{0.350}{1.70} = 0.206$
5 B		$\frac{0.332}{1.14} = 0.291$	$\frac{0.278}{1.14} = 0.244$	$\frac{0.323}{1.14} = 0.283$
4 A	0.14	$\frac{0.128}{0.532} = 0.241$	$\frac{0.148}{0.532} = 0.279$	$\frac{0.188}{0.532} = 0.354$
4 B		$\frac{0.126}{0.465} = 0.271$	$\frac{0.143}{0.465} = 0.308$	$\frac{0.183}{0.465} = 0.394$
3 A	0.05	$\frac{0.0208}{0.205} = 0.101$	$\frac{0.0485}{0.205} = 0.237$	$\frac{0.0703}{0.205} = 0.343$
3 B		$\frac{0.0248}{0.186} = 0.133$	$\frac{0.0547}{0.186} = 0.294$	$\frac{0.0745}{0.186} = 0.401$
2 A	0.03	$\frac{0.0159}{0.0824} = 0.193$	$\frac{0.0277}{0.0824} = 0.336$	$\frac{0.0364}{0.0824} = 0.442$
2 B		$\frac{0.0182}{0.0980} = 0.186$	$\frac{0.0307}{0.0980} = 0.313$	$\frac{0.0390}{0.0980} = 0.398$

[1]) Zilverbepaling mislukt.

TABEL I (*Vervolg*).

Plaat-nummer.	Zwarting voor ultrarood.	Zwarting voor zichtbare spectrum.	Zwarting voor geel.	Zwarting voor groen.	Zwarting voor heele spectrum.
1 α	0.0013	0.0110	0.0088	0.0129	0.0025
1 β	0.0042	0.0206	0.0158	0.0206	0.0066⁵
1 γ	0.0111	0.0361	0.0267	0.0367	0.0130
1 δ	0.0204	0.0542	0.0427	0.0567	0.0238

TABEL II. (Glycine).

Plaatnummer.	Verhouding van zwarting voor ultrarood en m.g. Ag per 100 c.m.².	Verhouding van zwarting voor geel en m.g. Ag per 100 c.m.².	Verhouding van zwarting voor groen en m.g. Ag per 100 c.m.².
19 A	$\frac{2.647}{14.6} = 0.181$	$\frac{2.204}{14.6} = 0.151$	$\frac{2.363}{14.6} = 0.162$
19 B	$\frac{2.316}{14.25} = 0.163$	$\frac{2.183}{14.25} = 0.153$	$\frac{2.308}{14.25} = 0.162$
18 A	$\frac{2.059}{11.2} = 0.184$	$\frac{1.756}{11.2} = 0.157$	$\frac{1.879}{11.2} = 0.168$
18 B	$\frac{2.080}{11.65} = 0.170$	$\frac{1.776}{11.65} = 0.152$	$\frac{1.929}{11.65} = 0.166$
17 A	$\frac{1.428}{10.05} = 0.142$	$\frac{1.225}{10.05} = 0.122$	$\frac{1.280}{10.05} = 0.127$
17 B	$\frac{1.408}{9.50} = 0.149$	$\frac{1.208}{9.50} = 0.127$	$\frac{1.279}{9.50} = 0.135$
16 A	$\frac{0.859}{6.86} = 0.125$	$\frac{0.731}{6.86} = 0.107$	$\frac{0.750}{6.86} = 0.109$
16 B	0.874	0.750	0.767 [1]
15 A	$\frac{0.229}{2.29} = 0.100$	$\frac{0.195}{2.29} = 0.085$	$\frac{0.193}{2.29} = 0.084$
15 B	$\frac{0.234}{2.05} = 0.114$	$\frac{0.203}{2.05} = 0.099$	$\frac{0.199}{2.05} = 0.097$
14	$\frac{0.1163}{0.936} = 0.124$	$\frac{0.106}{0.936} = 0.113$	$\frac{0.102}{0.936} = 0.109$
13	$\frac{0.090}{0.855} = 0.105$	$\frac{0.078}{0.855} = 0.091$	$\frac{0.076}{0.855} = 0.089$
12	$\frac{0.0218}{0.330} = 0.066$	$\frac{0.0224}{0.330} = 0.068$	$\frac{0.0212}{0.330} = 0.064$
11	$\frac{0.0203}{0.343} = 0.059$	$\frac{0.0196}{0.343} = 0.057$	$\frac{0.0187}{0.343} = 0.055$
Collargol.	$\frac{0.0105}{6.50} = 0.0015$	$\frac{0.211}{6.50} = 0.031$	$\frac{0.673}{6.50} = 0.110$

[1]) Zilverbepaling mislukt.

Utrecht, Aug. 1920. *Instituut voor theoretische Physica.*

Scheikunde. De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR (with A. K. DATTA and D. N. BHATTACHARYA): „*Catalysis* VIII".

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

a. Reaction between silver nitrate and ferrous-ammonium sulphate

I tried to determine the kinetics of the reaction between ferrous ammonium sulphate and silver nitrate. The reaction seems to be very rapid.

When $^N/_{50}$ silver nitrate and $^N/_{56}$ ferrous ammonium sulphate are mixed at 25°, a bimolecular velocity coefficient of 0.0007 is obtained, but unfortunately this coefficient falls off as the chemical reaction proceeds. Since the metallic silver formed reacts on the ferric salt produced and we get an equilibrium of this nature

$$2\,Ag + Fe_2(SO_4)_3 \rightleftarrows Ag_2SO_4 + 2\,FeSO_4$$

$$Ag + Fe(NO_3)_3 \rightleftarrows AgNO_3 + Fe(NO_3)_2$$

$$\text{or}\quad \frac{(Fe^{++})\,(Ag^{+})}{Fe^{+++}}\ \text{at equilibrium} = 0{\cdot}128$$

(cf. NOYES en BRAUN, Jour. Amer. Chem. Soc. 1912, **34**, 1016) the reaction between ferrous ammonium sulphate and silver nitrate is rapid even at 0° and has a small value for its temperature coefficient.

The reaction is markedly accelerated by acids: nitric, sulphuric, citric, tartaric, and acetic acids have been tried; the greater the concentration of hydrogen ions, the greater is the velocity. This catalytic activity may be utilised in determining the concentration of hydrogen ions.

Magnetic force has practically no effect on this reaction. It is extremely sensitive to the influence of dirt etc.

Potassium nitrate appreciably retards the reaction, so do manganese salts very markedly.

Carbonic acid markedly accelerates the reaction. Boric acid is practically without any influence. So is phenol, which is probably slightly retarding in its effect. Glucose markedly accelerates the reaction. This is a case of induced reaction. A mixture of excess of silver nitrate and very little of ferrous ammonium sulphate was prepared and divided into equal parts, to one of which glucose was

added, whilst the other was left as it is; in a short time, more silver was deposited in the tube containing glucose, though a neutral solution of glucose cannot reduce silver nitrate. This is another case of an induced reaction already studied. (DHAR, Trans. Chem. Soc. 1917, **111**, 690).

Summary: *a.* The reaction between silver nitrate and ferrous ammonium in dilute solutions is bimolecular. The reaction is very rapid even at 0° and the temperature coefficient has a small value.

b. When the chemical change has proceeded up to a certain extent, an equilibrium is set up:

$$Ag + Fe(NO_3)_3 \rightleftarrows AgNO_3 + Fe(NO_3)_2$$

c. Acids accelerate this change; in case of nitric, sulphuric, citric, tartaric acetic acids, the greater the concentration of $H^{\cdot}$ ions, the greater is the acceleration. Carbonic acid markedly accelerates, whilst boric acid and phenol are without action. Manganese sulphate and potassium nitrate are retarders.

d. A neutral solution of glucose cannot reduce silver nitrate at about 20°; the reaction between ferrous ammonium sulphate and silver nitrate induces the chemical change between glucose and silver nitrate.

h. Oxidation of sodium sulphite by atmospheric oxygen.

LUTHER (Zeit. phys. Chem. 1903, **45**, 662) advanced the idea that negative catalysis cannot take place in a reaction which is entirely free from positive catalysts and the phenomenon is really due to the destruction or otherwise rendering latent of these positive catalysts. TITOFF (ibid. 1903, **45**, 641) as a result of his studies of the combined effect of positive and negative catalysors on the rate of oxidation of sodium sulphite lends his support to LUTHER's theory. The effect of negative catalysts on this reaction was first studied by BIGELOW (ibid. 1898, **26**, 493) who found the oxidation of the salt in aqueous solution to be greatly retarded by the presence of minute quantities of benzaldehyde, iso-butyl alcohol, glycerol, phenol etc. BIGELOW also demonstrated that the effect of negative catalyst is not on the rate of solution of oxygen, but on the rate of the reaction between the sulphite and oxygen. A few years later TITOFF substantiated BIGELOW's results and in addition studied the simultaneous effect produced by copper sulphate, a powerful accelerator and manitol a strong retarder. He found that these two substances do not exert any additive effect but influence each other. YOUNG (Jour. Amer. Chem. Soc. 1901, **23**, 119; **24**, 1902, 297) found that small quantities of certain alkaloids

greatly retard this oxidation, specially if this solution is alkaline, and the inhibitory effect of sucrose, invert sugar, asparatic acid, etc., have been noted by SAILLAND (Zeit. Ver. Zuckerind. 1913, **63**, 1035). In 1912, we conducted some experiments on this line. From preliminary experiments it was observed that the velocity of the reactions depends greatly on the quality of the water used. Ordinary distilled water was found quite inefficient as it contained sufficient dissolved salts and gases to affect the course of the reactions materially. Freshly prepared conductivity water obtained according to the method of JONES and MACKAY (Zeit. Phys. Chem. 1897, **22**, 237) was always used. The salts used were purified by recrystallisation from conductivity water and dissolved in the same water in resistance glass bottles. Well steamed Jena flasks were used as vessels in which the reaction took place. In short every care was taken to ensure purity. But inspite of all this care, it was found that velocity coefficients of the reactions carried out under identical conditions but on different days and even on different times on the same day were slighty different. TITOFF also found similar results. The explanation is probably that the reaction is so susceptible to external conditions, that even the slight variation of circumstances that is inevitable when we carry out the same reaction at two different times are sufficient to affect the results. It is therefore clear that our comparison of the results tried on different days or with different concentration of the same catalyst cannot give an accurate idea of their relative effect. To remove this difficulty, at least partially, we carried out a blank experiment in which no catalyst was added, simultaneonsly with the main one. Two similar ERLENMEYER flasks of capacity 150 c.c. were arranged side by side. A definite volume of sulphite was put in each flask. The catalyst was added in one flask. The course of the reaction was determined and their coefficients calculated. The ratio of these two coefficients gives the measure of the catalytic effect of the substance under consideration. In this way it was found that the ratio between the coefficients of two similar pair of reactions carried out on different days were almost the same though their absolute velocities varied appreciably. The flasks were exposed to the atmosphere whose oxygen served as the oxidising agent.

About $\frac{N}{100}$ iodine and thio sulphate solutions were used as titration liquids. A definite volume of the sulphite solution is pipetted in a flask containing an excess of standard iodine and the excess of iodine was titrated back with the standard thio sulphate.

The temperature of the experiments was about 30° C.

Substance	Concentration	$\frac{K_1 \text{ catalyst}}{K_1 \text{ blank}}$
Cane sugar	0·2 N	0·09
"	$3·1 \times 10^{-2}$ N	0·17
"	$6·7 \times 10^{-3}$ N	0·47
"	$9·4 \times 10^{-4}$ N	0·63
"	$3·7 \times 10^{-5}$ N	0·89
Lactose	0·15 N	0·084
"	$3·1 \times 10^{-2}$ N	0·15
"	$9·4 \times 10^{-4}$ N	0·55
"	$3·7 \times 10^{-5}$ N	0·85
Glucose	0·1 N	0·22
"	1×10^{-3} N	0·75
"	2×10^{-4} N	0·83

It will be evident from the above results that cane sugar, lactose, and glucose are very strong retarders. Cane sugar and lactose have almost similar effects, though lactose is slightly stronger in its effect. It appears probable that sugars as a class will act as negative catalysts. It has been found that the sparingly soluble volatile substances like camphor and menthol have marked negative effect while naphthalene, anthracene etc. have no catalytic effect.

The effect of several organic acids and their salts were also investigated. (See Table next page).

It is very peculiar that the weak acids like acetic, propionic, cacodylic etc. have comparatively small retarding effects. Their sodium salts also exert practically the same effect. On the other hand comparatively strong acids like oxalic, salicylic, benzoic etc. exert much greater retarding effect, and their salts too exert the same effect as the acids. Moreover it is found that the sodium salts of stronger inorganic acid have no marked effect.

We have found that hydroquinone has a very great negative effect on this reaction. For the same concentration, it exerts the greatest negative catalytic effect amongst the negative catalysts investigated up till now. We tried to determine the temperature coefficient of this heterogeneous reaction and see whether this becomes greater in presence of the powerful negative catalyst hydroquinone. Unlike most other heterogeneous reactions, we found that the temp-

Substance	Concentration	$\frac{K_1 \text{ catalyst}}{K_1 \text{ blank}}$
Oxalic acid	$1 \cdot 2 \times 10^{-3}$ N	0·29
„	3×10^{-4} N	0·56
„	3×10^{-5} N	0·90
Benzoic acid	$1 \cdot 2 \times 10^{-3}$	0·25
„	2×10^{-4}	0·58
„	5×10^{-5}	0·83
Cacodylic acid	·02 N	0·75
„	·01 N	0·94
Sodium benzoate	1×10^{-3}	0·19
„	$0 \cdot 7 \times 10^{-3}$	0·25
„	$1 \cdot 5 \times 10^{-4}$	0·70
„	1×10^{-5}	0·90
Potassium oxalate	1×10^{-3} N	0·29
„	1×10^{-4} N	0·80
„	2×10^{-5}	0·96
Sodium salicylate	1×10^{-3}	0·23
„	$1 \cdot 5 \times 10^{-4}$	0·73
„	1×10^{-5}	0 95
Sodium citrate	1×10^{-3}	0·14
„	1×10^{-5}	0·85
Sodium acetate	3×10^{-3}	0·73
„	1×10^{-3}	0·85
Sodium propionate	3×10^{-3}	0·74
„	1×10^{-3}	0 89
Sodium butyrate	3×10^{-3}	0·74
„	1×10^{-3}	0·85

erature coefficient is about 2 (between 25°--40°) and it does not appreciably change in presence of hydroquinone (DHAR, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 1919, 21, 1042). It has been found that so long as about one third of the substance is oxidised, the unimolecular velocity coefficient remains practically constant, but as the oxidation proceeds further, the velocity coefficient increases rapidly, and hence

it becomes very difficult to determine the temperature coefficient accurately. It appears therefore that the reaction is auto-catalytic.

MATHEWS and his colleagues (Jour. Phys. chem. 1913, **17**, 211; Jour. Amer. chem Soc. 1917, **39**, 635) found that ultraviolet light markedly accelerates this reaction, and also established the fact that this is not a case of auto-oxidation. For this reaction, they could not find a positive catalyst; copper sulphate, which is known to be a powerful catalyst under ordinary conditions exerted no appreciable effect in ultra-violet light. On the other hand the negative catalysts like hydroquinone, phenol etc. exerted a retarding effect in presence of ultra-violet light. So it appears that there are very few positive catalysts, but very many negative ones for this reaction when carried out in light or darkness.

The explanation of the negative catalytic effect of organic substances in general on this reaction is this:

The reaction consists in the oxidation of SO_3 radical into SO_4, and the sulphite ion is the active agent. It is well known that several organic substances form complexes with sulphurous acid and sulphites; these complexes are stable so far as oxidation is concerned and hence the organic substances act as negative catalysts by diminishing the concentration of sulphite ion by combining with it.

In foregoing papers I have proved that the phenomenon of negative catalysis is very common, whilst there are very few positive catalysts. According to LUTHER's view a negative catalyst must have a positive catalyst as its counterpart, but this is not probable since there are so few positive catalysts and so many negative ones. Hence it appears that LUTHER's view which emphasises that negative catalysis cannot take place in a reaction which is entirely free from positive catalysts, is not substantiated by experimental evidence.

Summary.

a. Cane sugar, lactose, glucose, camphor, and menthol are negative catalysts, whilst naphthalene, and anthracene are without action on the oxidation of sodium sulphite.

b. The weak organic acids and their sodium salts exert practically the same effect. Benzoic, oxalic, salicylic acids and their sodium salts exert greater negative effect than the weak acids and their salts. It is very peculiar that the acid and its salt should exert the same effect.

c. The temperature coefficient of the reaction is about 2 and it

does not change appreciably in presence of the strong negative catalyst hydroquinone.

d. The phenomenon of negative catalysis is very common in oxidation reactions. LUTHER's view which emphasises that negative catalysis cannot take place in a reaction which is entirely free from positive catalysts, is not substantiated by experimental evidence.

e. The organic substances act as negative catalysts by diminishing the concentration of the sulphite ion, which is the active agent in this oxidation; the diminution in concentration of sulphite ion is caused by the formation of a stable complex of the sulfite and the organic substance; this complex is not oxidized as readily as the sulphite ion.

c. *Catalytic activity of the undissociated acid.*

In recent years the question of acid catalysis has entered into a new period; and as a result of the accumulation of new observations and of increased exactitude in the measurement of the velocity of reactions, evidence has been obtained in support of the view that the catalysing power of an acid is not entirely due to the hydrogen ion, but that the undissociated acid also contributes to the observed effect.

This investigation had for its object the determination of the function of the undissociated parts of oxalic and picric acids in the hydrolysis of methyl acetate.

The experiments were all conducted at 45°. Dry pure potassium oxalate and sodium picrate were added in different quantities to diminish the ionisation of the respective acids. The former salt was crystallised from MERCK's pure sample, and the latter was prepared from pure materials and purified by repeated crystallisations.

The following summary of results is obtained [1])

Oxalic acid.

Conc. of acid.	Conc. of $K_2C_2O_4$	$\frac{\text{Acid Conc.}}{\text{Salt. Conc.}}$	K_1
·05 N	—	—	0·00091
"	·0038 N	13·16	0·00065
"	·0114 N	4·38	0·00044
"	·0174 N	2·37	0·00042
"	·0278 N	1·79	0·00038
"	·0590 N	1·02	0·00011

[1]) The experiments described here were finished in 1913.

Picric acid.

Conc. of acid.	Conc. of Sodium picrate.	$\frac{\text{Acid Conc.}}{\text{Salt. Conc.}}$	K_1
·03 N	—	—	0·00135
"	0·0031 N	9·67	0·00139
"	0·0050 N	6.00	0.00141
"	0·0513 N	0·58	0·00173
"	0·0778 N	0·38	0·00160
"	0·1161 N	0·25	0·00153
"	0·1597 N	0·18	0.00134
"	0·3066 N	0·09	0·00122

It will be evident from the foregoing tables that the velocity coefficients do not decrease proportionally with the decrease in the concentration of the hydrogen ions. In the case of oxalic acid the velocity coefficients fall off with the concentration of potassium oxalate; whilst in the case of picric acid the addition of sodium picrate produces at first an increase in the velocity coefficient and then when the concentration of sodium picrate reaches the value of 0·159 N, the velocity coefficients begin to fall off. This is explicable on the assumption that even undissociated acids are catalytically active in the hydrolysis of esters. But in view of the work of WALDEN (Jour. Amer. Chem. Soc. 1912, **35**, 1649) on the measurement of the di-electric constants of solutions, a different interpretation of these results is possible. WALDEN has shown with non-aqueous solutions that the di-electric constant and the ionising power of a solvent are enormously increased when electrolyts are dissolved in it. Naturally the degree of ionisation of the dissolved acid and along with it the concentration of hydrogen ions are also increased. Thus by the addition of salts of the same acids, there are two effects:

1. The diminution of hydrogen ions due to the increase of the common negative ion.

2. The increase in the concentration of the hydrogen ions due to the greater ionisation of the acid caused by the increase in the di-electric constant of the solvent.

It is evident that these two effects counteract each other.

In the case of potassium oxalate the first effect preponderates over the second and hence the velocity coefficient falls off with the concentration of potassium oxalate, whilst in the case of picric acid

the second effect predominates over the first and the velocity coefficient instead of decreasing, increases with the concentration of sodium picrate.

Moreover WALDEN has shown that there are two types of salts with regard to their effects on the di-electric constant of the solvent. He has observed that $N(CH_3)_4Cl$ markedly increases the di-electric constant of the solvent whilst CH_3NH_2HCl affects this constant to a very slight extent. It is quite possible that even in aqueous solution salts like potassium oxalate, sodium acetate, etc. do not increase appreciably the ionising power of the solvent and the velocity of the reaction in its presence does not increase. In this way we can explain the negative effect of potassium oxalate and positive effect of sodium picrate on ester hydrolysis from the point of view of the change of the di-electric constant of the solvent due to the dissolution of electrolytes.

SUMMARY.

a. The hydrolysis of methyl acetate was investigated in presence of oxalic acid and picric acid and sodium picrate. In the former case, the velocity coefficient falls off, whilst in the case of picric acid, the velocity coefficient increases with the concentration of sodium picrate up to a certain extent and then decreases with the increase of the concentration of sodium picrate.

b. An explanation of these results is suggested on the basis of the increase of the di-electric constant and ionising power of the solvent observed by WALDEN when salts are dissolved in it.

Chemical Laboratory Muir Central College,
Allahabad, India.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: „*Catalysis.* IX. *Thermal and photochemical reactions*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

In a foregoing paper (DHAR, Trans. Chem. Soc. 1917 **111**, 707) it was shown that the temperature coefficient of the oxidation of potassium oxalate by iodine has the value 7.2 for a 10° rise in the dark and this reaction is extremely sensitive to light.

It occured to me that all reactions which have high temperature coefficients should be sensitive to light.

I have shown previously that most uni-molecular reactions have high temperature coefficients and I investigated the effect of tropical sunlight on several of these reactions, and the following results were obtained.

Ammonium nitrite decomposes fairly readily at about 33° in sunlight, whilst at 33° in the dark, there is hardly any decomposition. The temperature coefficient for a 10° rise in the dark is about 4.5 (ARNDT, Zeit. Phys. Chem. 1901, **39**, 64).

The intramolecular transformation of acetyl chloranilide to para-chloracetanilide has the temperature coefficient 3.2 in the dark. (RIVETT, Zeit. Phys. Chem. 1913, **82**, 201) and BLANKSMA (Rec. trav. Pays. 1903, **22**, 290) has shown that the change is sensitive to light.

Similarly the pseudo-unimolecular reactions, the hydrolysis of cane sugar and the decomposition of potassium persulphate are highly influenced by light. An aqueous solution of cane sugar when exposed for several days to tropical sunlight, becomes converted into the invert sugars.

GREEN and MASSON (Trans. Chem. Soc. 1910, **97**, 2083) have shown that potassium persulphate is slowly decomposed by water according to the following equation

$$K_2 S_2 O_8 + H_2 O = 2 K H S O_4 + O.$$

This reaction has the temperature coefficient 5 in the dark. I found that the reaction is very sensitive to light and the oxygen given off in 24 hours in sunlight is practically equal to that produced in about 15 days in the dark at 27°.

The decompositions of the sulfine bases and the tetraammonium compounds studied by VON HALBAN have high temperature coefficients

and these reactions when investigated would show great sensitiveness to light (Zeit. Phys. Chem. 1909, **67**, 129).

CAIN and NICOLL (Jour. Chem. Soc. 1903, **83**, 470) have proved that the decomposition of the diazo salts has the value of about 5 for their temperature coefficients and it is well known that diazo salts are sensitive to light.

PENDLEBURY and SEWARD (Proc. Roy. Soc. 1889, **95**, 396) have shown that the reaction between $KClO_3$ KI and HCl has the temperature coefficient of about 4 in the dark and I have found that the reaction is very sensitive to light.

I have already shown (Trans. Chem. Soc. 1917, **111**, 707) that the oxidations of sodium formate by mercuric chloride and by iodine has 4.05 for their temperature coefficient. These two reactions are also very sensitive to light (DHAR, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 1916, **24**, 1324).

I have shown that light markedly accelerates the reaction between iodine and oxalates and now I have tried to find out which part of the spectrum is active in this reaction. For this I exposed five small tubes containing a mixture of potassium oxalate and iodine in a spectrum obtained from a carbon arc-light. It was found that the iodine disappeared first in the tube held in the indigo portion near the violet end of the spectrum. Then that of the tube held in the blue region. The chemical change took place almost simultaneously in the tubes held in the green and violet portions of the spectrum and the colour of the tube in the red end was the last to disappear.

A mixture of mercuric chloride and potassium oxalate undergoes the following change in sunlight:

$$2HgCl_2 + K_2C_2O_4 = 2KCl + 2CO_2 + 2HgCl.$$

This decomposition can also be induced by lights obtained from a carbon arc, quartz mercury vapour lamp, and an arc obtained by passing alternating current in electrodes made of thorium and zirconium oxides. I have repeatedly observed that in tropical sunlight, a solution of ammonium cupric oxalate decomposes readily in glass vessels with the separation of metallic copper and evolution of carbon dioxide; but it was found impossible to bring forth this change by light obtained from the carbon arc or the thorium and zirconium oxides arc.

I have found that uranium nitrate markedly accelerates the photochemical decomposition of a mixture of mercuric chloride and potassium oxalate, but chromates having the same yellow colour as the

uranium salt exert a markedly negative effect. MATHEWS and WEEKS (Journ. Amer. Chem. Soc. 1917, **39**, 635) have shown that uranium nitrate is also a positive catalyst in the photochemical oxidation of sodium sulphite. Moreover, it is wellknown that uranium salts markedly help the photochemical decomposition of organic acids (e.g.), oxalic, formic, lactic etc. Hence it appears that an uranium salt is a positive catalyst of great generality in photochemical reactions.

I have observed that manganese sulphate exerts a negative effect in the photochemical decomposition of a mixture of mercuric chloride and potassium oxalate. It has already been shown that manganese salts act as a negative catalyst in the reactions between phosphorous and chromic acids, formic and chromic acids, mercuric chloride and sodium formate, iodine and sodium formate, silver nitrate and sodium formate, silver nitrate and ferrousammonium sulphate, etc. So it seems that a manganese salt is a negative catalyst for light and dark reactions alike.

I have also observed the effects of the different parts of the spectrum on several other photochemical reactions by passing ordinary sunlight through different solutions and exposing the reacting substances to the filtered lights thus obtained and the results obtained are summarised below:

Reaction	Result
(1) $HgCl_2 + (NH_4)_2 C_2O_4 \rightarrow$ (2) $I_2 + (NH_4)_2 C_2O_4 \rightarrow$ (3) $FeCl_3 + (NH_4)_2 C_2O_4 \rightarrow$	Blue, violet and ultra-violet more active than the red and infra-red.
(4) Pyrogallol and Pyrogallate $+ O_2 \rightarrow$ (5) Hydroquinone $+ O_2 \rightarrow$ (6) Cu_2Cl_2 (ammoniacal or acid) $+ O_2 \rightarrow$ (7) Decomposition of $H_2S \rightarrow$	practically uniform acceleration in different parts
(8) Quinine acid sulphate $+ H_2Cr_2O_7 \rightarrow$	Blue and violet slightly more active than the red.
(9) $KMnO_4 + H_2C_2O_4 \rightarrow$	Violet and ultra-violet more active than red.

In a remarkable article PERRIN (Annales de Physique 1919, t. XI, 1) has ennunciated the following hypothesis:

"All chemical reactions are provoked by light radiations. Their velocities are determined by the intensity of the light radiations and depend on temperature to such an extent as the light intensity depends on temperature". By applying the idea of the emissive power of perfectly black bodies and its relation to temperature,

PERRIN has deduced the following equation connecting the velocity coefficient and the temperature:

$2.3\, d \log_{10} k = \varrho v \frac{dT}{T^2}$, where $k =$ velocity coefficient, $v =$ wavelength of the activating radiation and $T =$ absolute temperature. From his calculations, it is seen that the wavelengths which are active in bringing forth the ordinary chemical changes vary from 2.56 to 0.8 microns. It is also seen that a reaction which is highly sensitive to the influence of temperature has a small value for its activating wavelength, that is, a reaction of this type would be most sensitive to violet and ultraviolet end of the spectrum. From PERRIN's calculations it is seen that the reaction between $K_2C_2O_4$ and I_2 which has the high temperature coefficient of 7.2 in the dark, has 0.8 micron for the wavelength of its activating radiation. In other words, this reaction would be most sensitive to light near the red end of the spectrum. But it is experimentally shown that this reaction is not sensitive to the indigo part near the violet end of the spectrum. My own experiments on several photochemical reactions have shown that the blue and violet portions of the spectrum are most active so far as chemical effects are concerned. Although the hypothesis of PERRIN is still of a qualitative nature, it is a highly suggestive one and my experiments give this hypothesis a sort of general support.

I have tried to prove experimentally that reactions, which are most sensitive to the influence of temperature, are also most sensitive to the influence of light. In a foregoing paper, I have advanced the hypothesis that temperature and light affect a chemical change in a similar way. The experimental evidence brought forward in this article, as well as PERRIN's hypothesis that all chemical changes are induced by radiations, give additional confirmation to my hypothesis regarding the identity of effects of temperature and light on chemical reactions.

Summary:

a. Evidence has been brought forward in support of the view that reactions, having large temperature coefficients, are sensitive to light. Hence for a chemical reaction, sensitiveness to the influence of temperature and sensitiveness to light radiations go hand in hand.

b. The indigo part near the violet end of the spectrum is most active in the reaction between $K_2C_2O_4$ and I_2; blue and violet parts more active than the red in the following cases:

$(NH_4)_2C_2O_4 + HgCl_2$, $(NH_4)_2C_2O_4 + FeCl_3$, $H_2C_2O_4 + KMnO_4$ and Quinine bisulphate + $H_2Cr_2O_7$.

c. Uranium salts are general positive catalysts in photochemical reactions, whilst manganese salts are general negative catalysts in light and dark reactions alike.

d. PERRIN's hypothesis that all chemical reactions are induced by radiations support the view that the effects of temperature and of light on chemical reactions are of an identical nature.

e. A solution of ammonium cupric oxalate decomposes with the separation of metallic copper and evolution of CO_2 in tropical sunlight, but not in carbon-arc-light or the zirconium + thorium oxides-arc-light.

Chemical Laboratory, Muir Central College,
Allahabad, India.

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: „*Catalysis.* X. *Explanation of some abnormally large and small temperature coefficients*".

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

SKRABAL (Monatsh. 1914, 35, 1157) has shown that the velocity of formation of iodate from iodine and iodide in a mixture of sodium carbonate and sodium bicarbonate solutions has $\frac{k_{t+10}}{k_t} = 45$. When a similar reaction was effected in sodium acetate solution the temperature coefficient is 2.

The velocity of decomposition of iodate in a mixture of acetic acid and sodium acetate solution has $\frac{k_{t+10}}{k_t} = 1.34$. The same reaction in a mixture of disodium and monosodium phosphates gives a temperature coefficient 1.26; in a mixture of KF and HF, the temperature coefficient has the value 0.9 to 1.04 and a mixture of sodium sulphate and sodium hydrogen sulphate leads to the value of 0.85.

SKRABAL remarks that the temperature coefficient must necessarily undergo a change when the substances, which affect the time equation, are transformed into complexes. The relationship between the temperature coefficient T of the original reaction and T′, that of the reaction between the complex substances is governed by the formula,

$$T'/T = e^{10/RT(T+10)(mQ_1 + nQ_2 + \ldots + xq_1 + yq_2 + \ldots)}$$

in which Q and q respresent the heat changes of the complex reaction and the sum $(m + n + \ldots + x + y + \ldots)$ indicates the order of the reaction. This formula indicates that a great variability of T is to be expected from reactions of the higher orders.

In a foregoing paper (Annales de Chimie et de physique 1919, t. XI, 130) I have definitely proved that this conclusion of SKRABAL which states that the temperature coefficients of polymolecular reactions are, in general, greater than those of unimolecular ones, is not supported by experimental evidence.

SKRABAL investigated these two polymolecular reactions:

$$3\,I_2 + 6\,OH' = 5\,I' + I\,O'_3 + 3\,H_2O \text{ and}$$
$$I\,O'_3 + 5\,I' + 6\,H^{\cdot} = 3\,I_2 + 3\,H_2O.$$

He has shown that the second reaction has a temperature coefficient less than unity (about 0.83) in presence of sodium sulphate and sodium bisulphate (Zeit. Elektrochem. 1915, **21**, 461).

As these results are rather peculiar, it was thought worth while to re-investigate some of these cases.

A dilute solution of iodic acid was prepared and potassium iodide added to this solution. The reaction is very rapid and it is practically impossible to determine its temperature coefficient; when the two solutions are mixed at 0°, iodine immediately separates. The mixture is divided into two parts, one of the two tubes is put into ice and the other heated to boiling. Now the hot tube is cooled and brought to the same temperature as the other and the colour of the two tubes compared. Generally it is very difficult to find any difference in the two tubes. Sometimes the heated seems more pale probably due to the volatilisation of iodine when the tube is heated. Consequently the temperature coefficient without any sulphate is practically unity.

Similar experiments were made in presence of concentrated solutions of sodium sulphate and magnesium sulphate. In presence of these sulphates, a mixture of iodic acid and potassium iodide liberates slightly less iodine at a high temperature than at ordinary temperatures, hence a slight negative effect, of increase of temperature on the velocity of the reaction between iodic acid and potassium iodide, is observed.

On the other hand, potassium sulphate, potash alum, manganese sulphate etc. are quite ineffective in changing the temperature coefficient of the reaction between iodic acid and potassium iodide. The behaviour of potassium sulphate is different from that of sodium sulphate, since a saturated solution of sodium sulphate is richer in SO_4'' ions than a saturated solution of potassium sulphate at the same temperature. The temperature coefficient of the reaction between iodic acid and potassium iodide in presence of the above sulphates is practically unity.

Ammonium and zinc sulphates behave differently and in their presence the temperature coefficient becomes greater than unity. Marked difference is noticeable in the two tubes; the tube, which is heated, contains much more free iodine than the tube kept at 0°.

The explanation of this behaviour is connected with the phenomenon of hydrolysis. The sulphates of sodium, magnesium etc. are very slightly alkaline, since the basic portions in these salts are stronger than the acid portion. At higher temperatures more OH'-ions are produced, since temperature greatly increases the amount

of hydrolysis, and these OH′-ions react on the iodine which is set free re-forming iodide and iodate.

Hence at the higher temperatures, less iodine seems to be formed from the mixture of iodic acid and potassium iodide in presence of concentrated sodium or magnesium sulphate.

On the other hand, solutions of zinc and ammonium sulphates produce H˙-ions due to hydrolysis and these H˙-ions are very active in liberating iodine according to the following equation:

$$IO'_3 + 5\,I' + 6\,H^{\cdot} = 3\,I_2 + 3\,H_2O.$$

Moreover, I have repeatedly observed that addition of acids produces more iodine, from a mixture of iodic acid and potassium iodide, than in the absence of acids.

Hence the abnormal effect of temperature on the velocity of the reaction between iodic acid and potassium iodide in presence of sodium sulphate ascribed by Skrabal to complex formation, is really due to secondary changes produced by the interaction of the products of the hydrolysis on the reacting substances.

A similar explanation is applicable to the small temperature coefficients obtained in the reaction between iodic acid and potassium iodide in presence of sodium acetate, sodium phosphate and potassium fluoride; because all these salts are alkaline due to hydrolysis.

The reaction between iodic acid and potassium iodide is extremely rapid even at 0°. The reactions between KI and $K_2S_2O_8$ and KI and H_2O_2 have smaller velocities than that between HIO_3 and KI. These two reactions have temperature coefficients greater than unity. Experiments were made on the effect of concentrated $MgSO_4$ solution on the influence of temperature on the reactions between HI and $K_2S_2O_8$ and HI and H_2O_2. Even in presence of $MgSO_4$, these two reactions have temperature coefficients greater than unity. The hot tubes contain much more iodine than the cold ones.

In this connection, it is interesting to observe that the solubility of iodine in KI or HI is greatly diminished by the presence of $MgSO_4$.

HCl does not produce an increase in the amount of iodine liberated in the following cases:

(*a*) $K_2S_2O_8$ + KI, (*b*) $K_2S_2O_8$ + HI, (*c*) Ferric nitrate + KI.

In the following cases, HCl markedly increases the amount of iodine.

(*a*) H_2O_2 + KI, (*b*) H_2O_2 + HI, (*c*) HIO_3 + KI, (*d*) HIO_3 + HI,
(*e*) $H_2Cr_2O_7$ + HI, (*f*) $K_3Fe(CN)_6$ + KI, (*g*) HNO_2 + KI.

The last two reactions have temperature coefficients greater than unity even in presence of HCl.

The displacement of iodine even in very dilute solutions of KI by chlorine or by bromine is very rapid and almost instantaneous even at 0°. The temperature coefficient is practically unity.

The liberation of iodine from $KI,KMnO_4$ and H_2SO_4 is almost instantaneous even at 0°. The temperature coefficient is practically unity.

The liberation of iodine from $KI + KClO_3$ and H_2SO_4 or HCl, $KI + KBrO_3 + H_2SO_4$ or HCl has a measurable velocity and temperature has a marked influence on these reactions, but $KIO_3 + KI + HCl$ or H_2SO_4 liberates iodine at once and no effect of temperature could be detected.

The reactions between iodine and sodium thiosulphate, and iodine and sulphite are extremely rapid even at 0°. There is hardly any possibility of measuring the velocity of the reactions concerned.

In a foregoing paper (Jour. Chem. Soc. 1917, **111**, 707) I have shown that the oxidation of oxalic acid by chromic acid has the temperature coefficient 1.95, but in presence of Na_2SO_4, $MgSO_4$ and NaF, the temperature coefficient goes down to 1.63, 1.61 and 1.59 respectively. The explanation seems to me to be the same as in the Skrabal reactions. The reaction between oxalic acid and chromic acid is accelerated by $H^{\cdot}$ ions. Sodium sulphate, sodium fluoride etc. are hydrolysed to a much greater extent at a higher temperature than at the ordinary temperature and the OH' ions produced at the high temperature neutralize the $H^{\cdot}$ ions existing in the solution and hence the actual velocity of the reaction does not rise so high as it should have been if there were no increased hydrolysis and consequent generation of OH' ions at these temperatures. In other words, the effect of temperature is partly neutralized.

Exactly similar results were obtained by Harcourt and Esson (Phil. Trans. **186** A, 1895, 817) in the reaction between HI and H_2O_2. They obtained the value 1.4 for the temperature coefficient of the above reaction in presence of $NaHCO_3$, whilst in presence of HCl, H_2SO_4 etc., the temperature coefficient is 2.1; Harcourt and Esson could not account for this discrepancy. The explanation is the same as that of the Skrabal reaction. Sodium bicarbonate is alkaline in aqueous solution and it produces OH' ions in a greater quantity at higher temperatures than at ordinary temperatures and these OH' ions react on the iodine which is produced, forming iodide and iodate. Hence at the higher temperatures less iodine seems to be formed. In other words, the effect of temperature is partly neutralized and we get the small value (1.4) for the temperature coefficient of the reaction between HI and H_2O_2 in presence of $NaHCO_3$.

On the other hand, SKRABAL got the value 45 for the temperature coefficient of the reaction $3I_2 + 6OH' = 5I' + IO'_3 + 3H_2O$, in presence of sodium carbonate and bicarbonate. Here the hydrolysis of the salts produce OH′ ions which are active in the change and helps the effect of temperature. The increase of temperature increases the hydrolysis and hence the OH′ ions are also increased and the velocity of the reaction is increased due to this effect in addition to the usual effect of temperature increasing the velocity of the reaction. In other words, the effect of temperature is intensified.

Hence the abnormally large effect of temperature is explained.

Summary:

a. A dilute solution of iodic acid and potassium iodide react very rapidly even at 0°. The temperature coefficient cannot be exactly determined and is probably equal to unity.

b. In presence of sodium and magnesium sulphates slightly less iodine is liberated from iodic acid and potassium iodide at higher than at lower temperatures. The explanation is that at higher temperatures more OH′ ions are produced due to increased hydrolysis of sodium or magnesium sulphate and these OH′ ions react on the iodine which is forming and thus regenerate iodide and iodate. Hence in presence of Na_2SO_4, the temperature effect is partly counter-acted.

c. Manganese sulphate, potassium sulphate, alum etc. have no action, whilst in presence of ammonium and zinc sulphates, the temperature coefficient of the reaction between iodic acid and potassium iodide becomes greater than unity. Solutions of zinc and ammonium sulphates produce more H˙ ions at higher temperatures and these ions are very active in liberating iodine from iodic acid and potassium iodide.

d. A similar explanation is applicable to the small temperature coefficients obtained in the reactions between 1. iodic acid and potassium iodide in presence of sodium acetate, sodium phosphate, potassium fluoride etc., 2. chromic acid and oxalic acid in presence of sodium sulphate, magnesium sulphate, sodium fluoride etc., 3. hydrogen peroxide and hydrogen iodide in presence of sodium bicarbonate.

e. Abnormally large values of temperature coefficient for the reaction $3I_2 + 6OH' = 5I' + IO'_3 + 3H_2O$, in presence of Na_2CO_3 and $NaHCO_3$, are also due to hydrolysis of the carbonates.

f. The following reactions have measurable velocities and their

temperature coefficients are greater than unity even in presence of $MgSO_4$ or HCl:

(1) $KI + K_2S_2O_8$, (2) $KI + K_3Fe(CN)_6$, (3) $KI + HNO_2$.

On the other hand, the following reactions are almost instantaneous even at 0° and their temperature coefficients are about unity:

(1) $KI + H_2SO_4 + KMnO_4$ (2) $KI + Br$, (3) $KI + Cl$.

Chemical Laboratory, Muir Central College, Allahabad, India.

Kryo-Biologie. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene mededeeling van den Heer P. GILBERT RAHM te Maria Laach, over: „*Einwirkung sehr niederer Temperaturen auf die Moosfauna*". (Versuche im physikalischem Laboratorium der Universität Leiden und der kryologisch-biologischen Versuchsstation der Niederländischen Kälte-Vereins, Leiden Communications Suppl. N°. 43*b*).

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

Als „Moosfauna" im allgemeinen bezeichne ich nach dem Vorschlag FR. HEINIS (cf. „Systematik und Biologie der moosbewohnenden Rhizopoden, Rotatorien und Tardigraden der Umgebung von Basel mit Berücksichtigung der übrigen Schweiz". Archiv für Hydrobiologie und Planktonkunde. Stuttgart 1910. Bd. V. Heft 2, p. 91) „die Gesamtheit der in den Moos = resp. Flechtenrasen vorkommenden Tiere". Diese Definition umfasst sowohl die:

I. *Bryophilen Formen*, d.h. solche, die in den Moosrasen „ihre Existenzbedingung" finden. [cf. RICHTERS, F. Die Fauna der Moosrasen des Gaussberges und einiger südlicher Inseln". Deutsche Südpolar-Expedition 1901—1903, Berlin 1907. (Zoologie), p. 292]. Ihre Nahrung können die lebende Moospflanze, organischer Detritus, und andere Tiere sein. [cf. HEINIS l.c.p. 91].

II. *Bryoxene Formen*, d. h. solche, die entweder nur während einer bestimmten Entwicklungsperiode im Moose leben oder zufällig im Moosrasen gefunden werden.

Zur *ersten* Gruppe gehören Protozoen, Rotatorien, Nematoden, Tardigraden und Gamasiden.

Zur *zweiten* Gruppe rechnet HEINIS [l.c. p. 91]. Larven von Lauf- und Rüsselkäfern, Fliegenlarven, Myriopoden, Arachniden, Mollusken etc.

In der folgenden Arbeit findet der Hauptsache nach nur die Moosfauna im engeren Sinne Berücksichtigung, vor allem die Gruppen der *Tardigraden* (Bärtierchen), *Nematoden* (Fadenwürmer), und *Rotatorien* (Rädertierchen).

Da diese Tiere in grossen Mengen die Moosrasen der kalten Zone bewohnen, müssen sie auch eine grosse Anpassungsfähigkeit an niedere Temperaturen besitzen.

Prof. F. RICHTERS, der berühmte Altmeister der Moosfauna, untersuchte Bryum-Rasen vom Gaussberg, in dem —41° C. gemessen wurde. [RICHTERS l.c.]. Ueberhaupt scheinen die Moose der kälteren Gegenden das Dorado der Moosfauna zu sein, während die Tropen nach den Angaben MURRAYS und RICHTERS relativ arm an Moosbewohnern im engeren Sinne sind.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend stellte ich im Oktober und November 1919 im chemischen und physikalischen Institut der Bonner Universität mit Tieren der oben genannten Moosfauna einige Temperaturversuche an. Eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse ist in den Sitzungsberichten der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn 1920 (1919) p. 21—23 veröffentlicht.

Es zeigte sich, dass verschiedene Gruppen von Tieren, die die Fähigkeit besitzen, mit den Moosen auszutrocknen und nach dem Anfeuchten des Mooses wiederaufzuleben, im trockenen sogenannten asphyktischen Zustand sehr tiefe Temperaturen ertragen können. Temperaturen von *c.* — 183° *C.*, die mittels flüssiger Luft erzielt wurden, überstanden die Versuchstiere, Tardigraden, Rotatorien und verschiedene Arten von Nematoden *schadlos* 26 *Stunden lang.*

Da ich in Bonn keine Gelegenheit hatte, noch tiefere Temperaturen herzustellen, wandte ich mich an den Leiter des Kryogenen Instituts, Herrn Prof. Dr. KAMERLINGH ONNES, mit der Bitte, mir zu gestatten, in seinem weltberühmten Institut einige Versuche mit flüssigem Wasserstoff, wenn möglich auch mit flüssigem Helium, ausführen zu dürfen. Herr Prof. Dr. KAMERLINGH ONNES schrieb mir gütigst zurück, dass mir so viel flüssiger Wasserstoff zur Verfügung stehe, als ich zu meinen Versuchen benötige. Ich erhielt sogar die freundliche Zusage, mit flüssigem Helium arbeiten zu dürfen, falls nach den Versuchen mit flüssigem Wasserstoff sich dazu die Notwendigkeit ergebe.

I. Versuch mit flüssiger Luft.

Da ich in Leiden auch über beliebige Mengen flüssiger Luft verfügen konnte, bat ich den Conservator des kryogenen Instituts, Herrn Dr. CROMMELIN, zunächst einen Versuch mit flüssiger Luft der sich auf einige Tage erstrecken sollte, ausführen zu dürfen. Die Moosproben wurden in leichtes Papier eingehüllt in einem Gazebeutel, der mittels einer Bleikugel beschwert war, sofort in ein bereitstehendes Bad von flüssiger Luft getaucht. Die Tiere befanden sich in den lufttrockenen Moosen im asphyktischen Zustand. *Der Versuch dauerte* 125 *Stunden.*

Nach dem Wiederanfeuchten bald nach dem Versuch erwachten fast sämtliche Tiere in verhältnismässig kurzer Zeit. Die folgende Tabelle soll eine Uebersicht über die Versuchstiere, die Dauer ihres Trockenschlafes und die Zeit ihres Wiederaufwachens geben.

TABELLE I.

Bad in flüssiger Luft.

Dauer: 125 Stunden.

Zeit: 11. II. 1920 bis 16. II. 1920.

Temperatur: c. —190° C.

Moosart.	Wiedererwachen.			
	Trockenschlaf.	Rotatorien.	Tardigraden.	Nematoden.
A. Grimmia spec. von einem Strohdach aus Amerongen.	8 Tage.	Adineta barbata Jans. Die I. in 16 Min.	Macrobiotus Hufelandi C. Schultze. Der I in 19 Minuten, andere in 32 M.	Plectus rhizophilus De Man. Der I. juv. in 33 Minuten, sen. in 46 Minuten.
B. Tortula ruralis Ehrh. von einer Gartenmauer aus Honnef a. Rhein.	16 Tage.	Callidina constricta Duj. Die I. in 5 Minuten.		
C. Racomitrium spec. bei Scheveningen an den Dünen.	5 Tage.	Gen.? spec.? Das I. in c. 20 Minuten.		Plectus parietinus Bast. Der I. in 70 Minuten.

Wurden die Moosproben nach dem Kälteexperiment längere Zeit aufbewahrt, ehe sie angefeuchtet wurden, so erwachten die Tiere gewöhnlich etwas später. Eine allgemeine für alle Tierarten gültige Regel liess sich mit Sicherheit noch nicht ableiten. 3 Monate später wurde z. *B* eine Probe von *A* untersucht und nach dem Wiederanfeuchten erwachte ein Rotator fast genau zu der in Tabelle I angegebenen Zeit, eher noch ein bis 2 Minuten früher. Die Rotatorien von *C* brauchten indes volle 2 Stunden, bis sie nach dreimonatlichem Trockenschlaf ihre volle Lebenstätigkeit wiedererlangten. 2 Echinicus-Arten (gepanzerte Tardigraden) erwachten nach mehr als dreimonatlichem Trockenschlaf in *B* nicht mehr. Die Kälte hierfür verantwortlich zu machen, scheint mehr als fraglich, wie aus spätern Versuchen klar hervorgeht. Eher könnte man sagen, dass diese Tiere schon vorher durch das Austrocknen geschädigt wurden. Denn die Fähigkeit der Versuchstiere wiederholt auszutrocknen und wiederaufzuwachen, ist nicht unbegrenzt.

II. Versuch mit flüssigem Wasserstoff.

TABELLE II.

Dauer: 26 Stunden.
Zeit: 11. II. bis 12. II. 1920.
Temperatur: —253° C.

Moose.	Trockenschlaf.	Wiedererwachen.		
		Rotatorien.	Tardigraden.	Nematoden.
A. wie I.	8 Tage.	Adineta barbata Jans. in c. 15-20 Minuten.	Macrobiotus Hufelandi C. Schultze in 20 Minuten.	Plectus rhizophilus De Man 25 Minuten.
B. wie I.	16 Tage.	Callidina constricta Duj. in 3 Minuten.		
C. wie I.	5 Tage.	In 18 Minuten ein Rotifer spec.? Callidina brauchten mehr.		

Vergleicht man Tabelle I und II, so findet man kaum bedeutende Unterschiede. Als Regel scheint festzustehen, dass Rotatorien am schnellsten nach dem Wiederanfeuchten zum Leben zurückkehren; es folgen die Tardigraden und zuletzt die Nematoden. Ferner scheint ein ganz kurzer Trockenschlaf mit folgendem kalten Bad auf das Wiedererwachen verzögernd zu wirken. Man vergleiche z. *B* das über Rotatorien Gesagte in Tabelle I und II.

III. *Versuch mit flüssigem Helium.*

Da Herr Prof. Dr. Kamerlingh Onnes durch Krankheit verhindert war, während meines Aufenthaltes in Leiden flüssiges Helium herzustellen, bat ich Herrn Conservator Dr. Crommelin, die Versuche für mich auszuführen, sobald sich eine Gelegenheit dazu biete. Herr Prof. Dr. Kamerlingh Onnes besass die grosse Freundlichheit, die Versuche selber zu leiten. Die Moose wurden dann sofort nach dem kalten Bad mir zur Untersuchung nach Bonn gesandt.

Dem Briefe des Herrn Prof. Dr. Kamerlingh Onnes vom 16. III. 1920 entnehme ich folgendes:

„Am 10. III 1920 12ᵘ wurden die Moose lufttrocken in den Helium-Apparat gebracht. Dieser wurde dann — was für die Heliumverflüssigung nötig ist — luftleer gepumpt, blieb 24 Stunden luftleer bei gewöhnlicher Temperatur stehen, wurde sodann mit Heliumgas

bei gewohnlicher Temperatur gefüllt und langsam 2 Grad pro Minute abgekühlt bis —150° C. Es wurde sodann das Präparat mit flüssigem Helium überschüttet und blieb in demselben von 1ᵘ bis 8ᵘ, 45ᵐ. Während 2 Stunden wurde die Temperatur auf 1°,22 K erniedrigt".

TABELLE III.

Dauer: 7¾ Stunden vgl. auch das im vorigen Abschnitt Gesagte.
Zeit: 10. III — 11. III im Vacuum, 11. III 12^h — $8^h, 45^m$ im flüssigen Helium.
Temperatur: — 269° C bis — 271,88° C.

1. Für Moos B. erste Untersuchung 21. III. 1920.

Tag der Untersuchung.	Wiedererwachen.		
	Rotatorien.	Tardigraden.	Bemerkungen.
21. III. 1920.	1. Callidina nach 91 Minuten.	Echiniscus trifilis (neue Art) sen. nach 23 Min. juv. „ 31 „	Nach 8 Stunden waren fast alle Tiere munter.
24. III. 1920.	Alle lebend.	Fast alle lebend.	
26. III. 1920.	„ „	7 noch lebend.	
28. III. 1920.	„ „	Einige schlüpften aus den Eiern.	
7. IV. 1920.	„ „	Zahl d. lebenden Tiere nimmt ab.	
12. IV. 1920.	„ „	Nur einer lebend.	
14. IV. 1920.	Einige lebten.	Alle tot.	

2. Für Moos B zweite Untersuchung.
Am 28. IV. 1920. $10^h,45^m$ morgens eine neue Probe angefeuchtet.

Tag der Untersuchung.	Wiedererwachen.	
	Echiniscus trifilis n. spec.	Milnesium tardigradum Doy.
28. IV. 1920. $10^h,45^m$.	In einer Stunde war der erste alte Echiniscus erwacht; es folgte einer von mittlerer Grösse.	Nach einer Stunde und 13 Minuten erste Bewegung.
29. IV. 10^h morgens	Noch ein alter munter.	sehr lebhaft.
29. IV. $2^h,5^m$.	Auch ein junger erwacht.	„ „
29. IV. 5^h.	Viele alte und junge erwacht.	„ „

Dann alles von neuem eintrocknen lassen.

Tag der Untersuchung	Wiedererwachen.	
	Echiniscus trifilis non spec.	Milnesium tardigradum.
4. V. 11h,2m morgens.	Bis 6. V. nichts mehr erwacht.	
6. V. 4h,47m.	Ein junger aus dem Ei geschlüpft	
7. V.	Alles tot.	Alles tot.

Parallelversuch, um zu prüfen, ob die Schäden beim Wiedereintrocknen nach dem kalten Bad auf das Kälteexperiment zurückzuführen sind oder ob die Versuchstiere überhaupt ein mehrmaliges Wiedereintrocknen nicht schadlos ertragen können.

Denis Lance schreibt in seinen Thèses présentées à la Faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur des sciences naturelles, Paris 1896, „9 bis 14 mal kann man die Tiere — gemeint sind Bärentierchen (Macrobioten) — austrocknen lassen. Die Zeit, die zur Wiederaufnahme der Lebenstätigkeit erforderlich ist, wächst mit der Zahl der Austrocknungen". Ich muss gestehen, dass es mir noch nie gelang, Tardigraden spec. Echiniscus-Arten öfters als 5 bis 7 Mal auszutrocknen. Freilich hängt es auch ganz von dem Grad und der Dauer der Austrocknung ab. Macrobioten ertragen mehr als die gepanzerten Echiniscus-Arten. Rotatorien sind am widerstandsfähigsten.

TABELLE IV.

Parallelversuch mit Moos B, das nur lufttrocken seit 23. I. 1920 aufbewahrt worden war.

Tag der Untersuchung und Stunde d. Anfeuchten.	Wiedererwachen.		
	Callidina spec.?	Milnesium tardigradum Doy.	Echiniscus trifilis.
7. V. 1920. 4h,49m.	5h, 14m, also in 25 Minut.		5h, 14m, also in 25 Minut.
7. V. 1920. 5h,41m.	6h, 00m, also in 19 Minut.	6h, 13m, also in 32 Minut.	6h, 03m, also in 22 Minut.
Dann alles eintrocknen lassen. 8. V. 8h abends trocken.			
10. V. 1920. 9,24h morgens.	9,50h 3 junge schon sehr munter.	c. 1/4 11h erwacht.	Nur einer 9,50h mittelgross, alle andern schienen tot.

Alles eintrocknen lassen. 11. V. 11h abends alles trocken.

14. V. 1920. 8,35h morgens.	9,13h d. erste. 9,15h 3 Stück.	c. 9,30h.	10h abends war einer aus dem Ei geschlüpft.
15. V. 1920. 8h morgens.	Alle lebhaft.	Sehr munter.	Auch ein grösserer erwacht, ein alter bewegte sich auf Anstoss mit der Pinzette.

Alles eintrocknen lassen. 16. V. mittags trocken.

17. V. 1920. 8,35h morgens.	8,50h eine erwacht.	tot?	Alle scheinen tot.
11,30h morgens.	sehr lebhaft.	tot.	Ein erwachsener u. ein kleiner munter.

Vergleicht man die Tabellen mit einander, so wird man wohl sagen dürfen, dass das kalte Bad (besser wohl die durch das kalte Bad bewirkte Austrocknung) den Echiniscus Arten schädlich war. [1])

TABELLE V.

Bad in flüssigem Helium mit Moosart C. Allgemeine Bemerkungen s. p. 4—5.

Erste Untersuchung.

Dauer: s. p. 4—5.
Zeit: s. p. 4—5.
Temperatur: s. p. 4—5.

Tag d. Untersuchung u. d. Anfeuchtens.	Rotator Callidina.	Macrobiotus Hufelandi.	Nematode Plectus parietinus.
21. III. 10,52h morgens.	11,37h, also in 45 M.		11,49h, also in 58 Min. 12,10h ein junger.
22. III. 10,30h morgens.	sehr munter.	Einer war sehr munter. Zeit des Erwachens unbestimmt.	lebhaft.

In der folgenden Tabelle soll die Lebensdauer der einzelnen in Tabelle V angeführten Tiere verfolgt werden.

---

[1]) *Anmerkung*: Nach der Drucklegung wurden die in Tabelle IV mitgeteilten Untersuchungen fortgesetzt. Ich liefs die Tiere noch zweimal eintrocknen. Echiniscen und Rotatorien erwachten auch noch nach der letzten, also 6. Austrocknungspeririode. Die Versuche werden fortgesetzt.

Datum.	Callidina.	Macrobiotus.	Plectus.	Bemerkungen.
22. III.	Sehr munter 2 Stück.	Stirbt am Abend.	2 kleine sehr munter.	Es erscheinen in der Schale Protozoen von ganz charakteristischer Gestalt, die ich noch in keinem anderen Moos beobachtet habe. Die Tiere schwimmen lebhaft umher. Ob nachträglich hineingekommen, bleibt fraglich. Mehrere Milben erwachten nicht mehr.
24. III.	» »		» »	
26. III.	» »		» »	
			Ein grosser Plectus parietinus Bast 0,6 mm gross doch nicht geschlechtsreif. Bei der Bestimmung leider getötet.	
27. III.	» »		Ein junger noch lebhaft.	
28. III.	» »			
29. III.			2 Nematoden sehr lebendig.	Viele Protozoen.
30. III.	Einer lebhaft.			
1—8. IV.	» »		» »	Protozoen nehmen ab.
9. IV.	Einer sehr lebhaft.	Sehr munter, wohl geschlüpft.	2 sehr lebhaft.	Junger Echiniscus trifilis lebte, starb aber bald nach Überführung in ein bes. Gefäss.
10. IV.	» »	lebt noch	Nur einer noch lebhaft.	
11. IV.			Nur auf Anstoss hin erfolgt Bewegung des Kopfes.	
14. IV.	tot.	tot.	tot.	Viele kleine Protozoen.

Zweite Untersuchung v. Moos C.

Tag der Untersuchung bzw. des Anfeuchtens.	Rotatorien. Callidina. spec.?	Nematoden. Plectus parietinus.	Bemerkungen.
29. IV. 8,45h morgens.	9,53h eine sehr lebhaft.	Nur ein junger erwachte, 2 alte erwachten bis 10 V. nicht mehr.	Die merkwürdigen Protozoen s. oben erscheinen wieder, also doch nicht nachträglich hineingekommen.

IV. *Versuch. Bad in flüssigem Wasserstoff.*

Um zu erproben, wie die Versuchstiere sich verhalten, wenn sie bereits völlig aus dem Trockenschlaf erwacht und im Wasser ihre Bewegungen aufgenommen haben und dann einfrieren, wurden bereits im verflossenen Winter im Bonner Chemischen Institut Versuche angestellt. Eine Kältemischung von —81° C., die mehrere Stunden einwirkte, überstanden bei langsamen Einfrieren fast alle Versuchstiere. Selbst die Kälte der flüssigen Luft schadete den Tieren nicht, wenn man die Kälte anfangs langsam einwirken liess [1]). Liess man aber das Wasser, in dem sich die Tiere befanden, plötzlich einfrieren, so war der Prozentsatz der Tiere, die nach dem Auftauen lebten, sehr gering. Im Kryogenen Institut der Universität Leiden wurden folgende Versuche ausgeführt:

1. 2 Moosproben „wurden zuerst *angefeuchtet* und eingewickelt in ein bischen Gaze und am 20. März 1920 von 10^h bis 4^h *langsam abgekühlt* im Dampf von flüssiger Luft. Sodann wurden sie eingetaucht in flüssige Luft. Sie blieben darin bis 12. März 11^h. (Also c. 2 Tage). Dann wurden sie aus der flüssigen Luft genommen und gleich in flüssigen Wasserstoff gebracht und blieben hierin bis 13. März 10^h, 30^m. (Also c. 1 Tag). Darnach sind sie schnell auf gewöhnliche Temperatur gekommen". Aus dem Brief des Herrn Prof. Dr. KAMERLINGH ONNES an mich vom 16. III. 1920.

Herrn Dr. DROOGLEVER FORTUYN hatte ich vor meiner Abreise aus Leiden gebeten, einen Teil dieser Proben nach dem Auftauen an Ort und Stelle zu untersuchen. Er hatte die grosse Freundlichkeit, mir über das Ergebnis am 13. III. 1920 zu berichten. „In der langsam abgekühlten Probe belebte sich schon nach 12 Minuten ein Nematode, welcher kräftige Bewegungen machte. Nach 20 Minuten belebte sich der erste Tardigrade, bald von vielen andern gefolgt".

Die Proben wurden mir dann lufttrocken zugesandt. Das Ergebnis der Untersuchung sei in folgender Tabelle mitgeteilt.

---

[1]) *Anmerkung:* Liess man die Tiere im Wasser nochmals einfrieren, so waren die meisten nach dem Auftauen tot. Also hatte das kalte Bad doch die Widerstandskraft geschädigt. Es überstanden nur Rotatorien. Es kam bei diesem Versuch nur die Kältemischung von — 81° C. zur Verwendung.

TABELLE VI.

Moosprobe A.

Dauer: 1 Tag in fl. Wasserstoff, 2 Tage fl. Luft.
Zeit: 10. III. 1920 bis 13 III. 1920.
Temperatur: — 253° C bzw. — 192° C.

Tag der Untersuchung.	Callidina russeola Zel.	Macrobiotus Hufelandi.	Milnesium tardigradum.	Plectus rhizophilus.	Bemerkungen.
24. III. 5,35h abends.	5,45h also in 10 Minuten mittelgross.	6,20h ziemlich lebhaft dunkel pigmentiert.	2 Stück noch schlafend.		
10,05h abends	sehr lebhaft schwimmend.	Einer am Erwachen, auch dunkel pigmentiert.	Einer bewegte sich auf Anstoss.	Noch schlafend.	
25. III. 9,45h morgens.	2—3 sehr lebhaft.	Nur einer noch lebhaft.	» »	2 junge lebhaft.	
27. III. 11,25h morgens.	» »	» »		Älterer erwacht.	
28. III.	» »	» »		sehr lebhaft.	
29. III. 8h morgens	» »	tot.	tot.	2 kleine lebhaft.	Protozoen treten auf.
10h abends.	» »	Ein kleiner, wohl geschlüpft.		» »	
30. III. 1h mittags.	» »	Ein alter nimmt die Bewegung wieder auf.		» »	
6h abends.	» »	Alter tot.		» »	
31. III.	» »			Dazu ein alter.	
1—7. IV.	» »			alle lebhaft	
7. IV. 3,15h mittags.	» »	Ein alter lebhaft.		» »	
8. IV.	» »	» » »			
9. IV. 9h morgens.	» »	Auch kleiner, wohl geschlüpft.			
10. IV. 9,15 abends.	» »	Der kleine sehr lebhaft.		alter sehr munter.	
11. IV.	» »	» »		» »	
12. IV.	» »	» »		» »	
14. IV.	» »	» »		» »	

Tag der Untersuchung.	Rotator.	Macrobioten.	Nematoden.	Bemerkungen.
26. IV.	mehrere sehr lebhaft.	3 kleine, wohl geschlüpft.	Der alte sehr munter.	
28. IV.	" "	3 sehr munter.	" "	
1.V.11,30h morgens.	" "	" "	Dazu noch 2 jüngere.	
3. V.	" "	" "	" "	
6. V.	" "		Nur einen lebhaft gesehen.	
8. V. 8,55h morgens.	" "	Einer sehr munter Macrob. echinogenitus Richters.	Einer lebhaft.	
9,40h morgens.	" "		3 ziemlich erwachsen, munter.	Eine lebende Milbe, wohl nachträglich hineingekommen oder geschlüpft??
10. V.	" "	ein erwachsener Hufelandi lebhaft.	Ein grosser bewegte sich nur auf Anstoss.	
12. V.	träge Bewegungungen auf Anstoss.	Ein Hufelandi mittelgross, dunkel, lebhaft,	Alle tot	
14. V.	Alles schien tot.			

Moosprobe A. 2. Untersuchung.

Tag der Untersuchung.	Rotator.	Macrobiotus.	Nematoden.
5. V. 5,40h abends.	9,40h 2 kleine sehr lebhaft, wohl lange vorher erwacht.	6,30h ein Hufelandi lebhaft.	9,40h. Einer bewegte sich ein wenig.
6. V. 8,30h morgens.	sehr lebhaft.	noch einer erwacht.	
7. V. 8h morgens.	schien alles tot.		

Moosprobe B. desselben Versuchs.

Datum des Anfeuchtens und der Untersuchung.	Rotatorien. Callidina.	Echiniscus trifilis non spec.	Bemerkungen.
24. III. 5,38h abends.	9,55h erste am Erwachen. 10h mehrere lebhaft.		

Datum der Untersuchung.	Rotatorien.	Echiniscus.	Bemerkungen.
25. III. 1920.	lebhaft.	alle tot.	
27. III. bis 30. III.	„		
31. III. 10h morgens.	„	Einer schlüpft aus dem Ei.	Viele Protozoen erscheinen.
1. IV. bis 14. IV.	„	starb bald.	
14 IV. 10,20h morgens.	„	Einer geschlüpft, 0,150 mm. gross.	Protozoen vermehren sich sehr stark.

Die Eier der Echinisci scheinen also bei weitem widerstandsfähiger zu sein wie die Tiere selbst. Es erwachte überhaupt kein erwachsener Echiniscus.

2. Ein *zweiter* Versuch wurde mit Moosproben gemacht, die *vorher angefeuchtet* und dann *plötzlich in flüssige Luft und in flüssigen Wasserstoff* getaucht wurden. Herr Prof. Dr. KAMERLINGH ONNES schrieb mir darüber am 13 III 1920: „Diese Probe wurde zuerst angefeuchtet und in Gaze eingewickelt und sodann 10 März 11h plötzlich in flüssige Luft gebracht und blieb darin bis 12 März 11h (also 2 volle Tage). Sodann wurde sie wie die vorige in flüssigen Wasserstoff getaucht und blieb darin bis 13 III. 10h,30" (also fast einen Tag.).

Herr Dr. DROOGLEEVER FORTUYN untersuchte auch von dieser Probe gleich nach dem Auftauen einen Teil und fand alles tot „wenigstens war nach 2 Stunden und 20 Minuten keine Bewegung sichtbar". Brief vom 13 III, 1920.

Der übrige Teil der Probe wurde mir dann lufttrocken zugesandt. Das Ergebnis einer genaueren und längeren Untersuchung sei in folgender Tabelle mitgeteilt: p. 511.

Von den Moosproben *waren A und B zusammengeschüttet worden.* In einem andern Gefäss derselben Probe, die auch am 24. III angefeuchtet war, bemerkte ich erst am 8. IV eine Adineta lebhaft umherschwimmend. Vielleicht war das Tier inzwischen geschlüpft. Es lebte noch am 6. V. An diesem Tage bemerkte ich noch einen Rotifer lebhaft umherschwimmend [1]).

Auf meine Anfrage hin teilte mir Herr Conservator Dr. CROMMELIN mit, dass die Moose 1 bis 1½ Stunden vor dem Kälte-experiment

[1]) *Anmerkung:* Rotatorien lebten noch am 25. IX. 1920. Aus den Eiern schlüpften viele Macrobioten.

angefeuchtet wurden. Es ist also wohl ausgeschlossen anzunehmen, dass sich Callidina russeola Zel. beim Einfrieren noch im asphyktischen Zustand befand. Am 27. V waren sehr viele Rotatorien und einige Macrobioten geschlüpft.

TABELLE VII.

Dauer: 3 Tage.
Zeit: 10. III. 1920 bis 13. III. 1920
Temperatur: – 253° C. bezw. — 192° C. s. vorher.

Datum der Untersuchung.	Rotatorien.	Bemerkungen.
24. III. 10,55h morgens.	Erst 4,55h eine grosse Callidina russeola Zel. am Erwachen.	Viele tote Echiniscen, Macrobioten, Rotatorien und Nematoden.
10,15h abends.	sehr lebhaft, sich ausstreckend und schwimmend.	
25. III. bis 15. IV.	Meist sehr lebhaft, nur abends in Ruhe.	
16. IV. 9h abends.	Bewegt sich nur auf Anstoss.	
25. IV.	Nur langsame träge Bewegungen.	
27. IV.	Bewegungen sehr träge.	
28. IV.	„ „ „	Das Tier war am Schlusse ziemlich abgemagert, obwohl ihm Detritus zur Verfügung stand.
29. IV.	reagiert kaum noch.	
1. V.	tot.	

Also ist kaum eine Schädigung durch das kalte Bad festzustellen. Die Tiere leben auch sonst nicht länger.

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.

I. Die Tiere der Moosrasen können im asphyktischen Zustand Temperaturen von — 271,8° C. mehrere Stunden ertragen. (Tardigraden, Nematoden und Rotatorien). Protozoen scheinen auch diese Temperaturen zu überstehen, bedürfen aber noch einer sorgfältigen Nachprüfung. Temperaturen von — 192° C. wurden 5 Tage lang schadlos ertragen. Auch die Eier dieser Tiere werden nicht geschädigt.

II. Ein ganz kurzer Trockenschlaf mit folgendem kalten Bad scheint auf das Wiedererwachen verzögernd zu wirken.

III. Am schnellsten erwachen Rotatorien; es folgen die Tardigraden und zuletzt die Nematoden.

IV. Durch die Kälte scheint die Fähigkeit der Echiniscus Arten, öftere Austrocknungsperioden zu überstehen, gemindert zu werden.

V. Lässt man die Tiere im wachen Zustand in Wasser langsam einfrieren, so ertragen die meisten die Temperatur — 253° C. 24 Stunden schadlos. Eine Ausnahme scheinen die Echiniscen zu machen.

VI. Lässt man die Tiere im wachen Zustand in Wasser plötzlich einfrieren, so sterben die meisten in extremer Kälte. Nur Rotatorien können schadlos überstehen und die Eier der Macrobioten.

VII. Handelt es sich in den ersten Fällen, wo die Tiere im asphyktischen Zustand die tiefen Temperaturen ertragen, nur um eine Schädigung der Kälte als Wasserentziehung, die dem Austrocknen gleichkommt, (s. PÜTTER, vergleichende Physiologie, Jena 1911, p. 385), so liegen die beiden zuletzt berichteten Fälle N°. V u. VI, doch wesentlich anders. Hier könnte auch noch eine „mechanische Zertrümmerung der Plasmastruktur" in Betracht kommen.

Wirkt die Kälte langsam ein, so wäre es vielleicht möglich daran zu denken, dass die Kälte als Reiz wirkt, (sowie die beginnende Austrocknung des Mooses) in den asphyktischen Zustand überzugehen. Bei Fall VI scheint indes diese Erklärung nicht zuzutreffen.

Zum Schluss habe ich allen Herrn vom Kryogenen Institut zu danken, die am Zustandekommen der Versuche mitwirkten. In erster Linie herzl. Dank dem Leiter des Instituts, Herrn Prof. Dr. KAMERLINGH ONNES, der meinen Arbeiten so grosses Interesse entgegenbrachte und mir so grosses Entgegenkommen bewies. Herzlichen Dank auch dem Herrn Conservator Dr. CROMMELIN, Herrn Dr. DROOGLEEVER FORTUYN, die mich mit Rat und Tat unterstützten, nicht zu vergessen Herr Mechaniker FLIM, der das Material bereitwilligst herstellte, und Herr Stud. DELHEZ, der mir beim Untersuchen half.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer W. E. DE MOL, getiteld: „*Over het optreden van heteroploide Hollandsche varieteiten van Hyacinthus orientalis L. en de chromosomengarnituur van deze plantensoort*".

(Mede aangeboden door den Heer BLAAUW).

I. *Onderzoekingen, betreffende het aantal chromosomen, voorkomende bij Hollandsche, Fransche en Italiaansche variëteiten en bastaarden tusschen Fransche en Hollandsche variëteiten.*

Reeds 12 jaren geleden viel het mij te Lisse, het middelpunt der Hollandsche bloembollenkultures, op, hoe verschillende variëteiten van *Hyacinthus orientalis L.* niet slechts in vormen, kleuren en physiologische eigenschappen, doch ook in de afmetingen der wortels, bollen, bladeren, bloemtrossen en bloemen ten zeerste verschilden.

Dit feit wekte nog in sterkere mate mijne belangstelling, toen ik eenige jaren achtereen een groep van zeer uiteenloopende hybriden gadesloeg, welke ontstaan waren door twee der hoogstgewaardeerde enkel-bloemige, witte hyacinthenvariëteiten, n.l. *La Grandesse* en *L'Innocence*, die beide een aanzienlijke grootte bereiken, met elkaar te kruisen. De ontstane hybriden hadden zeer verschillende afmetingen, van klein tot groot. Iets dergelijks viel te constateeren aan hybriden, voortgekomen uit de kruising tusschen de variëteiten *Bismarck* (enkel-bloemig blauw) met *L'Innocence*.

Deze waarnemingen brachten mij er toe, de vraag te uiten of hier niet *heteroploidie* in het spel zou kunnen zijn, vooropgesteld, dat dit verschijnsel in nauw verband kan staan met de grootte van kernen en cellen en met den geheelen habitus der plant. De vele literatuuropgaven, welke in de laatste decennien verschenen zijn, getuigende van een variatie in het aantal chromosomen, versterkten mij in de meening, dat bij bovengenoemde bastaardeeringsprocessen versmeltingen opgetreden waren tusschen generatieve cellen met een ander aantal chromosomen dan het normale haploide, hetgeen indirect waar te nemen zou zijn door het aantal chromosomen te bepalen in de somatische cellen der ontstane hybriden.

Doch niet slechts langs den weg der *bevruchting* veronderstelde ik, dat heteroploide varieteiten ontstaan zouden.

Na kennis genomen te hebben van onderzoekingen van WINKLER

(1916), NĚMEC (1905), en andere baanbrekende cytologen kwam het mij niet meer onwaarschijnlijk voor, dat ook langs den weg der *vegetatieve vermeerdering* in de kulturen van *Hyacinthus orientalis* knopvariaties zouden kunnen ontstaan, welker cellen *minder* of *meer* chromosomen bezaten dan de varieteit, waaruit zij ontstaan waren.

Tot de eerste onderstelling, n.l. knopvariaties met minder chromosomen dan de moedervarieteit, werd ik geleid door hetgeen ik waargenomen had bij *Hyacinthus orientalis var. Grand Maître.* Jaren achtereen observeerde ik de jonge bolletjes, welke na „*hollen*" en „*kruisen of snijden*" ontstaan waren [1]).

Vele bolletjes, die zich aan denzelfden moederbol gevormd hadden, bleken zeer verschillende afmetingen te bezitten en deze verschillen bleven na 4, 5, 6 of 7 jaren nog gehandhaafd. Het is bekend, dat na dezen leeftijd de bollen van de varieteit *Grand Maître* volwassen kunnen zijn, een omtrek van 23 c.M. en meer bereiken kunnen en bij langer doorkweeken langs natuurlijken weg jonge klisters zouden gaan ontwikkelen.

Wat er na zoovele jaren met de bollen geschiedt, *welke niet de normale grootte bereikt hebben*, is niet volkomen bekend. Deze klein gebleven bollen worden weer gevoegd bij de kleine, die jonger in leeftijd zijn. De kweekers sorteeren de bollen van een en dezelfde varieteit niet naar den *ouderdom*, doch naar hunne *maat*, d. i. naar den *omtrek*, dien zij bereikt hebben.

Dikwijls zijn die oudere, klein gebleven bollen nog te herkennen aan hunne zeer groote, volumineuse wortelkransen. Het kan zijn, dat zij ook langs natuurlijken weg klisters gaan vormen of dat zij langzaam nog in omvang blijven toenemen. Ook vermoedt men wel, dat zij een al te geringen weerstand bezitten tegen ziekten, die de wortelkransen aantasten, zoodat zij dan te gronde gaan. Dit alles moet evenwel nog grondig door mij onderzocht worden.

Ik stelde mij nu in de eerste plaats tot taak, een reeks van *Grand Maître*-bollen, welke 3 jaren oud waren en zich door het toebrengen van kruissneden aan een moederbol gevormd hadden, cytologisch te onderzoeken. Het aantal bollen bedroeg 10. De kleinste had een omtrek van 8 c.M. en een gewicht van 18 gram, terwijl

---

[1]) Door het z.g. „*hollen*" en „*kruisen of snijden*" worden verreweg de meeste hyacinthenvarieteiten tegenwoordig tot snelle vegetatieve vermeerdering gedwongen. Het eerste geschiedt, door de bolschijf nauwkeurig te verwijderen. Op de verwondingsplaatsen ontstaan de jonge bolletjes. Van „*kruisen of snijden*" spreekt men wanneer men eenige diametrale sneden aan de onderzijde van den bol toebrengt. Deze sneden trekken bij het drogen open tot gleuven en in deze gleuven ziet men na eenigen tijd de jonge knoppen te voorschijn komen.

de grootste 22 cM. in omvang groot was en 150 gram woog. Deze 10 bollen werden op glazen met water gezet, zoodat zich na eenigen tijd worteltjes ontwikkeld hadden, die gefixeerd, in paraffine overgebracht, gekleurd en gesneden werden.

Gaan wij in de literatuur na, welke oorzaken aangegeven worden, die het varieeren der aantallen chromosomen in de hand kunnen werken, dan blijkt het geenszins onmogelijk, dat *eenige* dezer oorzaken zouden kunnen bijdragen tot de vorming van door regeneratie ontstaande *heteroploide* adventiefknoppen bij *Hyacinthus orientalis*. Deze naaste oorzaken zijn:

1o. Het toebrengen van *verwondingen*, tengevolge waarvan talrijke nieuwe adventiefknoppen ontstaan. Aan dezen factor kent WINKLER (1916) de grootste waarde toe, in verband met het langs vegetatieven weg ontstaan zijner tetraploide vormen na enting van *Solanum lycopersicum* met *Solanum nigrum*. Dat het veroorzaken van verwondingen ook bij de hyacinth een rol zou kunnen spelen, behoeft zeker niet nader betoogd te worden, vooral niet, wanneer nog verwezen wordt naar de waarnemingen van MIEHE (1901) en STRASBURGER (1910), welke onderzoekers bij *Hyacinthus orientalis* na verwonding meerdere kernen in de blad epidermiscellen vonden, benevens die van CARL MÜLLER (1905), die meerkernige cellen in de bolschubben van hyacinthen waarnam.

2°. Het toedienen van *abnormale temperaturen*. Uit de proeven van SCHRAMMEN (1902), NĚMEC (1905) en anderen is gebleken, dat deze temperaturen van invloed kunnen zijn op het totstandkomen van kernen met *minder* of *meer* chromosomen dan het normale aantal. De geholde en gesneden hyacinthenbollen worden aan een vochtige warmte blootgesteld, die wel tot 80° F. opgevoerd wordt.

3°. *Intensieve voeding*. Deze oorzaak nam GUIGNARD (1884, 1891) reeds in 1891 aan ter verklaring van het ontstaan der overtallige lengtesplitsingen in de onderste kernen van den embryozak van verschillende *Lilium*-species en hij werd hierin gevolgd door Miss SARGANT (1896), ROSENBERG (1904) en andere onderzoekers.

Het spreekt van zelf, dat de zich vormende jonge bolletjes in den gerijpten moederbol een uitstekenden voedingsbodem vinden.

Mijne uitgebreide cytologische onderzoekingen, verricht aan de hyacinthen-varieteit *Grand Maître*, welke uit verschillende gronden den voorrang verdiende boven andere varieteiten tot dit doel onderzocht te worden, brachten evenwel aan het licht:

a. dat in de cellen der wortels van alle 10 bollen, hoe zeer deze ook verschilden in afmetingen, steeds hetzelfde aantal chromosomen

voorkwam, n.l. 24. Deze 24 chromosomen waren steeds in 12 *paren* in de kernplaat aanwezig;

b. dat dit aantal *zeer konstant* was en niet varieerde, noch in de cellen van een en hetzelfde worteltje, noch in die van verschillende wortels van een en denzelfden bol, noch in die der wortels van verschillende bollen;

c. dat, waar verschijnselen optraden, die men wellicht voor een variatie in het aantal chromosomen zou kunnen houden. deze steeds toe te schrijven waren aan storingen, veroorzaakt door *mechanische of chemische invloeden;*

d. dat deze storingen het ook waren, die het aanzijn gaven aan lichaampjes, welke groote overeenstemming vertoonden met de „*satellieten*", door NAWASCHIN (1912) en TSCHERNOYAROW (1914) beschreven.

De jaren lang konstant blijvende verschillen in grootte zijn derhalve naar alle waarschijnlijkheid aan *physiologische* en *niet* aan *cytologische* oorzaken toe te schrijven. Hieruit volgt, dat de bovenvermelde factoren (*verwonding, verwarming, intensieve voeding*) in dit bepaalde geval *geen* overwegende rol spelen bij de vorming van heteroploide kernen en cellen. welke nieuwe adventiefknoppen kunnen doen ontstaan.

Nog meer voor de hand lag het, bij 2 *knopvariaties* van *Grand Maître*, n.l. *Generaal de Wet* en *Grand Maître gigantea*, respectievelijk in *kleur* en in *vormen en afmetingen* van de moedervarieteit konstant afwijkende, onderscheiden te vermoeden in de chromosomengarnituur, in vergelijking met die van *Grand Maître.*

Alle organen van de knopvariatie: *Generaal de Wet* hebben uiterlijk dezelfde afmetingen en dezelfde vormen als die van *Grand Maître.* Het verschil vertoont zich slechts in de *bloemkleur*, welke van *Grand Maître* porselein-blauw, van *Generaal de Wet* lichtrose is.

Grand Maître gigantea onderscheidt zich in de *afmetingen* en den *vorm* der bollen, bladeren, bloemstengels, bloemsteeltjes, bloemen en antheren ten zeerste van de gewone varieteit *Grand Maître.* Al deze organen zijn bij *Grand Maître gigantea* veel grooter, zoodat het vermoeden voor de hand lag, dat hier meer of grootere chromosomen dan bij *Grand Matîre* aangetroffen zouden worden.

Tot de keuze dezer 2 knopvariaties werd ik geleid door de waarneming, dat bij eenige hyacinthenvarieteiten, b.v. *Lord Balfour* of *King of the Blues* knopvariaties in de kleur voorkomen, welke *tegelijkertijd* in vormen en afmetingen van de moedervarieteit verschillen, zoodat het niet onaannemelijk schijnt, dat hier een correlatief verband bestaat tusschen het varieeren in *kleur* en het varieeren in *vorm*, Indien deze onder-

scheiden met de moedervarieteit in de chromosomengarnituur tot uiting kwam, zoo zou niet te beslissen zijn, in hoeverre de wijziging in kleur en in hoeverre de verandering der vormen ieder voor zich hiermede in samenhang stonden. Vandaar, dat ik 2 knopvariaties uitzocht, beide afkomstig van dezelfde moedervarieteit en van deze verschillend òf in *kleur* òf in *vorm*.

Doch ook hier ontdekte ik, evenmin als bij de eerste onderzoekingen, onderscheiden in de chromosomengarnituur, noch in het aantal, noch in de vormen en de afmetingen der chromosomen. Nemen wij echter aan, dat de chromosomen verreweg de voornaamste, zoo niet de eenige dragers der erfelijke eigenschappen zijn, dan is het niet onwaarschijnlijk, dat hier bij de knopvariaties *Generaal de Wet* en *Grand Maître gigantea onderscheiden in de innerlijke structuur der* chromosomen opgetreden zijn, die thans nog buiten onze waarneming vallen en de oorzaak zijn van deze met zekerheid steeds konstant zich herhalende afwijkingen,

Het zou voor de hand gelegen hebben, na deze waarnemingen de hybriden, voortkomende uit de reeds genoemde kruisingen: *La Grandesse* × *L' Innocence* en *Bismarck* × *L'Innocence* te onderzoeken. Hier zij evenwel opgemerkt, dat deze hybriden in het leven geroepen waren met het doel, nieuwe varieteiten van groote waarde te verkrijgen, zoodat zij eerst dan voor onderzoekingsobject in aanmerking kunnen komen, wanneer zij zich in behoorlijk aantal vegetatief vermenigvuldigd hebben.

Daarom ging ik er toe over, een dusdanige reeks van varieteiten te selecteeren, waarbij ik ten zekerste vermoedde het verschijnsel der *heteroploidie* te zullen aantreffen. Ditmaal werd mijn vermoeden bewaarheid.

1°. Van de onderzochte *Hollandsche hyacinthenvarieteiten* voerden de volgende het normale *diploide* aantal chromosomen, zijnde 16, in de kernen harer wortelcellen. Steeds waren 4 korte, 4 middelgroote en 8 lange chromosomen te onderscheiden:

Homerus, Baron van Tuyll, L'Ami du Coeur, Veronica, Albion, Prolifera Monstrosa, Uncle Tom, Othello, Robert Steiger, Roi des Belges, Général Pélissier, Red Star, Flevo, Gertrude, Yellow Hammer, Marchioness of Lorne, Daylight. Flora en *King Haäkon.*

De 3 eerstgenoemde varieteiten waren reeds in 1846 in den handel. De overige zijn daarna in den handel gekomen. Van *Baron van Tuyll* werd de oorspronkelijk blauwkleurige varieteit onderzocht en ook de daaruit voortgekomen witte knopvariatie. *Red Star* is

een in den handel bekende knopvariaties van *Général Pélissier* met gevulde bloemen. De genoemde knopvariaties waren cytologisch niet te onderscheiden van de moedervarieteiten.

2°. De volgende *Hollandsche hyacinthenvariëteiten* waren *heteroploid.*

Van Speyk.	21 chromosomen:	5 korte	6 middelgroote	10 lange
Gigantea rose.	24 "	6 "	6 "	12 "
Garrick.	28 "	7 "	6 "	15 "
Nimrod.	19 "	4 "	6 "	9 "
La Grandesse.	28 "	7 "	6 "	15 "
L'Innocence.	27 "	8 "	8 "	11 "
Rosea maxima.	20 "	5 "	5 "	10 "
King of the Blues.	24 "	6 "	6 "	12 "
Queen of the Pinks.	24 "	6 "	6 "	12 "
L'Ordre Parfait.	22 "	5 "	6 "	11 "
Cardinaal Wiseman	27 "	7 "	8 "	12 "
Lady Derby.	24 "	6 "	6 "	12 "
City of Haarlem.	23 "	5 "	5 "	13 "
Totilla.	30 "	7 "	8 "	15 "

Van *Van Speyk* is zoowel de roode knopvariatie met gevulde bloemen als de blauwe variteit met gevulde bloemen door mij onderzocht. *Queen of the Pinks* is een roode knopvariatie van *King of the Blues.* Evenals de varieteiten met 16 chromosomen zijn ook deze zooveel mogelijk gerangschikt naar het jaar van haar ontstaan. De varieteit *Van Speyk* werd in 1856 reeds te koop aangeboden. Alle overige zijn van lateren datum.

De vormen en afmetingen der korte, middelgroote en lange chromosomen stemmen alle overeen met die der varieteiten met 16 chromosomen,

Terloops zij hier gewezen op het feit, dat *Generaal de Wet, Grand Maître gigantea,* de roodkleurige *Van Speyk* en *Queen of the Pinks* knopvariaties van *heteroploide* vormen zijn.

3°. Het aantal chromosomen van *Hyacinthus orientalis var. albulus* (= Romaine blanche) bedraagt 16. De chromosomen van deze *Fransche varieteit* wijken in geen enkel opzicht af van die der *Hollandsche varieteiten.*

4°. Het gevolg hiervan is, dat ook in de hybriden van *Romaine*

blanche en *diploide Hollandsche varieteiten,* in welker bezit ik mij mocht verheugen, n.l.

Baron Van Tuyll ♀ × *Romaine blanche* ♂
Flora ♀ × *Romaine blanche* ♂
Romaine blanche ♀ × *Flora* ♂

geen onderscheiden aan te treffen waren tusschen de chromosomen, herkomende van de diverse ouders.

5°. De hybride *L'Innocence* ♀ × *Romaine blanche* ♂, welke eveneens in mijn bezit gekomen is, voert 22 chromosomen in hare wortelcellen. Hieruit volgt met groote waarschijnlijkheid, dat in dezen bastaard 14 chromosomen van de varieteit *L'Innocence* en 8 chromosomen van *Romaine blanche* afkomstig zijn, zoodat de heterotypische deeling bij *L'Innocence* met hare 27 chromosomen (men zie onder 2°) in dit geval zoo plaatsgegrepen moet hebben, dat 14 chromosomen zich naar de eene, 13 chromosomen zich naar de andere pool begaven. Tot deze getallen, doch tevens tot verschillende andere, o.a. tot 11—16 ben ik ook gekomen, toen ik de reductiedeeling der varieteit *L'Innocence* bestudeerde.

6°. De grootste, thans *in Italie* in kultuur zijnde varieteit, welke mij door de vriendelijke zorgen van Dr. RAGIONIERI uit *Castello* bij *Florence* gewerd, bezit 16 chromosomen, welke overeenstemmen met die der reeds genoemde diploide varieteiten.

Van iedere onderzochte varieteit werden een aantal individuen, afkomstig van verschillende kweekers en gegroeid onder verschillende omstandigheden, door mij gecontroleerd. Steeds vond ik bij *alle* individuen, die tot de zelfde varieteit behoorden, dezelfde chromosomen-garnituur, zoodat ik er niet aan twijfel: 1°. dat in de door mij onderzochte gevallen de chromosomen-garnituur bepaald was *na en door het bevruchtingsproces* en 2°. dat het knopvarieeren van geen invloed geweest is op deze garnituur, *voor zooverre zij thans door ons kan worden waargenomen.*

II. *Onderzoekingen, betreffende de vormen en de dimensies der chromosomen; de chromosomen van Bellevallia Webbiana en Bellevallia romana.*

Na mijne onderzoekingen, die betrekking hebben op het *aantal* en den *vorm* der chromosomen van de besproken hyacinthenvariteiten was mij genoegzaam gebleken, dat de chromosomengarnituur bestaat uit 3 verschillende kategorieën van chromosomen, n.l. *korte, middelgroote* en *lange.*

Door aanwending eener bizondere metingsmethode, n.l. door de met een teekenprisma geteekende, in één en hetzelfde vlak, doch meestal gebogen liggende chromosomen te bedekken met een rij van aluminium-schijfjes, welke een diameter bezitten, overeenstemmende met de gemiddelde breedte der geteekende chromosomen (deze is voor alle 3 kategorieën dezelfde) en het aantal der schijfjes, daartoe noodig, te tellen en te noteeren, is het mij gelukt, een tabel samen te stellen, die op overzichtelijke en exakte wijze aangeeft, welke verhoudingen er bestaan tusschen de lengte der korte, middelgroote en lange chromosomen; uit deze verhoudingen kunnen direct de absolute lengte en het absolute volume der chromosomen berekend worden.

Door de uitkomsten dezer tabel ben ik versterkt in de overtuiging, welke ik reeds verkregen had gedurende de verrichting der vermelde onderzoekingen, dat *het kleine en het middelgroote chromosoom samen de lengte en het volume hebben van één lang chromosoom.*

Deze veronderstelling, benevens de waarnemingen betreffende de *vormen* en het *deelingsmechanisme* der chromosomen, hebben mij er toe geleid, te vermeenen, *dat het kleine en het middelgroote chromosoom ontstaan zijn tengevolge van een dwarse doorsnoering van een lang chromosoom.*

Niet ondenkbaar is het, dat een soortgelijk verschijnsel plaatsgegrepen heeft bij de chromosomen van *Bellevallia Webbiana* en *Hyacinthus romanus* (= *Bellevallia romana*).

Deze beide soorten voeren in hunne wortelcellen 8 *chromosomen*, (n.l. 4 korte en 4 lange, die alle dezelfde breedte hebben), het geringste aantal, dat tot heden door mij binnen de familie der *Liliaceae* gevonden is; 2 korte chromosomen hebben hier hoogstwaarschijnlijk de lengte van één lang, zoodat zij ontslaan kunnen zijn, doordat een lang chromosoom zich in 2 gelijke deelen dwars doorsnoerde.

Zijn deze veronderstellingen juist, dan zou het diploide aantal chromosomen van *Hyacinthus orientalis* (16) op **12** en het aantal der beide *Bellevallia's* (8) op **6** terug te voeren zijn en wij hadden hier dan eenige eenvoudige, zeer duidelijke voorbeelden van de terugbrenging van een aantal ongelijkvormige, door dwarse doorsnoering ontstane chromosomen der 2, 4, 8, 16, 32 .... rij tot een aantal gelijkvormige, passende in de 3, 6, 12, 24 .... rij, welke veronderstelling STRASBURGER reeds in 1910 niet ongegrond achtte.

III. *Beschouwingen in verband met de chromosomengarnituur der onderzochte varieteiten van Hyacinthus orientalis* L.

Uit de feiten

1° dat de onderzochte hyacinthenvarieteiten met 24 chromosomen

6 korte, 6 middelgroote en 12 lange chromosomen bezitten, dat is 3 $\times$ *de haploide* chromosomengarnituur, bestaande uit 2 korte, 2 middelgroote en 4 lange chromosomen, en:

2°. dat hyacinthenvarieteiten van een *enorme grootte*, als deze vormen met 24 chromosomen vroeger nimmer bestaan hebben, meen ik te mogen besluiten, dat deze vormen *triploid* zijn,

Tegen dit besluit ware aan te voeren: mijne waarneming eener rangschikking dezer chromosomen in de kernplaten *in* 12 *paren*, daar STRASBURGER (1910), NĚMEC (1905) en andere onderzoekers in de triploide endospermkernen van Angiospermen *wel* een ligging in paren voor het diploide aantal chromosomen gevonden hebben, doch *niet* voor de overige in denzelfden kern gelegene.

In het bewustzijn evenwel van de groote waarde, die er steekt in de denkbeelden van STRASBURGER en zijn School, met betrekking tot deze ligging der chromosomen in *paren*, n.l. dat zij tot stand komt door de *affiniteit*, welke er bestaat tusschen een „moederlijk" en een „vaderlijk" chromosoom, ben ik er toe gekomen, na te gaan, hoe deze gepaarde ligging te rijmen is met de verschijnselen, welke niet slechts de triploide, doch ook de overige heteroploide kernplaten met een even chromosomenaantal te aanschouwen geven.

Wil men niet besluiten tot een generalisatie van wat BONNET (1912) aannemelijk tracht te maken als oorzaak van de gepaarde ligging der chromosomen van *Yucca*, nl. dat deze in samenhang zou te brengen zijn met het mechanisme van het kerndeelingsproces en dat zij geen diepere beteekenis had, zoo is de gepaarde ligging der chromosomen in de heteroploide kernplaten op de volgende wijze te verklaren.

Steunende op het feit, dat bij het reductiedeelingsproces de *heterotypische* kerndeeling niet steeds zóó schijnt te verloopen, dat de chromosomen, welke in de sporenmoedercellen — vóór het geministadium intreedt — als „*moederlijk*" en „*vaderlijk*" aangeduid worden, gescheiden van elkander naar de tegenovergestelde polen gaan, zoodat geslachtskernen met uitsluitend „*moederlijke*" en andere met uitsluitend „*vaderlijke*" chromosomen ontstaan, doch dat de zich vormende generatieve kernen ieder voor zich zoowel uit „*moederlijke*" als uit „*vaderlijke*" chromosomen samengesteld worden, zouden wij kunnen aannemen, dat op deze wijze bij *Hyacinthus orientalis* generatieve kernen ontstaan konden met evenveel „*moederlijke*" als „*vaderlijke*" chromosomen. Deze zouden dan in de generatieve kernen reeds *in paren* liggen, vooropgesteld, dat het karakter der *affiniteit* door de z.g. „faktorenuitwisseling" gedurende het geministadium, niet te zeer veranderd werd. Naast zuiver *haploide* zullen

zich ook wel eens *heteroploide* generatieve kernen ontwikkelen. Zulke generatieve kernen konden na versmelting met andere, waarin de chromosomen om de zelfde reden gepaard lagen, het aanzijn geven aan *diploide* en *heteroploide* somatische kernen, van welke alle chromosomen in paren gerangschikt waren.

Wij moeten, dergelijke oorzaken aannemende, wel zeer onze toevlucht nemen tot toevalligheden.

Tot een meer voor de hand liggende verklaring komen wij dan ook, indien wij aannemen, *dat het chromosomenaantal* 16, *hetgeen bij Hyacinthus orientalis als diploid geldt, in werkelijkheid reeds tetraploid is.*

Een oorspronkelijk haploide kern bestond dan uit 1 kort, 1 middelgroot en 2 lange chromosomen (of, indien deze tetraploidie vóór de vermeende dwarsdoorsnoering opgetreden is, uit 3 lange chromosomen van dezelfde grootte).

De vorm met 8 chromosomen zou, door de vorming van diploide, met elkaar versmeltende, geslachtskernen het aanzijn gegeven kunnen hebben aan de thans bestaande soort met 16 chromosomen: *Hyacinthus orientalis L.*

Een varieteit van 24 chromosomen o.a., waarbij de chromosomen in 12 paren liggen, kunnen wij ons dan ontstaan denken uit de versmelting van 2 geslachtskernen, waarvan de eene tetraploid was, 16 gepaard gelegen chromosomen bevatte, terwijl de andere diploid was en uit 8 in paren liggende chromosomen bestond.

Het thans niet bekend zijn van een oorspronkelijk diploid ras met 8 chromosomen behoeft geen hinderpaal te zijn voor deze veronderstelling. Het is immers volstrekt niet onmogelijk dat, *langs den weg der natuurlijke selectie, met rassen met* 8 *chromosomen geschied is, hetgeen thans, tengevolge der kunstmatige selectie in de Hollandsche hyacinthenkulturen met de rassen met* 16 *chromosomen dreigt te zullen gebeuren: het verdwijnen er van en het uitsluitend behouden blijven der rassen met hoogere chromosomenaantallen, daar deze door grootte en sterkte uitmunten.*

In een ontstaan van de soort *Hyacinthus orientalis L.* met 16 chromosomen uit rassen met 8 chromosomen langs den weg der *bastaardeering* ware tegelijkertijd een zeer aannemelijke verklaring gelegen voor de enorme variabiliteit, welke bij deze plant voorkomt en op welk verschijnsel Clusius reeds in zijn „*Rariorum plantarum historia*" van 1601 de aandacht gevestigd heeft.

Tegelijkertijd ware dit niet in strijd met de denkbeelden van vooraanstaande onderzoekers op dit gebied, zooals Strasburger 1910 en Ernst 1918, welke het ontstaan en het behouden blijven van

fertiele heteroploide rassen door bastaardeering in de natuur niet onaannemelijk achten, terwijl mijn vondst van soorten met 8 chromosomen binnen het geslacht *Hyacinthus L.* (n.l. bij *Bellevallia Webbiana* en *Hyacinthus romanus*) hieraan eveneens steun verleent.

LITERATUURLIJST.

BONNET, J. 1912. Sur le groupement par paires des chromosomes dans les noyaux diploides. Archiv. für Zellforsch., Bd 7, p. 231—241, pl. 21—22 1 fig.

DELAUNAY, L., 1915. Etude comparée cariologique de quelques espêces du genre MUSCARI MILL Mém. de la Soc. des Naturalistes de Kiew, T 25, 1915. (russe, avec résumé frasçais) et réf. de Th. J. Stomps, Zeitschr. f. Botanik, Bd 8, p. 213, 1916.

ERNST, DR. ALFRED 1918. Bastardierung als Ursache der Apogamie im Pflanzenreich. Eine Hypothese zur experimentellen Vererbungs und Abstammungslehre. Gustav Fischer, Jeua, 1918.

GUIGNARD L., 1884. Recherches sur la structure et la division du noyau cellulaire chez les végétaux Annales d. sciences naturelles, b. sér.. Botanique, 1884, T 17, p. 1—59, pl. I—IV.

—— 1891. Nouvelles études sur la fécondation. Annales d. sciences naturelles, 7. sér., Botanique, 1891, T. 14, 163—296. pl. IX—XVIII.

MIEHE H., 1901. Über die Wanderung des pflanzlichen Zellkernes. Flora 1901, Bd. 88, p. 115.

MÜLLER CARL, 1905. Über unvollkommene Zellwandbildungen. Ber. d. D. Bot. Gesellsch., Bd. XXIII, 1905, p. (6).

NAWASCHIN, S., 1912, Sitz. ber. d. Naturforschergesellschaft zu Kiew von 4 Febr. 1912. Bull. Acad. Imp. Sc. St. Petersburg, Nr. 4. p. 373—315, 5 fig., 2 pl.

NĚMEC B., 1905, Studien über die Regeneration, Berlin 1905.

ROSENBERG O.. 1904. Über die Individualität der Chromosomen im Pflanzenreich. Flora, 1904, Bd. 93, p. 251—259, 7 fig.

SARGANT MISS ETHEL, 1896, The Formation of the sexual nuclei in *Lilium Martagon*. Ann. of Bot., Vol., X, 1896. p. 464, pl. XXII, XXIII.

SCHRAMMEN F. R., 1902, Über die Einwirkung von Temperaturen auf die Zelles des Vegetationspunktes des Sprosses von *Vicia faba*. Diss. Bonn. 1902. 52 p., 1 pl.

STRASBURGER E., 1910, Chromosomenzahl. Flora, Bd. 100, 1910, p. 398—446, Taf. 6.

TSCHERNOYAROW M., 1914, Über die Chromosomenzahl und besonders beschaffene Chromosomen im Zellkerne von *Najas major*. Ber. d. D. Bot. Gesellsch', Bd. XXXII, 1914, p. 411—416.

WINKLER HANS, 1916, Über die experimentelle Erzeugung von Pflanzen mit abweichenden Chromosomenzahlen. Zeitschr. für Botanik, Bd. 8, 1916, p. 417—531, taf. IV—VI.

Amsterdam, September 1920.

Sterrekunde. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer A. PANNEKOEK: „*De afstand van de donkere nevels in Taurus*".

(Mede aangeboden door den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

§ 1. Verschillende onderzoekingen in de laatste jaren hebben steeds duidelijker het bestaan aangetoond van donkere kosmische nevelmassa's, die het licht van de daarachter gelegen sterren opslorpen en verzwakken. In den Melkweg treft men tusschen de lichtende sterwolken en stroomen donkere vlekken en holten aan, die oorspronkelijk als leegten in het met sterren gevulde melkwegstelsel beschouwd werden. De onwaarschijnlijkheid, dat deze leegten zich als kegelvormige buizen met onze zon als top door HERSCHEL's lensvormig sterrestelsel zouden uitstrekken, was een der belangrijkste argumenten voor de opvatting van den Melkweg als een ring, die zich niet ver in diepte uitstrekt. De mogelijkheid, dat ze door absorbtie zouden kunnen ontstaan, speelt langen tijd in de theorieën over den bouw van het heelal geen rol.

Eerst de fotografische opnamen van MAX WOLF en BARNARD hebben ons met tallooze details bekend gemaakt, die nauwelijks een andere verklaringswijze toelaten. Men ziet daar kleine zwarte vlekjes midden in de lichtende sterwolken; lange, donkere, grillig gevormde voren doorsnijden de heldere gedeelten en staan blijkbaar in samenhang met flauwlichtende nevels. MAX WOLF heeft herhaaldelijk op het bestaan van uitgestrekte absorbeerende nevelmassa's gewezen als een der belangrijkste oorzaken, die het aspect van den Melkweg bepalen. Het melkwegsysteem moet dan als een mengeling van dichte sterwolken, lichtende en donkere nevelmassa's beschouwd worden.

In een onderzoek van eenige sterfoto's in Aquila [1]), die naast de dichtste gedeelten van een sterwolk ook een zich daarin bevindende zwarte vlek omvatten, bleek het schrijver dezes, dat de dichtheid der sterren van de 11[de] tot de 15[de] grootte in de zwarte vlek voor alle klassen in dezelfde verhouding minder was dan daarnaast; als de vlek door absorbtie ontstond, moest derhalve de absorbeerende stof niet in de verre diepten van de sterwolk, maar veel dichter bij liggen, zoodat

[1]) A. PANNEKOEK. Onderzoek van een melkwegvlek in Aquila. Verslagen K. A. v. W. XXVII, 1327. (Maart 1919).

zij zich slechts toevallig tegen dezen lichtenden achtergrond projecteerde. Dat zulke objecten niet uitsluitend in den Melkweg voorkomen, bleek uit de onderzoekingen van BARNARD, die een lijst van 182 meest kleine, donkere voorwerpen publiceerde [1]), die wel het best uitkwamen tegen den helderen achtergrond van den Melkweg, maar ook daarbuiten te vinden zijn, en hier en daar zelfs met kijkers visueel als intens zwarte vlekken zichtbaar zijn. Op andere wijze bleek de verre verbreiding van deze absorbeerende materie uit een onderzoek van de algemeene verdeeling van de sterren tot de 11[de] grootte [2]). Daarbij werd gevonden, dat om twee plaatsen met een aanzienlijk tekort aan sterren, in Taurus en in Ophiuchus, als om twee centra van verduistering, groote gebieden zich uitstrekken, waar overal het aantal sterren geringer dan normaal is. Doordat bij dit onderzoek gemiddelden over groote gebieden gebruikt werden, kon het alleen een algemeen beeld opleveren, dat evengoed door een bepaalde ruimteverdeeling als door de werking van een absorbtie verklaard kon worden. Het bleek echter, dat in de eene kern, in Taurus, de verdeeling van de sterdichtheid zeer onregelmatig was, en dat de armste streken juist die waren, waar volgens BARNARD's catalogus tal van zwarte objecten tot nesten opgehoopt zijn; dit wijst op de absorbtie als de waarschijnlijkste verklaring van de gevonden algemeene sterverdeeling.

Nog duidelijker beeld van de onregelmatigheden in de sterverdeeling in dit Taurusgebied geeft een onderzoek van DYSON en MELOTTE [3]), met behulp van de FRANKLIN-ADAMSplaten, die de sterren tot de grootte 15,8 toonen. Uit de tellingen blijkt, dat er voornamelijk drie gebieden van sterkste verduistering aanwezig zijn, waarvan de onregelmatige vormen op de bijgevoegde kaart te zien zijn: omstreeks $3^h20^m + 31°$ (Z.W. van ζ Persei), $4^h30^m + 26°$ (tusschen de Plejaden en β Tauri) en $5^h20^m + 25°$ (ZW. van β Tauri). Door de aantallen sterren van verschillende bronnen te vergelijken, komen zij tot dezelfde conclusie, dat deze absorbeerende nevelmassa's relatief dicht bij ons moeten liggen. "Thus, taking the area as a whole, we find the number of stars is about one fifth of the normal number whether we go down to magnitude $9.^m0$, $11.^m0$ or $14.^m0$.

---

[1]) E. E. BARNARD, On the dark markings of the sky. Astrophysical Journal **49**, 1. (Jan. 1919).

[2]) A. PANNEKOEK, On the distribution of the stars of the 11th magnitude. Monthly Notices of R. A. S. **79**, 333 (March 1919).

[3]) SIR F. W. DYSON and P. J. MELOTTE, The region of the sky between R.A. 3h and 5h 30 m and N. Dec. 20° to 35°, Monthly Notices of R. A. S. **80**. 3 (Nov. 1919).

This would seem to indicate, that if the small density is caused by absorbing matter, the screen cannot be at a great distance, say, not more than 200 or 300 parsecs at most" (l. c. pag. 6). Doordat zij echter de E. B. van de sterren tot de 9[de] grootte in de donkere gebieden niet grooter vinden dan elders, dus geen grooter gemiddelde afstand aangeduid wordt, wordt deze conclusie weer onzeker. Voor het hier volgende onderzoek, dat ten doel heeft de afstand van deze absorbeerende nevels nauwkeuriger te leeren kennen, was de bij hun opstel gevoegde kaart met stertellingen van groot nut.

§ 2. Om uit de sterdichtheden de afstand van een absorbeerenden nevel te kunnen vinden, moeten wij eerst theoretisch nagaan, wat de invloed van een absorbeerend scherm op het aantal sterren van verschillende grootte is. Wij onderstellen daarbij, dat de lichtkrachtfunctie bekend is volgens de formule van KAPTEYN; voor de logarithme van de sterdichtheid als functie van den afstand nemen wij volgens de empirische gegevens eveneens een kwadratische formule aan. Wij noemen m de grootte, M de absolute grootte der sterren, en voeren als modulus van den afstand $\rho = 5 \log r$ in, waarbij $\rho = 0$ voor $\pi = 0'',1$ genomen wordt; dan is $m = M + \rho$. Stellen wij nu

$$\log \varphi (M) = Const - \frac{1}{\alpha^2}(M - M_0)^2 \qquad \log \Delta (\rho) = Const - \frac{1}{\beta^2}(\rho - \rho_0)^2$$

dan wordt het aantal sterren van de grootte m

$$A(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta (\rho)\, 10^{0,6 \rho - \frac{1}{\alpha^2} (m - M_0 - \rho^2}\, d\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} 10^{0,6 \rho - \frac{1}{\alpha^2} (m - M_0 - \rho^2 - \frac{1}{\beta^2} (\rho - \rho_0^2}\, d\rho$$

$$\text{of } \log A (m) = Const - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \{m - (\rho_0 + M_0 + 0,3\beta^2)\}^2$$

Voor de lichtkrachtfunctie werd $\frac{1}{\alpha^2} = 0,029 = {}^1/_{34}$ en $M_0 = 9$ aangenomen. Voor de zone tusschen $b = 20°$ en $40°$, waarin de Taurusgebieden liggen, werd uit de getallen van VAN RHIJN afgeleid

$$\log A(m) = Const + 0,630\, m - 0,0118\, m^2 = Const - \frac{1}{86}(m - 27)^2$$

waaraan voldaan wordt door de waarden $\alpha^2 + \beta^2 = 86$, $\beta^2 = 52$, $M_0 + \rho_0 = 11$, $\rho_0 = 2$. Deze constanten zullen in de volgende berekeningen aangenomen worden.

Bevindt zich nu op den afstand ρ_1 een scherm, dat ε grootteklassen absorbeert, dan vertoonen zich onder de verder verwijderde sterren niet die met $M = m - \rho$, maar die met $M = m - \varepsilon - \rho_1$ als

sterren van de grootte m. Het aantal sterren van deze grootte A'_m is nu

$$A'_m = \int_{-\infty}^{\rho_1} \Delta(\varrho)\, 10^{0{,}6\rho - \frac{1}{\alpha_2}(m - M_0 - \rho)^2} d\varrho + \int_{\rho_1}^{\infty} \Delta(\varrho)\, 10^{0{,}6\rho - \frac{1}{\alpha^2}(m - M_0 - \varepsilon - \rho)^2} d\varrho.$$

Deze beide integralen, tusschen de grenzen $\pm\infty$ genomen, stellen de aantallen A_m en $A_{m-\varepsilon}$ voor. Noemt men nu

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2)\varrho_1 - 0{,}3\,\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\varrho_0 - \beta^2(m - M_0)}{\alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = x_1 \quad \text{en}$$

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2)\varrho_1 - 0{,}3\,\alpha^2\beta^2 - \alpha^2\varrho_0 - \beta^2(m - M_0 - \varepsilon)}{\alpha\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = x_2$$

$$\text{en} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi \log e}} \int_{-\infty}^{x_1} 10^{-t^2} dt = \gamma_1 \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi \log e}} \int_{x_2}^{\infty} 10^{-t^2} dt = \gamma_2$$

dan is

$$A'_m = \gamma_1 A_m + \gamma_2 A_{m-\varepsilon}.$$

Terwijl het aantal A_m uit de samenvoeging van sterren op alle afstanden verkregen wordt door integratie tusschen $\pm\infty$ van een functie, die volgens de waarschijnlijkheidskromme verloopt, vindt men het aantal A'_m uit twee zulke krommen, die voor m en $m-\varepsilon$ gelden; van de eerste wordt een gedeelte tusschen $-\infty$ en x_1 genomen, door de breuk γ_1 aangegeven (de sterren vóór het absorbeerende scherm), van de tweede het deel tusschen x_2 en $+\infty$, door de breuk γ_2 aangegeven (de sterren achter den nevel). Uit de boven aangenomen getallen vindt men

$$x_1 = 0{,}22\varrho_1 - 1{,}53 - 0{,}132\,(m - 9) \qquad x_2 = x_1 + 0{,}132\,\varepsilon.$$

Met behulp van deze formules en een lijst van waarden van A_m, die daarmee correspondeeren, werden nu voor verschillende onderstellingen omtrent ϱ_1 en ε de waarden van A'_m berekend. Om ze gemakkelijker met de uitkomsten uit stertellingen te kunnen vergelijken, werden uit de A'_m de $N'_{m+\frac{1}{2}}$, de totale aantallen sterren helderder dan $m + \frac{1}{2}$ berekend en deze met het normale aantal $N_{m+\frac{1}{2}}$ vergeleken. De waarden $\log N - \log N'$, het *logarithmisch tekort* in steraantal, is dan de beste maat voor de werking van den absorbeerenden nevel. Deze waarden zijn in de volgende tabel vereenigd.

m	$\varepsilon_1 = 4{,}25$			$\varepsilon_1 = 7{,}25$			$\varepsilon_1 = 10{,}25$		
	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 4$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 4$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 4$
2	0,093	0,105	0,105	0,006	0,006	0,006			
3	135	155	158	012	013	013			
4	184	221	226	021	023	023			
5	239	301	311	035	039	039			
6	295	396	417	057	064	065	0,003	0,003	0,003
7	345	500	543	085	099	100	006	006	006
8	383	605	689	122	146	150	011	012	012
9	404	697	854	164	206	214	019	021	021
10	408	761	1,033	210	279	294	032	036	036
11	399	788	1,214	253	361	393	051	059	060
12	382	780	1,375	289	448	509	075	091	093
13	360	749	1,479	312	527	641	106	133	138
14	337	705	1,500	320	587	785	140	186	196
15	314	657	1,448	315	617	933	174	247	269
16	286	605	1,354	295	610	1,060	200	308	350
17	266	560	1,254	277	586	1,153	224	373	452
18				255	546	1,179	236	426	563
19				233	500	1,140	235	456	676
20				212	454	1,059	225	460	778
21									

Uit deze waarden die in de figuur grafisch voorgesteld zijn, blijkt:

a. De werking van de absorbtie strekt zich, zeer langzaam verloopend, over bijna alle grootteklassen uit, die voor onze waarneming toegankelijk zijn. Dit is vooral een gevolg van de groote uitspreiding van de lichtkrachtfunctie.

b. Voor zwakkere sterren neemt het logarithmisch tekort eerst sterk toe, tot een maximum bereikt wordt (eenigszins evenredig met de absorbtie) en de waarden weer afnemen. Dit laatste komt daarvandaan, dat voor de zwakke grootteklassen een steeds grooter meerderheid der sterren achter den nevel ligt, waardoor het logarithmisch tekort steeds meer nadert tot het verschil $\log N_m - \log N_{m-\varepsilon}$; dit verschil echter wordt voor zwakkere klassen steeds kleiner.

c. Voor de heldere grootteklassen, waar de werking der absorbtie begint merkbaar te worden, *verandert het logarithmisch tekort maar*

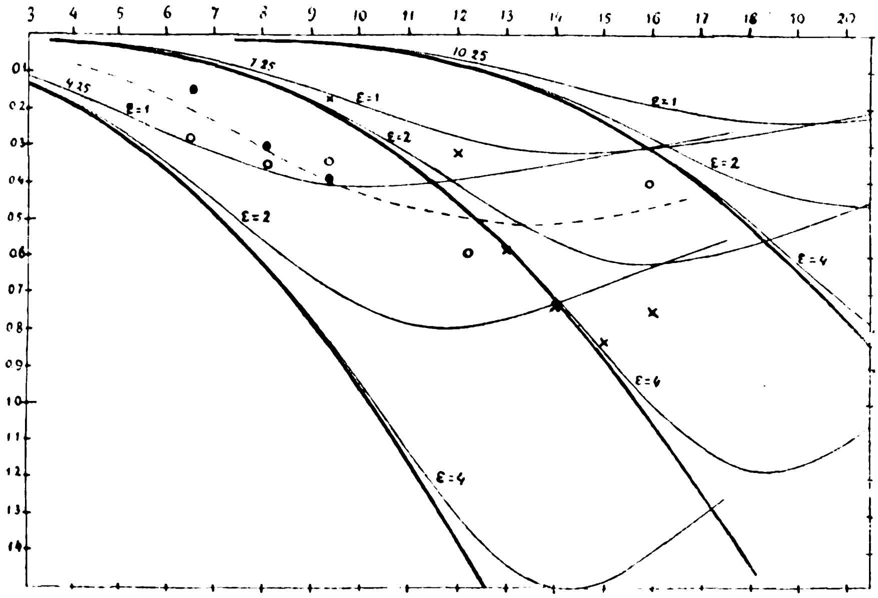


Fig. 1.

weinig met den absorbtiecoefficient. De reden daarvan is, dat de verzwakte sterren hier nog zoo goed als geen rol spelen. De vermindering van het aantal sterren is bijna geheel een gevolg van het uitvallen van de verder verwijderde sterren van de grootte m. Voor toenemende ε nadert het logarithmisch tekort hier tot een grenswaarde (berekend uit alleen de onverzwakte sterren vóór het scherm), die op de teekening door de dikke lijn $\varepsilon = \infty$ voorgesteld is.

d. De waarde van het logarithmisch tekort *hangt voor de heldere grootteklassen hoofdzakelijk af van den afstand* ϱ_1, *voor de zwakke klassen hoofdzakelijk van den absorbtiecoefficient* ε van den donkeren nevel. Voor grootere ϱ_1 wordt het effect van eenzelfde absorbtie op het logarithmisch tekort geringer.

Hieruit volgt in de eerste plaats, dat het moeilijk is, deze methode in het algemeen toe te passen. Bij kleine zwarte vlekken (zooals de driedeelige holte bij χ Aquilae) kan men wel het tekort over eenige grootteklassen (b.v. van de 11^de^ tot de 16^de^ grootte) bepalen, maar deze omvang is te klein om de beide onbekenden ϱ_1 en ε te scheiden en beide te vinden; het aantal helderder sterren is te gering om er iets uit af te kunnen leiden. Omdat men gegevens over de meest uiteenloopende grootteklassen noodig heeft, is deze methode slechts goed toe te passen bij zoo uitgebreide gebieden, dat men ook over een voldoend materiaal van heldere sterren beschikt. Dit is het geval bij de donkere nevels in Taurus.

§ 3. Voor de sterdichtheid N'_m zijn de volgende bronnen gebruikt:

a. De „Bonner Durchmusterung" tot de stergrootten 6,5, 8.0 en 9.0 incl. (het totale aantal tot 9.5 was wegens de veranderlijkheid en onzekerheid van de grenshelderheid niet bruikbaar). De normale dichtheid N_m werd aan de lijsten in „Groningen Publications 18" ontleend; het argument, de grenshelderheid naar de schaal van Groningen 18, werd, volgens SEELIGER, afhankelijk genomen van de sterdichtheid, en voor de laagste grens nog met $+0,11$ gecorrigeerd [1]), dus $6,56-0,023\,(D-0,7)$; $8,12-0,068\,(D-0,7)$; $9,36-0,246\,(D-0,7)$.

Gemiddeld zijn deze grenzen in photometrische schaal 6,6, 8.1 en 9.4.

b. Van de „Selected Areas" van KAPTEYN vallen er twee, Nr. 47 en 48, in dit gebied; Nr. 48 ligt dichter bij het centrum, maar volgens de kaart van DYSON en MELOTTE juist buiten een gebied met sterke absorptie; Nr. 47, hoewel verder verwijderd, valt juist in het donkere veld Z.W. van ζ Persei. In de „Durchmusterung of selected Areas" [2]) werden de aantallen sterren tot 12.0, 13.0, 14.0, 15.0, en op Area 47 ook tot 16.0 geteld (zwakste sterren 15.96 resp. 16.49).

c. Aan de kaart van DYSON en MELOTTE kon voor elke plaats in het gebied van 3^h tot 5^h30^m en $+20°$ tot $+35°$ de sterdichtheid per 100 kwadraatminuten op de FRANKLIN-ADAMS platen ontleend worden, reeds gereduceerd op een gemeenschappelijk systeem. Omtrent de grenshelderheid, waarvoor deze dichtheden gelden, zeggen de auteurs: „The limiting magnitude is not accurately fixed, but may be taken at about 15.8, and should be within $0^m,25$ of this figure" [3]). Ik heb getracht deze opgave te controleeren door gebruik te maken van de drie „Selected Areas" (47, 48, 49) die in dit gebied voorkomen. Daartoe werd de $log\,N'$ voor deze plaatsen, uit de kaart van D. en M. afgeleid, vergeleken met die van KAPTEYN voor $m=13$, 14, 15, (en 16) en daaruit door interpolatie of extrapolatie van de afwijkingen van de normale $log\,N$ de grenshelderheid afgeleid. De aldus gevonden waarden zijn 16.02, 15.83 en 15.90; hun gemiddelde **15.9** is aangenomen. Overigens geeft een fout van 0,1 in deze waarde slechts een fout van 0,03 in de $log\,N$.

d. De gegevens van de fotografische hemelkaart zijn hier in het algemeen niet te gebruiken; de groote toevallige ongelijkheid van de grenshelderheid der afzonderlijke platen belet wel niet om gemiddelde dichtheden en een gemiddelde grenshelderheid te bepalen,

[1]) Zie daarvoor A. PANNEKOEK, Onderzoekingen omtrent de bouw van den Melkweg. Zittingsverslagen K. A. v. Wet. Juni 1910, blz. 258.

[2]) Annals of Harvard College Observatory. Vol. CI.

[3]) l. c. pag. 4.

maar hier komt het juist op enkele afzonderlijke platen aan, die sterk van het gemiddelde kunnen afwijken. Dit bezwaar vervalt, wanneer men de toevallige onregelmatigheden door reductie op één systeem kan opheffen, wat mogelijk is, als een groot aantal aaneensluitende platen gedeeltelijk over elkaar grijpen. Dit is met de kaartplaten nergens het geval; wel echter is dit het geval met de *catalogusplaten van Parijs,* waarvan de zones 22°, 23° en 24° volledig zijn gepubliceerd. Daar hierbij de middelpunten van de eene zone samenvallen met de hoekpunten van de aangrenzende zone, heeft elke plaat een kwadrant met elk der 4 omliggende platen gemeen. Zoo was het mogelijk om alle platen van deze 3 zones tusschen 3^h16^m en 5^h32^m op hun gemiddelde te reduceeren. Eenige bijzonderheden over deze reductie mogen hier volgen.

Twee opeenvolgende platen a en b van de middenzone (23°) kunnen met elkaar verbonden worden door een plaat van de N-zone (24°) c, die met beiden een kwadrant gemeen heeft, en evenzoo door een van de Z-zone (22°) d. Noemt men de kwadranten $\begin{vmatrix} 2 \,.\, 1 \\ 4 \,.\, 3 \end{vmatrix}$ dan is dichtheid b : dichtheid $a = \frac{b_1}{c_4} \times \frac{c_3}{a_2}$, en evenzoo $= \frac{b_3}{d_2} \times \frac{d_1}{a_4}$. Voor het logarithmisch verschil in dichtheid van elke twee opeenvolgende platen van de middelzone krijgt men dus twee waarden, waarvan de overeenstemming een maat van de te bereiken nauwkeurigheid geeft. Hierbij is te bedenken, dat de kwadranten op de aangrenzende platen niet precies samenvallen, wegens de convergentie der declinatiecirkels en omdat zij zich 65′ van het middelpunt uitstrekken. Zoo werd gevonden, te beginnen met $log\, d\,(3^h24^m) - log\, d\,(3^h16^m)$ en eindigende met $log\, d\,(5^h40^m) - log\, d\,(5^h32^m)$ (in eenheden van de 3de decimaal):

uit de N. plaat	+046	+070	−161	+030	+216	−240	+029	+369	−002
uit de Z. plaat	+027	+106	−335	+233	+298	−535	−115	+490	−073
aangenomen	+036	+088	−248	+131	+257	−387	−040	+430	−037

+639	−816	+807	−552	+359	+094	−529	+500	−165
+469	−856	+637	−531	+382	+168	−588	+451	−120
+554	−836	+722	−541	+370	+131	−558	+476	−142

Hieruit werden de afwijkingen van elke plaat der middelzone van een middelwaarde afgeleid, en daaruit werd hetzelfde voor de N- en de Z-zone gevonden; deze waarden met tegengesteld teeken geven de *logarithmische reductie* voor elke plaat, de logarithme van den factor, waarmee het aantal sterren op die plaat vermenigvuldigd moet worden, om voor een zelfde gemiddelde grenshelderheid te gelden. Deze zijn, voor de zones + 24°, + 23°, + 22°, in volgorde van afnemende R.Kl.:

−09 +10 +01 −17 +07 −05 −05 +17 −02 −04 +06 +18 −03 +07 +08 +02 +14 +37
−14 −28 +20 −36 23 +14 −40 +32 −51 +04 00 +43 +39 00 +26 +39 +14 +23 +26
−05 −07 −12 −05 −15 −16 −17 −09 −05 −33 +06 −14 −34 −12 −05 +05 −10 +17

Indien er op elke plaat een systematisch verschil tusschen de O en W zijde bestaat, zal er bij deze herleiding een met de R.Kl. verloopende systematische fout ontstaan, omdat er geen kringsluiting is; ook worden de toevallige fouten, daar er maar drie zones zijn, slechts in geringe mate opgeheven. Toch zullen de zeer groote toevallige sprongen in de grenshelderheid op deze wijze grootendeels onschadelijk gemaakt zijn. Dit blijkt ook uit het regelmatig verloop van de gereduceerde aantallen sterren, dat nu een volkomen overeenstemming met het dichtheidsverloop volgens de Franklin-Adams-platen vertoont, wat met de niet gereduceerde aantallen niet het geval is. Deze aantallen zijn voor de afzonderlijke kwadranten (voor de middelste rijen twee waarden, waarvan telkens het bovenste uit de N-plaat afkomstig is):

	5^h 44^m	40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	4^h 56	52	48	44	40	36	32	28
25°																				
		141	124	110	39	30	25	36	53	76	75	63	53	53	30	12	13	13	25	
24°																				
		134	120	138	73	29	28	40	27	53	69	172	73	45	39	39	41	24	19	
	151	130	124	142	71	30	27	39	28	52	70	171	75	49	36	40	41	27	17	
23°																				
	154	159	174	163	146	90	38	21	46	52	83	79	74	46	52	58	54	51	31	
		143	176	170	143	93	36	20	48	52	85	78	75	51	48	60	49	55	28	
22°																				
		184	151	159	170	116	49	34	41	48	58	58	57	70	55	61	35	47	49	
21°																				

	4^h 28^m	24	20	16	12	8	4	0	3^h 56	52	48	44	40	36	32	28	24	20	16	12
25																				
	19	14	38	42	42	38	37	68	75	123	107	154	80	60	72	76	63	80		
24																				
	15	37	69	78	70	88	70	101	89	81	77	155	71	46	69	50	71	60		
	15	36	64	83	75	81	83	85	85	86	69	174	79	41	68	51	70	58	71	
23																				
	16	46	65	62	65	74	56	68	68	67	78	83	56	44	51	49	66	71	47	
	17	45	61	67	71	68	66	57	65	71	69	93	63	40	51	51	67	73		
22																				
	54	39	39	33	41	43	48	66	76	83	74	83	43	36	42	54	61	40		
21																				

Deze aantallen moeten met $12^2 : 13^2$ vermenigvuldigd worden om de aantallen per vierkanten graad te krijgen. Mag men aannemen, dat de gemiddelde grenshelderheid van deze 55 platen met de gemiddelde waarde voor den geheelen hemel overeenstemt, dan geldt voor deze de grenshelderheid, die uit de geheele zones 23°—24° met de tafels in „Groningen Publ. 27" is afgeleid nl. **12.20**.

§ 4. In deze hemelstreek werden acht, door onregelmatige polygonen begrensde gebieden nader onderzocht: *A* en *B* omvatten ongeveer de beide donkste absorbtiegebieden $3^h20^m + 31°$ en $4^h30^m + 26°$; *C*, *D*, *E* en *F* liggen ten N., ten O. en ten Z. om *B* en bevatten gebieden met weinig sterren, die gedeeltelijk donker gearceerd zijn op de kaart van D en M; *G* en *H* zijn rijker streken met centra $3^h40^m + 27°$ en $4^h4^m + 32°$. Voor de gebieden *E* en *F* werden als declinatiegrenzen 21° en 25° genomen, om de Parijsche uitkomsten te kunnen gebruiken. Voor elk dezer velden werden de B. D. sterren geteld en door het oppervlak gedeeld (voor *F* werden daarvan, als Hyadensterren, 5 sterren tot 6,5, 3 van 6,6—8,0 en 3 van 8,1—9,0 afgetrokken). Evenzoo werd voor Parijs de gemiddelde dichtheid berekend. Voor de FRANKLIN-ADAMS-platen werden uit de op de kaart van D. en M. voorkomende dichtheidsgetallen middelwaarden berekend.

	A.	*B.*	*C.*	*D.*	*E.*	*F.*	*G.*	*H.*
oppervlak.	28.3	26,6	21.0	29.5	24.0	36.8	39.9	46.2
galactische breedte.	21°	13°	8°	8°	9°	16°	21°	13°
B.D. per vierk. graad —6,5	0.32	0.23	0.19	0.20	0.12	0.19	0.07	0.30
—8,0	1.10	0.60	1.05	0.88	0.67	0.87	0 93	1.23
—9,0	3.82	2.03	2.86	3.29	3.71	2.93	4.14	5.07
—9,5	10	6	10	8	15	11	14	15
Parijs p. vierk. gr.					40.4	36.1		
Fr.-A. p. 100′	9.6	9.3	13	15	18	11.3	24	26
log N′ (6,6)	9.51	9.36	9.28	9.30	9.08	9.28	9.85	9.48
„ (8,1)	0.04	9.78	0.02	9.94	9.83	9.94	9.97	0.09
„ (9,4)	0.58	0.31	0.46	0.52	0.57	0.47	0.62	0.70
„ (12,2)					1.61	1.56		
„ (15,9)	2.54	2.52	2.67	2.73	2.81	2.61	2.94	2.97
log N′/N (6,6)	+0.14	- 0.09	—0.22	—0.20	—0.42	—0.14	—0.52	+0.04
„ (8,1)	— 10	— 46	— 27	— 35	— 44	— 25	— 16	— 13
„ (9,4)	— 17	— 57	— 48	— 43	— 33	— 34	— 11	— 14
„ (12,2)					— 61	— 58		
„ (15,9)	— 44	— 59	— 48	— 42	— 34	— 46	— 04	— 10

In deze waarden voor het logarithmisch tekort zijn de volgende karaktertrekken op te merken:

a. Het verschil tusschen de sterk en de weinig verduisterde gebieden is bij de heldere D. M.-sterren tot 6,5 niet, bij die tot de 8[ste] grootte nauwelijks merkbaar; eerst bij die tot de 9[de] onderscheiden zich G en H duidelijk van de andere. Door de toevallige onzekerheid der getallen treedt het verschil tusschen de meer of minder verduisterde gebieden $A-F$ niet duidelijk te voorschijn.

b. Het tekort is voor de sterren tot 15,9 ongeveer even groot als voor die tot 9,4. Dit stemt overeen met wat ook Dyson en Melotte vonden.

c. De Parijsche uitkomsten voor de velden E en F wijzen er op, dat het tekort voor de tusschen gelegen grenshelderheden grooter is.

Nemen wij eerst de velden E en F, waar de gegevens het volledigst zijn, dan blijkt dat hun middelwaarden (— 0,28, — 0,35, — 0,34, — 0,59, — 0,40 voor de 5 grootten), die op de figuur door open cirkeltjes zijn voorgesteld, vrij goed voldoen aan een kromme lijn (in de figuur gestippeld), die aan $\rho_1 = 5{,}5$, $\varepsilon = 1{,}5$ beantwoordt. De waarden van ρ_1 tusschen 4 en 6 met een absorbtie $\varepsilon < 2$ geven een maximum voor het logarithmisch tekort voor $m = 12$ à 13, dus zal men in dit geval vinden, dat het tekort aan sterren voor de grootten tusschen de 9[de] en de 15[de] ongeveer even groot is.

Dit wordt echter tegengesproken door de uitkomsten van de „Selected Areas". Deze konden niet met de vorige vereenigd worden, omdat zij afzonderlijke kleine gebieden omvatten.

Uit de tellingen volgt;

	Area 47	$b = -21°$ opp. $= 3600'$		Area 48	$b = -12°$ opp. $= 1600'$	
	Aantal	*log N'*	*log N'/N*	Aantal	*log N'*	*log N'/N*
> 12.0	23	1.36	−0.32	19	1.63	−0.15
> 13.0	29	1.46	−0.58	37	1.92	−0.25
> 14.0	44	1.64	−0.73	72	2.21	−0.31
> 15.0	70	1.85	−0.83	84	2.62	−0.22
> 16.0	178	2.25	−0.75			

Uit het eerste veld, dat binnen het sterke absorbtiegebied A valt, volgt als 4[de] conclusie:

d. Uit de S. A. blijkt een regelmatige sterke toename van het tekort van de 12[de] tot de 15[de] of 16[de] grootte.

Op zichzelf beschouwd laten zich deze waarden (op de figuur door kruisjes voorgesteld), vooral als men ze nog met de waarde voor 9.4 van het veld A verbindt, goed vereenigen met een kromme voor $\varrho_1 = 7.5$ (waarbij dan de daling van 15^m tot 16^m niet reëel is). Maar de uitkomst (*d*) is geheel in strijd met uitkomst (*b*); de aantallen sterren in S. A. 47 toonen, dat het tekort aan sterren niet voor 9.4 en 15.9 ongeveer gelijk kan zijn, niet bij 12^m ongeveer een maximum kan hebben om daarna weer te dalen.

De tegenstrijdigheid ligt niet eenvoudig in een verschil tusschen de FRANKLIN-ADAMS platen en de Selected Areas. De S. A. 47 omvat slechts 1 vierkanten graad van sterke absorbtie, waar binnenin de tellingen op de F. A. plaat een tekort 0,71 geven, dus ongeveer evenveel — wat ook vanzelf spreekt, daar de gebruikte grenshelderheid 15.9 uit deze Selected Areas zelf is afgeleid. Men zou een verklaring daarin kunnen zoeken, dat er inderdaad een reëel verschil in struktuur is tusschen S. A. 47 en gebied *A* eenerzijds (de kleine waarden voor *A* van 6.5 tot 9.4, d.w.z. het geringe tekort aan B.D. sterren zou dan als reëel beschouwd worden) en de overige absorbtiegebieden anderzijds; dus dat *A* door een anderen nevel op veel grootere afstand veroorzaakt wordt. Het is echter de vraag of de gegevens zeker genoeg zijn om zulk een conclusie te mogen trekken. De waarden voor de B. D. in *A* berusten slechts op een matig aantal sterren; de aantallen sterren 12—14 in S. A. 47 zijn zeer klein, zoodat toevallige onregelmatigheden in de verdeeling een groote rol spelen; en het opmaken van middelwaarden voor F. A. platen uit de onregelmatig verdeelde dichtheidsgetallen geeft ook onzekerheid. Hieruit blijkt alweer, dat wij nog over veel te weinig exacte gegevens omtrent sterdichtheid voor de zwakkere sterren 10^m—16^m over voldoend uitgebreide gebieden beschikken.

Nu berust, volgens § 2, de bepaling van den afstand der absorbeerende nevels hoofdzakelijk op de heldere sterren; de onzekerheid in de aantallen der zwakkere klassen is hierbij van niet veel beteekenis. Het zijn dus zoo goed als uitsluitend de gegevens van de B. D. waarop deze bepaling moet berusten. Wij vereenigen deze voor de 8 velden, om de toevallige fouten te verminderen, 2 aan 2 in volgorde van de N' (15,9) tot groepen. (zie tabel p. 536).

Ook nu geven de toevallige onzekerheden nog een onregelmatig verloop. Tusschen de drie eerste groepen *A*—*F* treedt bij deze grootteklassen geen duidelijk verschil op; daarom zijn deze nog tot een algemeen gemiddelde vereenigd, waarvoor de waarden in de laatste

	A B	C—F	D—E	G—H	ABCDEF
log $^{N'}/_{N}$ (6,6)	+0,04	—0,18	—0,30	—0,13	—0,15
„ (8,1)	—0,26	—0,26	—0,39	—0,15	—0,30
„ (9,4)	—0,37	—0,41	—0,38	—0,13	—0,39

kolom gelden, die in de teekening door stippen zijn voorgesteld. Men kan de geringe afhankelijkheid van de absorbtie ε op die wijze in rekening brengen, dat men correcties aanbrengt om ze op de grenswaarde te reduceeren; uit de figuur is te zien dat voor een waarde van ε, die tusschen 1 en 2 ligt, voor deze correcties de bedragen 0, 0,05 en 0,10 zijn aan te nemen. Uit de zoo verkregen grenswaarden 0,15 voor $m = 6,6$, 0,35 voor $m = 8,1$ en 0,49 voor $m = 9,4$ zijn dan direkt waarden van ϱ_1 af te leiden; men vindt daarvoor: $\varrho_1 = 6,1$; 5,5; 5,6. Bedenkt men, dat verschillen van resp. 0,05, 0,10 en 0,13 in deze drie grenswaarden een verandering van 0,6 in ϱ_1 geven, dan mag men aannemen, dat de onzekerheid van elk dezer waarden voor ϱ_1 beneden de eenheid blijft. Als gemiddelde vindt men dan $\varrho_1 = \mathbf{5,7} \pm 0,6$, waaruit volgt

$$\pi = \mathbf{0'',0072} \qquad r = \mathbf{140}\ \textit{parsecs}$$

waarbij r waarschijnlijk tusschen de grenzen 100 en 200 parsecs ligt.

De absorbeerende nevels in Taurus liggen dus achter de Hyaden op ongeveer 4 maal grooteren afstand. Zij strekken zich op de kaart van DYSON en MELOTTE over een uitgestrektheid van 30°, dus ongeveer 70 parsecs uit. De afmetingen van het langwerpige sterk absorbeerende gebied A zijn ongeveer 9° bij 3°, dus 20 bij 7 parsecs. BARNARD beschrijft in zijn catalogus daarin (en in het andere gebied B) liggende kleinere zwarte objecten van 1° (nr. 5 en 18), 8′ (nr. 24) en 4′ (nr. 28) afmeting; deze hebben dan afmetingen van lineaire 500000, 40000 en 30000 astronomische eenheden.

Natuurkunde. — De Heer P. EHRENFEST biedt eene mededeeling aan van den Heer J. M. BURGERS: „*Over vloeistofweerstand en wervelbeweging*".

(Mede aangeboden door den Heer J. P. KUENEN).

§ 1. *Inleiding*.

Door verschillende onderzoekers is gewezen op het verband tusschen de werveling door een lichaam dat zich in een wrijvende vloeistof beweegt, veroorzaakt, en den weerstand die dat lichaam bij de beweging ondervindt [1]). Het doel van onderstaande mededeeling is een poging om dit verband te formuleeren. Daarbij is een beschouwing van het weerstandskoppel achterwege gelaten; het onderzoek is beperkt tot de weerstandskracht.

De volgende onderstellingen worden gemaakt: De beweging van het lichaam mag een willekeurige wezen; echter moet de tijd sedert het begin der beweging verloopen, eindig zijn, en moet de snelheid steeds een eindige waarde hebben, terwijl volume-verandering van het lichaam uitgesloten zij. De vloeistof is onsamendrukbaar; ze is onbegrensd en op grooten afstand naderen snelheid en werveling tot nul volgens formules van den vorm:

$$\lim_{R=\infty} v = \frac{a}{R^{2+\delta}} \quad ; \quad \lim_{R=\infty} w = \frac{a}{R^{4+\delta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

waar $\delta > 0$ is [2]). De druk nadert tot een konstante waarde, die gelijk nul genomen wordt.

[1]) Zie onder-anderen:

O. REYNOLDS, Scientific Papers I. p. 184.

F. AHLBORN, Jahrb. d. Schiffbautechn. Gesellschaft 1904, 1905 en 1909.

TH. v. KARMAN u. H. RUBACH, Physik. Zeitschrift **13**, p. 49, 1912.

[2]) In verband met het karakter der vergelijkingen voor de diffusie van werveling zal (voor groote waarden van R) w zich vermoedelijk gedragen volgens een formule van het type: $\exp\left(-\frac{R^2}{t}\right)$. Zie in verband hiermee: C. W. OSEEN, Acta Math. **34**, p. 222, 1911.)

Bij de *stationnaire* beweging van STOKES — welke dus niet aan bovenstaande voorwaarden voldoet — neemt w slechts af volgens R^{-2}; bij de beweging volgens de formules van OSEEN en LAMB neemt w af volgens:

$$(1 + kR)\frac{\sin\theta}{R^2}\,exp\,\{-kR\,(1 - \cos\theta)\},$$

dus exponentieel zoo $\theta \neq o$, terwijl voor $\theta = o$: $w = o$. (Zie H. LAMB, Hydrodynamics, Cambridge 1916, p. 599.)

§ 2. *Impuls van een wervelsysteem.*

De impuls van een wervelsysteem wordt gedefinieerd als de impuls van een stelsel van krachten, dat de gegeven wervelbeweging momentaan in de rustende vloeistof kan teweegbrengen [1]).

Deze impuls is, wanneer de vloeistof onbegrensd is en geen lichamen bevat, gegeven door de formule:

$$\mathbf{J} = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\, dy\, dz\, \mathbf{r} \times \mathbf{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$= \varrho \Sigma C_i \mathbf{A}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(ϱ = dichtheid van de vloeistof: $\mathbf{r}$ is de radiusvektor van een punt x, y, z; $\mathbf{w}$ is de wervelvektor, gedefinieerd door $\mathbf{w} = \text{rot}\ \mathbf{v}$; C_i is de circulatie om een werveldraad; $\mathbf{A}_i$: het oppervlak door dien draad omsloten, als vektor opgevat) [2]).

§ 3. *Elementaire afleiding van de formule voor den weerstand.*

In een overigens onbegrensde vloeistof bevindt zich een lichaam; oorspronkelijk is alles in rust. Door bepaalde krachten die op het lichaam werken, brengt men dit in beweging; zij op het tijdstip t:

$\mathbf{f}$ = de resultante der krachten die op het lichaam werken;

$\mathbf{B}$ = de impuls of hoeveelheid van beweging van het lichaam $= \varrho' \Omega \mathbf{V}$, waar ϱ' de dichtheid, Ω het volume en $\mathbf{V}$ de snelheid van het zwaartepunt van het lichaam is (het lichaam is homogeen gedacht);

$\mathbf{I}$ = de impuls der vloeistofbeweging. Dan moet de tijdsintegraal van $\mathbf{f}$ gelijk zijn aan den totalen impuls van het stelsel; dus is:

$$\int^t \mathbf{f}\, dt = \mathbf{B} + \mathbf{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Is $\mathbf{W}$ de „vloeistofweerstand”, dan is:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en:

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{I}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

---

[1]) Zie KELVIN, Math. and Phys. Papers IV, p. 13 en vgl. (1869).

[2]) Zie H. LAMB, Hydrodynamics p. 209. De stelling wordt daar bewezen voor een wervelsysteem dat geheel in het eindige ligt; de integraal blijft echter konvergent voor een oneindig systeem, zoo voldaan is aan (1).

Om **I** te berekenen vervangt men het lichaam door een vloeistofmassa welke precies dezelfde beweging heeft als dit lichaam. De impuls van deze vloeistofmassa verhoudt zich tot die van het lichaam als ϱ tot ϱ'; dus is nu de totale impuls van de vloeistof:

$$\frac{\varrho}{\varrho'}\mathbf{B}+\mathbf{I}=\varrho\,\Omega\,\mathbf{V}+\mathbf{I} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Deze grootheid kan berekend worden volgens formule (3), waarbij opgemerkt dient te worden dat zoo het lichaam een rotatiebeweging heeft, in de plaatsvervangende vloeistofmassa werveldraden aanwezig zullen zijn, die in de algemeene som moeten worden opgenomen. Is de beweging slechts een translatie, dan vervalt dit: alle werveldraden liggen buiten den wand van het lichaam. Men heeft dus:

$$\varrho\,\Omega\,\mathbf{V}+\mathbf{I}=\mathbf{J}=\varrho\,\Sigma\,C_i\,\mathbf{A}_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

waaruit volgt:

$$\mathbf{I}=\varrho\,\Sigma\,C_i\,\mathbf{A}_i-\varrho\,\Omega\,\mathbf{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

en:

$$\mathbf{W}=\varrho\,\frac{d}{dt}(\Sigma\,C_i\,\mathbf{A}_i)-\varrho\,\Omega\,\frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Deze formule is de gezochte betrekking tusschen den weerstand en de in de vloeistof aanwezige werveling.

Bij een eenparige rechtlijnige beweging van het lichaam is $d\mathbf{V}/dt=0$, zoodat (11) vereenvoudigd wordt tot:

$$\mathbf{W}=\varrho\,\frac{d}{dt}(\Sigma\,C_i\,\mathbf{A}_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

§ **4**. *Bewijs van formule* (11).

Evenals boven wordt het lichaam vervangen door vloeistof, welke dezelfde beweging heeft als het lichaam en den druk nul [1]). Wanneer nu op de vloeistof de volgende krachten werken:

a. op die welke het lichaam vervangt: krachten $\mathbf{X}_I$, wier grootte per volume-eenheid bedraagt: $\mathbf{X}_I=\varrho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ($\mathbf{v}$ is de snelheid van de vloeistof);

b. op een dunne laag, die zich steeds daar bevindt waar het oppervlak van het lichaam zou zijn: krachten $\mathbf{X}_{II}$, gelijk aan de kracht door een element van het oppervlak van het lichaam op de vloeistof uitgeoefend (druk- en wrijvingskracht te zamen);

[1]) Dit wil zeggen dat de druk dezelfde waarde heeft als in het oneindige van de vloeistof.

dan zal de vloeistof juist de goede beweging uitvoeren: de vloeistof binnenin beweegt zich met de voorgeschreven snelheid, terwijl daar de druk nul is; en de uitwendige vloeistof beweegt zich evenzoo (en ondervindt denzelfden druk) als wanneer het lichaam aanwezig was. Ter wille van de kontinuïteit zullen ook de krachten $\mathbf{X}_{II}$ als volumekrachten (met eindige afgeleiden naar x, y, z) beschouwd worden welke op een zeer dunne laag werken [1]).

Men heeft nu:

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{X} = \iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{X}_I + \iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{X}_{II} = \varrho\,\Omega \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{W} \quad (13)$$

Stelt men nu anderzijds:

$$\mathbf{J} = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{r} \times \mathbf{w} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

dan is:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \;{}^{2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

waarin volgens de bekende formule:

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = rot\,\mathbf{X} + \varrho\,(\mathbf{w} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} - \varrho\,(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{w} + \mu\,\Delta\,\mathbf{w} \quad . \; . \quad (16)$$

(μ is de wrijvingskoëfficient van de vloeistof).

Substitueert men dit in (15), dan vindt men door uitwerking der integralen, dat op grond van (1) (deze voorwaarden zijn hiertoe voldoende) alles wegvalt op den term met $\mathbf{X}$ na, zoodat:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{r} \times rot\,\mathbf{X} =$$

$$= \iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{X} = \varrho\,\Omega\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{W} \quad . \; . \; . \quad (17)$$

Dus is:

$$\mathbf{W} = \varrho \frac{d}{dt}(\Sigma\, C_i\,\mathbf{A}_i) - \varrho\,\Omega\frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

in overeenstemming met (11).

§ 5. *Aanvullingen.*

I. Past men (15) en (16) niet toe op een onbegrensde vloeistof maar op een vloeistofmassa begrensd door een (stilstaand) oppervlak S, waarlangs $\mathbf{w}$ met zijn eerste afgeleiden nul is, dan vindt men:

---

[1]) Deze laag is niet de grenslaag uit de theorie van PRANDTL, ze moet daar tegenover nog dun zijn.

Buiten deze laag werken geen uitwendige krachten op de vloeistof.

[2]) De plaats en dus de radius-vektor $\mathbf{r}$ van elk element $dx\,dy\,dz$ worden als vaststaand beschouwd; dan moet van $\mathbf{w}$ het lokale differentiaalquotiënt genomen worden.

$$\frac{dJ}{dt} = \iiint\limits_{\omega} dx\,dy\,dz\,\mathbf{X} - \iint dS \varrho \left(\mathbf{n}\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\,v_n \right) \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

(ω is het door S omsloten volume; $\mathbf{n}$ de eenheidsnormaal op dS). De wrijving heeft dus geen direkten invloed op J.

Deze formule is verwant aan die, welke door VON KARMAN gebruikt is bij de berekening van den weerstand dien een cilinder ondervindt [1]).

II. In § 3 en § 4 is het bewegende lichaam vervangen door een vloeistofmassa, met een krachtenstelsel $\mathbf{X}_I, \mathbf{X}_{II}$. De krachten $\mathbf{X}_{II}$ zijn oppervlakte-krachten, waarvan is aangenomen dat ze door volume-krachten vervangen mochten worden. Deze substitutie zal nader bezien worden voor het geval dat het lichaam een translatie-beweging heeft; voorloopig wordt bovendien ondersteld dat deze eenparig is, zoodat $\mathbf{X}_I = 0$.

Langs den wand is $\mathbf{v}$ kontinu [2]), eveneens $\frac{\partial v_n}{\partial n}$; daarentegen zijn $\frac{\partial v_t}{\partial n}$ [3]) en de druk p in het algemeen diskontinu. De normale komponente van de oppervlakte-kracht F_n is gelijk aan den druk p_0 van de vloeistof tegen den wand; de tangentieele komponente F_t heeft de waarde: $-\mu\left(\frac{\partial v_t}{\partial n}\right)_0$. Men brenge nu twee oppervlakken aan, σ_i en σ_u, het eerste even binnen den wand van de vloeistof die het lichaam vervangt, het tweede er even buiten, zoodat hun onderlinge afstand ε klein zij. Naderhand moeten beide oppervlakken naderen tot den wand σ_0 van het lichaam. In deze „overgangslaag" vervange men p en v_t door een geleidelijk verloop p' en v_t', zoodat op σ_i en σ_u: p', v_t', en de afgeleiden van v_t' tot en met die van de derde orde gelijk zijn aan p, v_t, enz. (Langs σ_i zijn dus p' en de afgeleiden van v_t' alle nul).

Dan worden de volgende volumekrachten ingevoerd:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{normale komponente: } & f_n = \dfrac{\partial p'}{\partial n} \\[2ex] \text{tangentieele komponente: } & f_t = -\mu\,\dfrac{\partial^2 v'_t}{\partial n^2} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

---

[1]) VON KARMAN berekent de verandering van J uit de verandering van het wervelsysteem; door dit met de oppervlakte-integraal te vermeerderen, wordt de weerstand gevonden.

[2]) Zie hierover b.v. H. LAMB, Hydrodynamics, p. 572; O. REYNOLDS, Scientific Papers II, p. 238.

[3]) v_t, F_t, enz. moeten eigenlijk als vektoren geschreven worden ($\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{n}\,v_n$); dit is hier achterwege gelaten.

Deze krachten zijn van de orde ε^{-1}; integratie over de dikte van de laag levert op:

$$\left.\begin{aligned}\int f_n\,dn &= (p')_u = p_u\\ \int f_t\,dn &= -\mu\left(\frac{\partial v'_t}{\partial n}\right)_u = -\mu\left(\frac{\partial v_t}{\partial n}\right)_u\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wat van F_n en F_t verschilt met een bedrag van de orde ε.

III. Laat nu gedurende een tijdselement dt de krachten f *niet* werken. Dan verloopt de strooming onder den invloed van wrijving en drukkrachten; er heeft diffusie en konvektie van werveling plaats, enz. Daar de druk- en wrijvingskrachten alle eindig zijn zal de snelheid $\mathbf{v}$ slechts veranderen met een bedrag van de orde dt; σ_0 heeft zich verplaatst over een afstand $\mathbf{V}\,dt$ en is niet gedeformeerd. Langs σ_i en σ_u zal $\mathbf{v}$ echter niet meer de waarde $\mathbf{V}$ hebben. De impuls der vloeistofbeweging heeft zijn waarde onveranderd behouden.

Om nu die strooming te krijgen welke ontstaan zou zijn zoo de krachten f wel gewerkt hadden moet men de volgende bewegingen superponeeren:

a. Buiten σ_u is de verdeeling der werveling in orde, daar hier in geen geval krachten werken; hier moet dus een potentiaalstroom gesuperponeerd worden, welke volkomen bepaald is door:

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = V_n - v_n \quad (\text{langs } \sigma_u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

b. Binnen σ_i is geen werveling gekomen, daar hierlangs $\Delta w' = 0$ is. Dus moet ook hier een potentiaalstroom gesuperponeerd worden, zoodat overal $\mathbf{v} = \mathbf{V}$ wordt; ze is volkomen bepaald door de randvoorwaarde voor de normale komponente. [1])

c. Tusschen σ_i en σ_u moet een wervellaag komen ter aansluiting dezer stroomingen. De totale sterkte dezer laag is bepaald door:

$$\int \mathbf{w}^*\,dn = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} + \nabla \varphi^* - \mathbf{V}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

De struktuur van de laag moet zoodanig zijn dat de impuls gelijk is aan de tijdsintegraal van de resultante der krachten f:

---

[1]) Strikt genomen zal door de diffusie zoowel buiten σ_u als binnen σ_i de werveling invloed ondervonden hebben van de wijziging der verdeeling in de overgangslaag; dit bedrag is echter van de orde: $\exp\left(-\frac{1}{dt}\right)$, wat hier verwaarloosd is.

$$dJ = dt\iiint dx\,dy\,dz\,\mathbf{f} = \mathbf{W}\,dt\ ^{1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

IV. *Versnelde of vertraagde beweging.*

Is de beweging van het lichaam niet eenparig, dan moet nog een tweede stelsel van krachten door den wand van het lichaam op de vloeistof uitgeoefend worden. Deze krachten kunnen *buiten* σ_u slechts een *potentiaalstroom* doen ontstaan, waarvan de potentiaal φ^{**} bepaald is door:

$$\frac{\partial\varphi^{**}}{\partial n} = \delta V_n\ (\text{langs}\ \sigma_u) \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

en dus te berekenen is volgens de methoden der hydrodynamika voor ideale vloeistoffen [2]).

Binnen σ_i nemen alle snelheden toe met $\delta\mathbf{V}$, en in de overgangslaag komt een wervellaag van de sterkte:

$$\int \mathbf{w}^{**}\,dn = \mathbf{n} \times (\nabla\,\varphi^{**} - \delta\mathbf{V}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Over een eventueel aanwezige struktuur dezer laag valt niet direkt iets te zeggen; de impuls moet gelijk zijn aan dt maal de resultante van

---

[1]) De sterkte van de werveling in de grenslaag gevormd, wordt bepaald door rot $\mathbf{f}$; hierin zal zoowel f_n als f_t bijdragen. Daar f_t een maximum heeft in de laag (langs σ_i en σ_u is $f_n = o$ of eindig; in het midden der laag is f_n van de orde ε^{-1}), zal deze kracht een „*wervel-dubbellaag*" doen ontstaan: een positieve en een negatieve laag met intensiteiten van de orde ε^{-2} per volume-eenheid, op een afstand van de orde ε; zoodat de sterkte per oppervlakte-eenheid $\int \mathbf{w}^* dn$, en de impuls per oppervlakte-eenheid $\int \mathbf{r} \times \mathbf{w}^*\,dn$ beide eindig zijn. Met de door f_n gevormde laag is dit in het algemeen niet het geval; deze laag is enkelvoudig en bestaat uit draden die om het lichaam heen loopen.

Ter illustratie hiervan beschouwe men een schijf die zich in haar eigen vlak beweegt, en waarvan de dikte tot nul nadert. Dan wordt de resultante der drukkrachten nul, wat dus ook het geval moet zijn met den impuls der door f_n gevormde werveling. De resultante der wrijvingskrachten blijft *eindig* en is vrijwel onafhankelijk van de dikte van de schijf. De impuls van de grenslaag kan dus niet (of niet uitsluitend) daarop berusten dat ze uit werveldraden bestaat die de schijf omringen; ze moet haar impuls „in zich zelve" hebben, en moet een „dubbellaag" zijn.

Een dubbellaag is voor te stellen door $w = \dfrac{Ax}{2\nu t^{3/2}}\ \exp.\left(-\dfrac{x^2}{4\nu t}\right)$; de impuls bedraagt: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,w\,dx = 2\,A\,\sqrt{\nu\pi}$, onafhankelijk van t.

[2]) Zie b.v. H. LAMB, Hydrodynamics, Ch. V en VI.

alle extra-krachten die op de vloeistof gewerkt hebben (zoowel binnen σ_i als in de overgangslaag). Een gedeelte van den impuls (misschien de geheele) is te berekenen alleen uit de totale sterkte der laag, welke door (26) is gegeven; dit gedeelte moet overeenstemmen met wat berekend kan worden uit den potentiaal φ^{**} volgens de methoden der klassieke hydrodynamika [1]). Dit gedeelte van den impuls krijgt men terug bij een even groote snelheidsvermindering van het lichaam [2]).

Men kan nu III en IV kombineeren: de beschouwing van III blijft geldig voor een niet eenparige beweging, zoo men in (22) en (23) $\mathbf{V}$ vervangt door $\mathbf{V} + \delta\mathbf{V}$, de snelheid van het lichaam aan het einde van het tijdselement dt.

§ 6. *Samenvatting.*

Wanneer een lichaam in een vloeistof in beweging wordt gebracht ontstaat aan het oppervlak ervan een wervellaag. Deze diffundeert in de vloeistof tengevolge van de wrijving, en wordt door de strooming meegenomen, weggespoeld; aan het oppervlak wordt voortdurend nieuwe werveling gevormd, welke opnieuw diffundeert, enz. Voor het vormen van elke wervellaag is een zekere impuls noodig en het gezamenlijk bedrag der impulsen dat per sekonde geleverd moet worden, vormt den weerstand $\mathbf{W}$ dien het lichaam ondervindt.

---

1) *Voorbeeld*: bij den *bol* (straal $= a$) is voor $\delta V = 1$ de potentiaal $\varphi^{**} = \frac{1}{2} a^3 r^{-2} \cos \theta$. Hieruit volgt voor de tangentieele snelheid van de vloeistof langs het oppervlak: $-\frac{1}{2} \sin \theta$, terwijl de tangentieele snelheid van den bol zelf is: $+ \sin \theta$, zoodat de sterkte der wervellaag bedraagt:

$$\frac{3}{2} \sin \theta.$$

De impuls hiervan is:

$$\varrho \, \Sigma \, C_i \, A_i = \varrho \int_0^\pi a \, d\theta . \frac{3}{2} \sin \theta \cdot \pi a^2 \sin^2 \theta = 2\pi \varrho a^3.$$

Trekt men hiervan af het bedrag $\varrho \Omega = \frac{4\pi}{3} \varrho a^3$ voor den impuls van de vloeistof die den bol vervangt, dan blijft over de bekende waarde:

$$\frac{2\pi}{3} \varrho a^3 = \frac{1}{2} \varrho \, \Omega.$$

(LAMB, l.c. p. 116).

2) Men kan dezen „versnellingsweerstand" soms afzonderen van den totalen weerstand bij niet-eenparige beweging; zie G. COOK, An experimental determination of the inertia of a sphere, moving in a fluid, Phil. Mag. 39, p. 350, 1920.

De totale impuls van alle werveling tezamen op een bepaald oogenblik is gelijk aan de tijdsintegraal van **W**:

$$\int^{t} \mathbf{W}\, dt = \mathbf{I}(t) = \varrho \, \Sigma \, C_i \, \mathbf{A}_i - \varrho \, \Omega \, \mathbf{V} \, ;$$

de impuls is te berekenen uit de produkten:

(cirkulatie) . (oppervlak)

der afzonderlijke werveldraden.

Een gedeelte van dezen impuls is terug te krijgen wanneer men het lichaam remt; n.l. het gedeelte dat de klassieke hydrodynamika levert, en dat voor te stellen is door:

(„schijnbare massa”) . (snelheid van het lichaam).

Van de rest is vaak een klein gedeelte terug te krijgen; het grootste deel is echter verloren. [1])

Heeft men te doen met een *ideale* vloeistof (absoluut zonder wrijving), dan kan men deze wijze van beschouwing ook nog toepassen, mits men zegt dat de werveling steeds in een oneindig dunne laag op het oppervlak van het lichaam blijft zitten. Zé diffundeert niet en wordt ook niet weggespoeld. De impuls zit dus steeds in deze laag, en heeft de grootte:

(„schijnbare massa”) . (snelheid van het lichaam);

dit bedrag is geheel terug te krijgen wanneer men het lichaam remt.

Om een „niet-omkeerbaren” weerstand te krijgen, m. a. w. om impuls aan de vloeistof te geven die men niet terug kan krijgen, moet de wervelbeweging *buiten* deze laag treden, er moet dus diffusie van werveling zijn, al is deze nog zoo klein.

---

[1]) O. REYNOLDS vermeldt de volgende eenvoudige proef (Scientific Papers I, p. 188), die gemakkelijk te herhalen is: een lichaam dat zich in een vloeistof beweegt wordt plotseling stil gehouden; laat men het nu vlak daarna weer los, dan gaat het nog een korten afstand in de oorspronkelijke richting voort. De strooming in de vloeistof nà het remmen aanwezig heeft dus op het lichaam nog een kracht in voorwaartschen zin uitgeoefend, en heeft impuls teruggegeven aan het lichaam.

Palaeontologie. — De Heer EUG. DUBOIS biedt een mededeeling aan: *„De proto-Australische fossiele mensch van Wadjak, Java"*. II.

Natuurkunde. — De Heer P. EHRENFEST biedt een mededeeling aan: *„Opmerking over het paramagnetische gedrag van vaste stoffen"*.

Natuurkunde. — De Heer P. EHRENFEST biedt een mededeeling aan van den Heer G. KRUTKOW: *„Over de berekening van adiabatische invarianten"*.

(Deze mededeelingen worden in een volgend Zittingsverslag opgenomen).

Ter uitgave in de werken der Akademie wordt aangeboden:

1. door den Heer C. E. A. WICHMANN het manuscript van zijne verhandeling *„Die Vulkane der Sangi-Inseln"*;

2. door den Heer J. BOEKE, namens de Commissie voor het Hubrecht-fonds, het manuscript van eene verhandeling getiteld: *„Catalogue of the embryological material Lemuridae (Tarsius and Nycticebus) and Dermaptera (Galeopithecus)"*, bewerkt door den Heer DAN. DE LANGE JR.

De Voorzitter stelt dit manuscript in handen van de Heeren J. BOEKE en J. W. VAN WIJHE met verzoek om rapport, uit te brengen in de volgende vergadering.

Voor de boekerij der Akademie wordt ten geschenke aangeboden:

a. door den Secretaris, namens het rustend lid der Afdeeling, den Heer EMIL ROSENBERG te München, een exemplaar van diens werk: *„Die verschiedenen Formen der Wirbelsäule des Menschen und ihre Bedeutung"*, Teil I;

b. door den Heer F. A. F. C. WENT een exemplaar der dissertatie van den Heer H. L. VAN DE SANDE BAKHUIYZEN: *„Analyse der fototropische stemmingsverschijnselen"*;

c. door den Heer R. MAGNUS een exemplaar der dissertatie van den Heer A. M. M. VAN DER WILLIGEN: *De laxeerende werking van zwavel, calomel en phenolphtaleïne"*.

De vergadering wordt gesloten.

---

8 November 1920.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 30 OCTOBER 1920.

DEEL XXIX.

N°. 4.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het proces-verbaal der vorige vergadering wordt goedgekeurd.

De Heeren P. LANGEVIN, hoogleeraar te Parijs en P. WEISS, hoogleeraar te Straatsburg, die als gasten ter vergadering aanwezig zijn en het buitenlandsch lid, de Heer A. EINSTEIN, worden door den Voorzitter in de vergadering welkom geheeten.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Koloniën d.d. 7 October 1920, 7e Afdeeling N°. 73, met bericht dat Zijne Excell. het schrijven der Afdeeling van 28 September ll. N°. 55 over het stichten van een goed ingerichte Sterrewacht in Ned. Indië ter kennis van den Gouverneur-Generaal van Ned. Indië zal brengen.

Aangenomen voor kennisgeving.

3°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen d.d. 28 October 1920, N°. 3915, Afd. K. W. met bericht dat het door de Afdeeling, bij haar schrijven van 30 Maart 1920 N°. 20, gedaan voorstel om Nederland te doen toetreden tot de internationale Meterconventie door Zijne Exc. in overweging is genomen, doch dat het niet meer mogelijk was bij de samenstelling der ontwerp-begrooting van Zijn Exc.'s Departement voor het dienstjaar 1921 rekening te houden met een eventueelen post voor de kosten van toetreding. 't Ligt evenwel in de bedoeling van Zijne Exc. om hieraan bij de ontwerp-begrooting voor 1922 de noodige aandacht te schenken en, met het oog hierop, wordt de Afdeeling verzocht Zijne Exc. alsnog te willen inlichten omtrent het bedrag, dat eventueel voor die toetreding zou behooren te worden uitgetrokken en de wijze, waarop dit zou zijn toe te kennen.

In overleg met de leden der Afdeeling, die het voorstel bij de Afdeeling aanhangig gemaakt hebben, zullen den Minister de gevraagde inlichtingen door de Afdeeling verstrekt worden.

4°. Eene circulaire van het Comité J. C. OERSTED te Kopenhagen, waarbij, naar aanleiding van het feit dat honderd jaar geleden OERSTED's „*Experimenta circa effectum conflictus electrici in acum magneticum*" het licht zag, een *in facsimile* gereproduceerd exemplaar van die verhandeling aan de Afdeeling ten geschenke wordt aangeboden met daaraan toegevoegd eene Fransche, Italiaansche, Duitsche en Engelsche vertaling van dat geschrift en eenige biografische aanteekeningen over OERSTED, bewerkt door ABSALON LARSEN.

Aan het Comité is dank gezegd voor dit present-exemplaar met bericht dat het geplaatst zal worden in de boekerij der Akademie.

Embryologie. — De Heer J. BOEKE brengt, mede namens den Heer J. W. VAN WIJHE, het volgende rapport uit:

Ondergeteekenden, in de September-vergadering van de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen benoemd tot leden der commissie om rapport uit te brengen omtrent de verhandeling van Dr. DAN. DE LANGE JR., getiteld: „Catalogue of the embryological Material of Lemuridae (Tarsius spectrum and Nicticebus) and Dermaptera (Galeopithecus), N°. 1 of the Inventary of the Hubrecht-Laboratory Collection", hebben de eer, hierbij het volgende rapport uit te brengen:

Het geschrift van Dr. DAN. DE LANGE bevat een uitvoerige en zeer nauwkeurig bewerkte opgave van het in den titel genoemde embryologische materiaal, zoowel het bewerkte als het nog niet bewerkte gedeelte, zoodat men aan de hand van dezen catalogus zich direct een oordeel kan vormen van het voor onderzoek van de meest verschillende embryologische problemen beschikbare materiaal.

Hoewel het geschrift uit den aard der zaak geen nieuwe wetenschappelijke waarnemingen bevat of nieuwe gezichtspunten opent, zouden ondergeteekenden toch willen voorstellen, het onder de mededeelingen van het Hubrecht-Instituut in de Verhandelingen der Akademie op te nemen. Juist met het oog op het karakter van het Instituut als embryologisch centrum en voor de internationale beteekenis, die de commissie ad hoc bij de oprichting aan het Instituut hoopte te verschaffen, schijnt het ondergeteekenden van groot belang toe, dat onder de andere mededeelingen van wetenschappelijken aard, die van het Instituut uitgaan, ook een dergelijke beredeneerde catalogus wordt opgenomen, waardoor men ook in het buitenland in staat zal zijn, zich een oordeel te vormen over hetgeen door het Hubrecht-Instituut aan de embryologen, die dat wenschen, wordt ter beschikking gesteld.

Zij zouden derhalve aan uwe Afdeeling willen voorstellen, het bovengenoemde geschrift van Dr. DE LANGE in de Verhandelingen der Akademie op te nemen.

(*get.*) J. BOEKE.
„ J. W. v. WIJHE.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport om de verhandeling op te nemen in de werken der Akademie.

Aan den Heer DE LANGE zal hiervan kennis gegeven worden.

Anatomie. — De Heer J. W. VAN WIJHE brengt, mede namens den Heer C. WINKLER, het volgende rapport uit:

De ondergeteekenden hebben de eer Uwe vergadering het volgend verslag aan te bieden omtrent eene verhandeling van den Heer G. P. FRETS, getiteld: „The Heredity of Headform in Man".

Blijkens zijne inleiding is de schrijver uitgegaan van het denkbeeld, dat het onderzoek naar de wetten der erfelijkheid gebaat zoude zijn, door bij zooveel mogelijk leden van een aantal familiën den vorm van het hoofd te bepalen zooals deze kan worden afgeleid uit de maten van lengte en breedte en de berekening van den breedte-index.

Deze metingen heeft de schrijver verricht bij 3600 personen waarvan er 1545 behooren tot het mannelijk en 2055 tot het vrouwelijk geslacht.

De metingen geschiedden bij personen die de verpleegden in het gesticht „Maasoord" kwamen bezoeken en bij hunne familieleden.

Het manuscript bestaat uit een beknopten tekst, eenige graphische voorstellingen en een groot aantal tabellen.

Aan het slot van den tekst geeft de schrijver onder 18 nummers een résumé van zijn resultaten.

Geen dier resultaten heeft echter betrekking op de erfelijkheid of op de wet van MENDEL waarover ook in de inleiding gesproken wordt.

De ondergeteekenden zijn dan ook van oordeel, dat titel en inleiding veranderd dienen te worden en stellen Uwe vergadering voor hen te machtigen, daartoe in overleg te treden met den schrijver.

Zijn omvangrijk onderzoek heeft voornamelijk waarde als feitenmateriaal en de ondergeteekenden kunnen voorstellen het in de verhandelingen der Akademie op te nemen.

(*get.*) J. W. v. WIJHE.
„ C. WINKLER.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport om de verhandeling op te nemen in de Werken der Akademie, nadat voldaan zal zijn aan het verlangen der rapporteurs, om, in overleg met den schrijver, titel en inleiding der verhandeling te veranderen.

Aan den Heer FRETS zal hiervan kennis gegeven worden.

Plantkunde. — De Heer WENT doet een mededeeling namens Mej. Dr. CLARA ZOLLIKOFER: *„Ueber die tropistische Wirkung von rotem Licht auf Dunkelpflanzen von Avena sativa."*

(Mede aangeboden door den Heer MOLL.)

§ 1. *Einleitung.*

Die in den letzten Jahren allgemein gebräuchliche Verwendung von mässig starkem rotem Licht bei reizphysiologischen Arbeiten im Dunkelzimmer galt bisher als völlig harmlos, insofern die Pflanzen demselben nicht zu lange ausgesetzt waren. Speziell für Avena sativa hatte BLAAUW [1]) eine äusserst geringe Empfindlichkeit für die schwächer brechbaren Strahlen bis ins Grün festgestellt. Nur bei 1½—2 stündiger Einwirkung von starkem rotem Licht beobachtete er schwache phototropische Krümmungen. VOGT [2]) fand bei Dauerbeleuchtung mit schwachem rotem Licht eine geringere Endlänge der Avena-Koleoptilen und eine Erhöhung des Zuwachses in 24 Stunden, analog den Erscheinungen nach Einwirkung von sehr schwachem weissem Licht. In beiden Fällen handelte es sich um beträchtliche Lichtmengen. Genauere Feststellungen, wie weit tatsächlich das im Dunkelzimmer verwendete rote Licht als phototropisch unwirksam betrachtet werden darf, liegen nicht vor. Diese Lücke sollen die nachstehenden Untersuchungen ausfüllen. Sie beziehen sich einerseits auf die Einwirkung roten Lichtes auf das Längenwachstum der Koleoptile, anderseits auf phototropische Reaktionen. Es wurde versucht, durch genauere Bestimmung der verwendeten Lichtmengen die Grenze zu finden, oberhalb der die Wirkung des roten Lichtes nicht mehr unberücksichtigt bleiben darf, und einige Daten über den Verlauf der Reaktion zu gewinnen. Es handelt sich dabei, wie ausdrücklich betont sei, nicht um reines spektrales Rot, sondern um den Strahlenbezirk, den die im Dunkelzimmer meist gebrauchten Ueberbirnen aus Rubinglas durchlassen.

Die verwendete Lichtquelle war eine 100-kerzige Metallfadenlampe mit sehr dunkler Rubinglas-Ueberbirne der Ica—A.G., spektros-

---

1) BLAAUW, A. H. Die Perzeption des Lichtes. Rec. trav. bot. néerl. **V**, 1909.

2) VOGT, E. Ueber den Einfluss des Lichts auf das Wachstum der Koleoptile von Avena sativa. Zeitschr. f. Bot. **VII**, 1915.

kopisch geprüft. Die spektroskopische Kontrolle ergab, dass tatsächlich nur ganz wenige Strahlen im Orange durchgelassen wurden. Es waren vereinzelte von der Wellenlänge 609—613 $\mu\mu$ (Na-Linie = 589 $\mu\mu$), etwas zahlreichere von 613—623 $\mu\mu$; lichtstark war das Spektrum erst oberhalb 623 $\mu\mu$.

Die photometrische Bestimmung der Lichtstärke bereitete einige Schwierigkeiten und kann deshalb nur angenäherte Genauigkeit beanspruchen. Einmal war infolge von Stromschwankungen im Netz die Lichtintensität nicht ganz konstant. Sodann lässt sich mit dem Weber'schen Photometer, das mir zur Verfügung stand, genau nur weisses oder wenig gefärbtes Licht messen Es gelang mir aber mit einiger Uebung, den Punkt gleicher Helligkeit mit dem weissen Vergleichslicht doch angenähert zu bestimmen. Das Mittel aus einer grösseren Zahl von Messungen ergab für meine Lampe die überraschend geringe Lichtstärke von 0,08 HK, also eine ganz enorme Abschwächung durch das Rubinglas. Der mittlere Fehler beträgt dabei höchstens 10 %, sodass dieser Wert unbedenklich als Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen dienen kann, umsomehr als bisher überhaupt keine Zahlenangaben für rotes Licht vorliegen.

Die Versuche wurden ausgeführt in einem Dunkelzimmer des Botanischen Laboratoriums in Utrecht mit konstanter Temperatur von 22,5° C. und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 55—60 %. Als Objekt dienten Dunkelpflanzen von Avena sativa von einer Koleoptilenlänge von 15—35 mm, die 24—48 Stunden bereits in der konstanten Temperatur des Versuchsraums zugebracht hatten.

§ 2. *Wachstumsreaktion nach Einwirkung von rotem Licht.*

Die von VOGT [1]) bei Avena nach Anwendung relativ grosser Lichtmengen beobachtete Wachstumsreaktion ist von SIERP [2]) auch für Beleuchtungen bis zu 10 MKS herab festgestellt worden. Eine ähnliche Schwankung in der Zuwachsbewegung tritt auch auf, wenn vollständig dunkel erzogene Pflanzen rotem Licht ausgesetzt werden, und zwar genügen dazu schon sehr geringe Mengen.

Ich beobachtete die Zuwachsbewegung stets an einer einzelnen Pflanze, die in einem Thermostaten mit Wassermantel von Zimmertemperatur aufgestellt war. Die Temperatur in dessen Innenraum schwankte im Verlauf mehrerer Stunden um höchstens 0.2° C. Die Messung des Wachstums geschah alle 3 Minuten durch ein horizontal

---

1) VOGT, E., l. c.

2) SIERP, H., Ueber den Einfluss geringer Lichtmengen auf die Zuwachsbewegung der Koleoptile von Avena sativa. Ber. d. Deutsch. Bot. Ges. XXXVII, 1919.

eingebautes Mikroskop mit Mikrometer-Okular, in den ersten Versuchen bei 131 facher, später bei 71 facher Vergrösserung. Mit Hülfe eines Kathetometers konnte die Versuchspflanze rasch und präzis in der Vertikalen verschoben werden. Die Beleuchtung erfolgte in der von BLAAUW [1]) angegebenen Weise mittels 4 Spiegeln, durch welche das Licht allseitig horizontal auf die Pflanze geworfen wurde, während sie gegen direkt von oben einfallende Strahlen geschützt war. Ein fünftes, drehbares Spiegelchen warf das für die Ablesungen nötige Licht ins Mikroskop. Durch gut anschliessende Kappen aus schwarzem Papier konnten die 4 Seitenspiegel nach Bedarf verdunkelt werden. Der Weg des Lichtes von der Lampe bis zur Versuchspflanze betrug 45 cm., die von der Pflanze empfangene Intensität 0,4 MK. Zur Absorption der Wärmestrahlen diente eine zwischengeschaltete Wasserschicht von 5 cm. Dicke. Mit den Ablesungen wurde sofort nach der Einstellung im Thermostaten begonnen. Während derselben waren die Pflanzen 1—2 Minuten dem Licht ausgesetzt und erhielten bei allseitiger Belichtung 120—240 MKS. Von da an wurde für die Ablesungen alle 3 Minuten 10—12 Sekunden belichtet. Die Wirkung war eine deutliche, sofort einsetzende Wachstumsreaktion, die in Figur 1 graphisch dargestellt ist. Die Abszisse gibt die nach der Exposition verstrichene Zeit in Abschnitten von 3 Minuten. Als Ordinaten sind die Zuwachsgrössen in μ pro Minute für das betreffende Intervall aufgetragen.

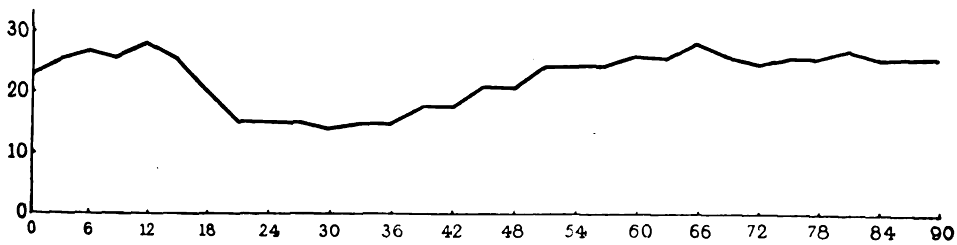


Fig. 1. Reaktionsverlauf nach Anfangsbelichtung von 220 MKS (5 $\times$ 0,4 MK. 110 Sek.).

Auf einen anfänglichen Wachstumsanstieg, der in der Mehrzahl der Fälle deutlich ausgeprägt war, folgt eine beträchtliche Verringerung der Wachstumsgeschwindigkeit bis zu einem Minimum, das meist rasch überschritten wurde, manchmal sich aber auch über mehrere Ablesungsintervalle erstreckte. Nach allmählichem Anstieg bis ungefähr zur ursprünglichen Höhe wird dann das Wachstum annähernd konstant. Durchschnittlich lag das Anfangsmaximum nach 9 Minuten und überschritt im Mittel um 27°/₀ die ursprüngliche

[1]) BLAAUW, A. H., Licht und Wachstum I, Zeitschr. f. Bot. VI, 1914.

Wachstumsgeschwindigkeit; das Minimum lag nach 26—29 Minuten mit einem mittleren Betrag von 66 % der Anfangsgeschwindigkeit. Die Reaktion dauerte ungefähr eine Stunde.

Eine ganz entsprechende Reaktion trat ein, wenn die 4 Seitenspiegel verdunkelt waren und nur $^1/_5$ der vorigen Lichtmenge durch den Ablesespiegel einseitig zugeführt wurde. Maximum und Minimum lagen an der gleichen Stelle und erreichten ungefähr dieselbe Höhe. Auch die Reaktionsdauer war annähernd die gleiche; in einigen Fällen nur trat ein wellenförmiger Verlauf mit einem zweiten und dritten Maximum auf und erschien die Reaktion stark in die Länge gedehnt

Diese Gleichartigkeit bei den zwei verschiedenen Lichtstärken liess zuerst vermuten, dass die ganze Wachstumsschwankung bedingt sein könnte durch die Uebertragung in den Thermostaten, obgleich Temperatur und Feuchtigkeit dort dieselben waren wie im übrigen Versuchsraum. Die Reaktion trat aber auch auf, wenn die Pflanzen vorher 2 Stunden vollständig unbelichtet im Thermostaten zugebracht hatten. Anderseits blieb sie aus, wenn eine Pflanze für 10—12 Minuten aus dem Thermostaten entfernt wurde, nachdem ihre Zuwachsbewegung eine gleichmässige geworden war. Es kann also nicht die Uebertragung in den Thermostaten sein, die die Änderung in der Wachstumsgeschwindigkeit hervorruft, höchstens wird sie dadurch vielleicht etwas verstärkt. Es handelt sich offenbar um eine Lichtwachstumsreaktion mit ganz charakteristischem Verlauf. Die weitgehende Uebereinstimmung bei den beiden verwendeten Intensitäten liegt wohl darin begründet, dass diese einander doch noch verhältnismässig nahe liegen. Wahrscheinlich würden sich bei Zuführung beträchtlich grösserer Lichtmengen eher Unterschiede ergeben. Dass der Reaktionsverlauf sich nicht mit SIERP's [1]) Kurven deckt, ist nicht erstaunlich, nachdem diese Kurven für verschieden grosse Mengen von gemischtem Licht sich als so stark unter einander abweichend ergeben haben. Ebenso verständlich ist es, dass die Schwankungen in viel engeren Grenzen bleiben und die ganze Reaktion in kürzerer Zeit verläuft. Da sie unmittelbar einsetzt, ist sie in der Hauptsache wohl als Wirkung der Anfangsbeleuchtung aufzufassen. In ihrem späteren Teil muss sie allerdings mehr oder weniger stark beeinflusst werden durch die in Intervallen von 3 Minuten sich wiederholenden kurzen Beleuchtungen. Ohne dieselben wäre vielleicht, VOGT's [2]) Befunden entsprechend, eine Ueberschrei-

---

[1]) SIERP, H., l. c.

[2]) VOGT, E., l. c.

tung der anfänglichen Wachstumsgeschwindigkeit und länger anhaltende Wachstumsförderung zu erwarten, die nun aber durch die sich regelmässig wiederholenden Belichtungen herabgedrückt wird. Es wird durch diese allmählich eine bestimmte Höhe der Lichtstimmung erreicht, indem die Pflanze sich an die regelmässige Lichtzufuhr anpasst und zu einem gewissen Gleichgewichtszustand gelangt, der sich in der schliesslich erreichten Konstanz des Wachstums äussert. Bei Verdunklung von mindestens 20—30 Minuten sinkt die „Lichtstimmung" wieder so weit, dass erneute Belichtung wieder eine neue Wachstumsreaktion hervorrufen kann. Die Gewöhnung an eine bestimmte Lichtzufuhr ergibt sich auch daraus, dass Pflanzen nach 1—2 stündiger Beobachtung auf eine weitere Erhöhung der Lichtmenge durch eingeschaltete Dauerbeleuchtung von 20—30 Minuten kaum mehr reagierten. Die Empfindlichkeit erscheint also merklich herabgesetzt.

§ 3. *Tropistische Reaktion auf rotes Licht.*

Einer Lichtwachstumsreaktion im Sinne der Blaauw'schen Theorie mussten phototropische Krümmungen oder doch deren Anfangsstadien entsprechen, falls die Lichtmengen einseitig zugeführt wurden. Tatsächlich war bei einseitiger, nicht zu schwacher Belichtung die Wachstumsreaktion von deutlicher Asymmetrie der Koleoptilenspitze begleitet. Diese wurde bei Dauerbelichtung von 30 Minuten schon nach 15 Minuten mikroskopisch sichtbar, nach 75 Minuten auch makroskopisch deutlich. Nach einer Anfangsbelichtung von 4 Minuten und darauf folgender Wachstumsbeobachtung kam es zur mikroskopischen Asymmetrie nach 45 Minuten und bis zur makroskopischen Wahrnehmbarkeit derselben nach $1^1/_2$ Stunden. Die einseitige Belichtung wurde erreicht durch Verdunklung zweier Seitenspiegel und Einfügung eines weiteren Spiegels zwischen die beiden andern. Die zugeführte Lichtmenge ($4 \times 0,4$ MK pro Sekunde einschliesslich des Ablesespiegels) betrug im letztern Fall immer noch etwa 600 MKS bis zum Eintritt einer mikroskopisch sichtbaren Spitzenasymmetrie. Demgegenüber zeigten nur makroskopisch beobachtete Kontrollpflanzen, denen eine bestimmte Lichtmenge in kurzer Zeit zugeführt wurde, dass schon viel kleinere Mengen genügten, um sogar deutliche Krümmungen hervorzurufen, besonders wenn auf dem Klinostaten die geotropische Gegeninduktion aufgehoben wurde.

Zur genaueren Feststellung, bei welchen Mengen die phototropische Wirksamheit des roten Lichtes deutlich wird, benutzte ich Serien von 20—25 Keimlingen, die reihenweise in 20 cm langen Blech-

kästchen gezogen waren und nur makroskopisch beobachtet wurden. Zur Belichtung diente die gleiche Lampe. Die Kästchen wurden, in der Längsrichtung etwas schräg aufgestellt, damit die Pflanzen einander nicht beschatteten, in einem phototropischen Kasten mit Camera-Verschluss exponiert. Die mittlere Lichtstärke betrug bei den meisten Versuchen 0,24—0,35 MK; für die vorderste Pflanze war die Intensität je nach der Entfernung von der Lampe 2 bis 3 Mal so hoch als für die hinterste. Die kleinen Lichtmengen bis 135 MKS wurden in 1½—7 Minuten zugeführt, die höheren in 20—30 Minuten, bzw. 1 Stunde. Nach der Exposition kamen die Pflanzen auf einen PFEFFER'schen Klinostaten und rotierten im Dunkeln um die horizontale Achse, um die phototropische Reaktion rein zu erhalten. Die zur Kontrolle des Reaktionsverlaufes unerlässliche Verwendung von rotem Licht wurde aufs äusserste eingeschränkt und streng darauf geachtet, dass das Licht stets senkrecht zur Krümmungsrichtung einfiel, die Reaktion also nicht verstärken konnte. Die erste Beobachtung machte ich nach Verlauf von 15 oder 20 Minuten, zu dem Zeitpunkt wo der sichtbare Reaktionsbeginn zu erwarten war, die folgenden in der Regel alle 10 Minuten.

Die kleinste Lichtmenge, mit der in allen Fällen noch eine phototropische Reaktion, meist noch deutliche Krümmungen, erhalten wurden, betrug 15—30 MKS. Der Schwellenwert für die Erzielung einer makroskopisch sichtbaren Reaktion dürfte bei 8—10 MKS liegen. Mit dieser Lichtmenge wurden in mehreren Versuchen teils ganz schwache Krümmungen, teils noch deutliche Spitzenasymmetrie erhalten.

Zum zeitlichen Verlauf der Reaktion gibt Tabelle 1 einige Daten.

TABELLE 1.

Reaktionsverlauf nach Reizung mit verschiedenen Mengen von rotem Licht.

Lichtintensität in HK	Dauer der Reizung	Lichtmenge in MKS	1. pos. Reaktion: Beginn nach Min.	1. pos. Reaktion: Höhepunkt nach Min.	neg. Reaktion nach Min.	2. pos. Reaktion: Asymetrie nach Min.	2. pos. Reaktion: Krümmung nach Min.
0,16—0,32	50 Sek.	8—16	15	20	30—40	—	–
„ „	94 Sek.	15 -30	20	30	40	50	60
„ „	187 Sek.	30—60	15	20	30—40	50	60
„ „	7 Min.	67—134	20	25—30	40—50	60—70	90
0,32--0,89	20 Min.	384—1068	15—20	25—30	45	55	60
0,047—0,066	1 Std.	169—238	?	?	60	75	110

Die Reaktion zeigt eine weitgehende Gleichförmigkeit für alle untersuchten Lichtmengen. Eine gewisse Ausnahmestellung nehmen nur einige Fälle rein negativer Krümmung ein. Nach 15—20 Minuten wird die erste positive Reaktion sichtbar, die in der Regel nicht über eine deutliche Spitzenasymmetrie hinausgeht. Ihr folgt eine sehr deutliche negative Spitzenasymmetrie, welche 30—40 Minuten nach Beginn der Reizung ihren Höhepunkt erreicht und abgelöst wird von der zweiten positiven Reaktion. Diese beginnt in der Regel 60—70 Minuten nach der Induktion und führt dann bis zur Krümmung. 80—120 Minuten nach Reizbeginn fängt in der Regel der Rückgang der Krümmung an.

Eine Abhängigkeit der Reaktionszeit von der Reizmenge, wie sie ARISZ [1]) festgestellt hat, ist aus Tabelle 1 nicht zu ersehen. Sie besteht aber sicherlich in gewissen Grenzen auch für rotes Licht, denn bei ein und derselben Serie setzte meistens die Reaktion in der vorderen Hälfte um 5—10 Minuten früher ein als in der hinteren. Ebenso nimmt die Stärke der Krümmung mit wachsender Lichtmenge zu. Dafür sollen in einer ausführlicheren Publikation Belege gegeben werden. Das Ausbleiben der negativen Krümmung bei schwachen Intensitäten gilt dagegen für rotes Licht nicht. Eine allerdings rasch vorübergehende, aber vollständig deutliche negative Reaktion war stets festzustellen zwischen der ersten und zweiten positiven Reaktion. Wo die negative Reaktion als Zwischenstadium erschien, ging sie nie weiter als bis zur zweifellosen Spitzenasymmetrie. Kam es dagegen bis zur negativen Krümmung, so blieb die zweite positive Reaction aus. Im Widerstreit der beiden Bewegungen wurde also stets die eine ganz oder teilweise unterdrückt. Fälle von rein negativer Reaktion kamen besonders bei kleinen Lichtmengen (15—60 MKS) vor. Die Bedingungen für ihr Auftreten bleiben noch näher zu untersuchen. Es mag hier darauf hingewiesen werden, dass CLARK [2]) die negative Reaktion bei um so kleineren Lichtmengen auftreten sah, je geringer die Lichtintensität war. Demnach wäre es nicht überraschend, dass bei den äusserst niedrigen Intensitäten des roten Lichtes die negativen Krümmungen bei so kleinen Lichtmengen erscheinen. Da sie in meinen Versuchen sämtlich bei der Rotation auf dem Klinostaten auftraten, werden hier die von ARISZ gegen CLARK's Beobachtungen erhobenen Bedenken hinfällig.

Als praktische Folgerung aus diesen Ergebnissen wird künftig noch

[1]) ARISZ, W. H. Untersuchungen über den Phototropismus. Rec. trav. bot. néerl. XII, 1915.

[2]) CLARK, O. L., Ueber negativen Phototropismus bei Avena sativa. Zeitschr. f. Bot. V. 1913.

grössere Vorsicht in der Verwendung von rotem Licht zu fordern sein. Auch andere Versuchsobjekte für Dunkelversuche werden erst auf ihre Empfindlichkeit dagegen untersucht werden müssen. Besonders wo es sich um Reaktionen in der Nähe der Schwellenwerte handelt, wird die Möglichkeit phototropischer Induktion durch rotes Licht zu berücksichtigen sein. Genauer als bisher müssen auch die roten Ueberbirnen nachgeprüft werden. Als „spektroskopisch geprüft" sind sehr verschieden dunkle Rubingläser im Handel, und der Spektralbezirk, den die durchgelassenen Strahlen umfassen, erstreckt sich bei etwas helleren Gläsern merklich weiter ins Gelb hinein,

Nach Blaauw's [1]) Feststellung, dass sogar spektrales Rot tropistisch keineswegs ganz unwirksam ist, kann es nicht überraschen, dass sich auch mit rotem Licht ausgeprägte phototropische Reaktionen erzielen lassen. Unerwartet erscheinen nur die geringen, dafür erforderlichen Lichtmengen. Wahrscheinlich liegen bei den eingangs zitierten Beobachtungen von Blaauw und Vogt starke Ueberbelichtungen vor. Arisz [2]) hat die Menge weissen Lichtes, die die stärkste „Maximalkrümmung" hervorruft, zwischen 100 und 137 MKS. gefunden. Es ist zu vermuten, dass sie für rotes Licht nicht höher, sondern eher niedriger liegen wird. Bei dazwischenliegenden Reizmengen würde sich vielleicht eine mehr oder weniger ausgedehnte Indifferenzzone ergeben.

Das Auftreten einer charakteristischen Wachstumsreaktion nach allseitiger, wie nach einseitiger Bestrahlung mit rotem Licht spricht für Blaauw's Auffassung der phototropischen Erscheinungen. Es ist zu vermuten, dass sich auch für diese Strahlen bis zu den kleinsten tropistisch wirksamen Mengen herab die Lichtwachstumsreaktion bei geeigneter Versuchsanordnung nachweisen liesse.

Utrecht, Oktober 1920. *Botanisches Laboratorium.*

[1]) Blaauw, A. H., 1909 l. c.
[2]) Arisz, W. H., l. c.

Scheikunde. — De Heer F. M. JAEGER biedt eene mededeeling aan, getiteld: „*Nog enkele Opmerkingen naar aanleiding van de* RÖNTGEN*beelden, die bij Doorstraling van elkaar onder zekeren hoek kruisende Mica-lamellen verkregen worden.*"

In eene voor korten tijd gepubliceerde mededeeling [1]) over de RÖNTGENbeelden, welke bij doorstraling van een systeem van elkaar onder bepaalde hoeken φ kruisende mica-lamellen verkregen waren, werd op pag. 1133 in eene Noot gezegd, dat het verkregen beeld oogenschijnlijk *niet* geïnterpreteerd kon worden als de eenvoudige superpositie van de beelden, die met behulp van elk der samenstellende lamellen afzonderlijk verkregen werden, maar dat het scheen, alsof de stralen, die eene lamel gepasseerd hadden, in de onmiddellijk daarop volgende op eene of andere wijze zóódanig beïnvloed werden, dat het eindresultaat merkbaar van de combinatie der ten opzichte van elkaar over den hoek φ gedraaide beelden verschilde. Dit besluit was vooreerst gegrond op eene vergelijking van de stereografische projectie der samengestelde beelden met het beeld, dat door de n maal herhaalde superpositie van de stereografische projectie van het RÖNTGENbeeld eener enkele lamel verkregen was; en voorts op het feit, dat in het samengestelde beeld een groot aantal der buitenste vlekken ontbraken, welke in het beeld der afzonderlijke lamellen met relatief sterke intensiteit voor den dag traden. Tevens werd echter eene systematische onderzoeking van dit verschijnsel in uitzicht gesteld, aangezien het toch met de gangbare interpretatie van het diffractieverschijnsel in tegenspraak geacht moest worden.

Op mijn verzoek heeft collega HAGA die proeven thans in het Natuurkundig Laboratorium alhier uitgevoerd; gaarne betuig ik hem voor zijne moeite en welwillendheid hierbij nogmaals mijn dank. Het resultaat is, zooals verderop blijken zal, dat het in bedoelde Noot gezegde in zijne algemeenheid *niet* juist kan heeten, en bij nader onderzoek zijn wij tot de slotsom gekomen, dat de vroeger verkregen beelden tenslotte tòch in hoofdzaak als eene superpositie van de over den hoek φ ten opzichte van elkaar gedraaide beelden der afzonderlijke lamellen beschouwd moeten worden, waarbij dan bepaalde wijzigingen tengevolge van beneden te noemen oorzaken optreden kunnen.

[1]) F. M. JAEGER, deze Verslagen, **28**, 1127, (1920); Proceed. **22**, 815, (1920).

De bedoelde proefnemingen werden verricht met twee zeer dunne, circa 0,22 mM. dikke mica-lamellen, welke door splijting uit hetzelfde mica-kristal verkregen waren, en die over willekeurig variable hoeken φ ten opzichte van elkaar gekruist konden worden. In alle onderzochte gevallen, waarin de hoeken φ tusschen 0° en 60° gevarieerd werden, bleken de verkregen beelden geheel en al de superpositie te zijn van de beelden der afzonderlijke dunne lamellen. Door dit resultaat werd het in hooge mate waarschijnlijk, dat de vroeger verkregene, samengestelde beelden tòch tenslotte evenzoo zulke superpositie's zouden blijken. Ten einde dit nader te onderzoeken werd van de oorspronkelijke foto eener enkele lamel, waarnaar Fig. 1 der Plaat vervaardigd was, een negatief gemaakt en vervolgens daarvan een aantal diapositieven op stukken fotografischen film. Daarna werden deze film-diapositieven zorgvuldig onder den juisten hoek φ op elkaar gestapeld, op dezelfde wijze als de opeenvolgende lamellen in de mica-stapels. De aldus verkregen combinatie werd nu bij doorvallend licht, met de vroeger verkregen samengestelde beelden nauwkeurig vergeleken.

Het bleek, dat weliswaar enkele vlekken der afzonderlijke beelden niet geheel en al op andere vielen, maar dat ook in dit geval toch hun onderlinge afstand klein genoeg geacht kon worden, om te zamen den indruk van ééne intensieve vlek te geven. Als men deze omstandigheid in aanmerking neemt, is het gecombineerde beeld *in hoofdzaak* werkelijk met het samengestelde fotografische beeld overeenstemmend. Toch zijn er afwijkingen: enkele vlekken ontbraken in de foto's der mica-stapels, welke in het filmbeeld relatief sterk zichtbaar waren; andere waren aanzienlijk flauwer dan in het filmbeeld en in het algemeen was de relatieve intensiteitsverhouding der vlekken eene andere, dan die in het filmbeeld.

Ten deele worden deze verschillen ongedwongen verklaard door de werking der reeds vroeger opgemerkte *selectieve absorptie* van bepaalde golflengten der door de wolfraam-antikathode in de *Coolidge*-buis uitgezonden stralen in de dikkere lagen van het kristallijne medium. Inderdaad kon bijv. met behulp van een 2,35 mM. dik mica-kristal bewezen worden, dat bepaalde vlekken in het daarmee verkregen diffractie-beeld, zoo o. a. de middelste vlek van het eerste kransje beneden het centrum in Fig. 1 der Plaat, — aanmerkelijk zwakker waren dan de overeenkomstige vlekken in het beeld eener 0,22 mM. dikke lamel van datzelfde kristal; en juist op diezelfde plaat een ontbraken nu o.a. ook de vlekken in het samengestelde beeld van den circa 3,5 mM. dikken mica-stapel. Door opzettelijke proeven, waarbij de belichtingsduur zóó gekozen was, dat de invloed van solarisatie-

verschijnselen bij de meest intensieve vlekken zeker was uitgesloten, kon bewezen worden, dat zulk eene selectieve verbleeking van een aantal vlekken ten opzichte der overige werkelijk plaats greep, wanneer de stralen gedwongen waren om dikkere lagen van het kristal te passeeren. Die selectieve absorptie is dus zeker voor een deel verantwoordelijk voor de abnormale relatieve gradatie in de intensiteit der vlekken van het samengestelde beeld, zooals die voor den dag komt bij vergelijking met die in de film-combinatie. Maar daarbij is óók nog een tweede factor in het oog te vatten, nl. de sterke sluiering, welke de origineele foto's van de mica-stapels alle vertoonen; eene sluiering, die in de oorspronkelijke foto's óók het onzichtbaar worden van de buitenste kransen van zeer flauwe vlekken in het beeld eener enkele lamel ten gevolge heeft, omdat de ontwikkeling der platen niet lang genoeg kon worden voortgezet, en die aldus mede de schuld is van het misleidend aspect dier samengestelde beelden, waardoor zij van eene directe superpositie der afzonderlijke lamellen-beelden principieel verschillend schenen. Dat nevens dit alles, ook het gebruik der stereografische projectie's, in plaats van de film-beelden zelve, vroeger tot het thans onjuist gebleken besluit gevoerd heeft, is eigenlijk niet verwonderlijk: want in die stereografische projectie's is toch de intensiteit der verschillende vlekken niet op grond van fotometrische bepalingen, maar op zuiver subjectieve wijze geschat geworden, waardoor bij vergelijking van *verschillende* stereografische beelden, eigenlijk onvergelijkbare intensiteiten door den waarnemer tegen elkaar worden afgewogen. Deze omstandigheden verklaren, waarom het wezen van het samengestelde beeld, dat nu principieel toch eene superpositie blijkt te zijn van de afzonderlijke beelden der samenstellende lamellen, vroeger niet als zoodanig herkend werd. De sluiering der platen is onder die factoren echter waarschijnlijk gewichtiger dan de ongelijke verzwakkingen der vlekken door de selectieve absorptie. In elk geval is dus van een nieuw, bij de thans algemeen aanvaarde interpretatie dier diffractie-verschijnselen onverklaarbaar schijnend fenomeen, geen sprake.

Natuurkundige en Fysisch-Chemische Laboratoria der Rijks-Universiteit.

Groningen, October 1920.

Scheikunde. — De Heer J. BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan over: *„De oriënteering van de groepen in de wijnsteenzuren en het beginsel der optische superpositie"*.

Het resultaat, waartoe J. COOPS en ik bij de toepassing van de boorzuur-methode op de wijnsteenzuren en enkele hunner derivaten gekomen zijn, nml. dat de hydroxylgroepen in de actieve zuren dichter bij elkander gelegen zijn dan in het inactieve zuur, bewijst dat de oriënteering der groepen in deze beide molekulen ongelijk is.

Ten einde den verschillenden stand der OH-groepen te verklaren moet men aannemen, dat de groepen afstootende werkingen op elkander uitoefenen, waarvan het bedrag afhankelijk zal zijn van den aard der groepen, zij zullen aanleiding moeten geven tot min of meer ingrijpende verschikkingen in de molekulen.

Dit brengt mee, dat de beide molekuul-helften van het antiwijnsteenzuur niet meer elk voor zich identisch zijn met de overeenkomstige molekuul-helften der actieve zuren.

Dientengevolge zal het intreden van een optisch actieve groep in de beide helften van het antiwijnsteenzuur *niet* dezelfde rotatie kunnen te weeg brengen als zij in de overeenkomstige helften der actieve zuren bewerkt of algemeener gesproken: *Het beginsel der optische superpositie*, zooals het veelal uitgesproken wordt, *kan niet juist zijn*, omdat met de bovenbedoelde verschikkingen geen rekening is gehouden. De boorzuur-onderzoekingen bevestigen derhalve langs een geheel onafhankelijken weg de beschouwingen van PATTERSON[1]) en de resultaten der naar aanleiding daarvan verrichte onderzoekingen.

Met het oog op de gevolgtrekkingen, die uit de kennis der oriënteering van de groepen in de verzadigde molekulen kunnen gemaakt worden, moge iets nader op de beteekenis van dit beginsel worden ingegaan.

VAN 'T HOFF heeft er zich in den 3^{den} druk van „die Lagerung der Atome im Raum" zeer voorzichtig over uitgelaten.

Op pag. 95 zegt hij . . . (es) liegt bei Körpern mit mehreren asym- „metrischen Kohlenstoffatomen der Gedanke nahe, die Gesamtdrehung „auf die von den einzelnen asymmetrischen Kohlenstoffen herrührenden Teildrehungen zurückzuführen."

---

[1]) PATTERSON en TAYLOR Trans. **87**, 33 (1905); P. en KAYE Trans **89**, 1884 (1906), **91**, 705 (1907); P. en D. PATTERSON Trans **107**, **142** (1915).

Verder bij het vergelijken van de verschillende zuren, die bij oxydatie der pentosen ontstaan, zooals arabonzuur, enz.:

„Nimmt man an, dass die von dem oberen asymmetrischen Kohlen- „stoff (α-C-atom) ausgehende Drehung von den sterischen Umlage- „rungen in den anderen unbeeinflusst bleibt so werden die Drehungen in folgender Weise darstellbar:

$$+ A - B - C; \qquad + A + B + C \text{ enz.}$$

De formuleering van VAN 'T HOFF is dus feitelijk de volgende: Indien de draaiing aan één der asymm.-C-atomen *niet* gewijzigd wordt door de sterische omleggingen aan de andere C-atomen, dan zal de draaiing van het molekuul gelijk zijn aan de algebraische som der deeldraaiingen van de aanwezige asymmetrische koolstofatomen.

Door aan te nemen, dat de sterische verschikkingen van geen invloed zullen zijn, een op zich zelf onwaarschijnlijke veronderstelling, is deze regel onderwerp kunnen worden van verschillende onderzoekingen. VAN 'T HOFF zelf vermoedde blijkbaar, dat de sterische verschikkingen van zeer weinig invloed zouden zijn, (l.c. p. 97) maar hoe dit ook zij, juist uit doeltreffende onderzoekingen moest dit of het tegendeel blijken en indien het laatste het geval is, kan uit de afwijkingen van den regel belangrijk materiaal over deze verschikkingen in het molekuul worden verworven.

Men kan nml. de afwijkingen van den regel *geheel* op rekening brengen van den invloed der verschikkingen, daar de molekulaire rotatie even zeker gelijk aan de algebraische som der *gecorrigeerde* deelrotaties is als het molekulair gewicht de som is der gewichten van de atomen.

2. Neemt men dus eerst aan, dat een sterische verandering aan een der asymmetrie-centra van een stof geen invloed heeft op de rotatie der andere, dan zou, wanneer de draaiing van de eerste voorgesteld wordt door $\alpha + \beta + \gamma \ldots$, die van de gewijzigde stof $= - \alpha + \beta + \gamma \ldots$ enz.

PATTERSON heeft er nu ten eerste op gewezen, dat dit niet juist kon zijn, maar vervangen moest worden door de uitdrukking $- \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \ldots$ en ten tweede, dat de onderzoekingen, die ter controleering van het principe waren uitgevoerd ondeugdelijk of niet afdoende waren.

WALDEN [1]) had de $[M]_D$ bepaald voor de volgende stoffen:

I	i-amyl-l-lactaat			$= - 10.21$
II	l- „	i-	„	$= + 4.22$
III	l- „	l-	„	$= - 6.22$

[1]) Z. Ph. Chem. **17**, 725 (1895).

en aangezien $I + II = III$, meende hij daarmede bewezen te hebben, dat l-amyl en d-amyl hetzelfde effect hebben op de draaiing van de l-lactylgroep, alleen in tegengestelden zin, dat zij dus ongestraft kunnen verwisseld worden en het beginsel der optische superpositie in dit geval bevestigd wordt.

PATTERSON vestigt er nu de aandacht op, dat dit onjuist is, want

I is een mengsel van ½ (l-amyl-l-lactaat) + ½ (d-amyl-l-lactaat)
II „ „ „ „ ½ (l „ l „ + ½ (l „ d „)
III „ de eenvoudige stof l-amyl-l-lactaat.

Veronderstelt men nu, dat er door de vervanging van l-amyl door d-amyl *in de l-lactaat*-groep een verandering $= p^{\circ}$ plaats grijpt, terwijl de amyl-groep een wijziging $= q^{\circ}$ ondergaat [de oorspronkelijke draaiingen van l-amyl $= \alpha$ en van l-lactaat $= \beta$ nemende] dan zal de rotatie van $I = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}p = \beta + \frac{1}{2}(p-q)$

$$\text{van } II = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}p = \alpha - \tfrac{1}{2}(p-q)$$

waarbij te bedenken is, dat de verandering door de vervanging van l-amyl door d-amyl op de l-lactaat-groep uitgeoefend juist tegengesteeld zal zijn aan de verandering, die de vervanging van d-amyl door l-amyl op de d-lactaat-groep uitoefent.

Het spreekt dus van zelf, dat $I + II$ steeds $= III$ zal gevonden ook al heeft er een wederzijdsche rotatie-verandering plaats. Men kan deze dus langs den door WALDEN gevolgden weg niet ontdekken en mag uit het verkregen resultaat niet besluiten, dat het beginsel uitkomt.

PATTERSON meent nu door vergelijking van actieve derivaten van l-, d- en i-wijnsteenzuur met elkander tot een definitieve oplossing te kunnen komen [1]).

Het komt mij voor dat dit volkomen juist is, ik wil zijn betoog in een eenigszins gewijzigden vorm en vollediger weergeven.

Voert men in de wijnsteenzuren in de beide molekuulhelften een gelijke actieve groep in, dan zal, indien het beginsel uitkomt, de rotatie van het derivaat van het inactieve zuur = het gemiddelde van de rotaties van de overeenkomstige derivaten der actieve zuren.

Beschouwt men bijv. de l-menthylesters en noemt men de rotatie der menthylgroep $= \alpha$, die van elk der wijnsteenzuurhelften $+$ of $- \beta$ dan zijn deze rotaties:

l-zure-dimenthylester	d-zure-dimenthylester	i-zure-dimenthylester
$2\,(\alpha - \beta)$	$2\,(\alpha + \beta)$	$2\,\alpha + \beta - \beta = 2\alpha$

gemiddeld $= 2\alpha$.

---

[1]) Zie ook VAN 'T HOFF, l. c. p. 96.

Ondergaan de rotaties der menthylgroepen door de vervanging van l- door d-wijnsteenzuurhelften een wijziging, terwijl de wijnsteenzuurdeelen zelf eveneens een verandering ondergaan, dan zal men dit echter door dezelfde vergelijkende onderzoeking toe te passen niet waarnemen.

Neemt men aan, dat de vervanging van de l-tartraathelft door de d-tartraathelft in de éene menthylgroep een rotatie-verandering $= p^0$, in de andere $= p'$ teweegbrengt terwijl de overeenkomstige wijnsteenzuurhelften de wijzigingen q^0 en q' ondergaan dan worden de rotaties;

l-dimenthyl-l-tartraat	l-dimenthyl-d-tartraat	l-dimenthyl-i-tartraat
$2(\alpha - \beta)$	$2(\alpha+\beta)+2(p^0+p'+q^0+q')$	$2\alpha + (p^0 + q^0 + p' + q')$

gemiddeld $= 2\alpha + (p^0 + q^0 + p' + q')$

Steeds zoude men de rotatie van het derivaat van het inactieve zuur gelijk aan het gemiddelde van de rotaties der actieve zuren vinden, *tenzij er in het antiwijnsteenzuur reeds een andere oriënteering aanwezig is* en de rotatie van elk der helften van het antiwijnsteenzuur niet gelijk is aan die der overeenkomstige helften van de beide actieve zuren.

Ware derhalve bij de verwisseling van twee groepen in het *l*-wijnsteenzuur de oriënteering der groepen overigens gelijk gebleven, dan zoude men er bij deze wijze van onderzoek niets van ontdekken.

Aangezien nu door Patterson en zijn leerlingen zonder eenigen twijfel zeer belangrijke afwijkingen van de gemiddelden gevonden zijn, hebben zij reeds daardoor bewezen, dat de afgeleiden van het antiwijnsteenzuur anders georienteerd zijn, dan die van de beide actieve zuren.

Dit is nu door Coops en mij aan de zuren zelf bevestigd (l.c.).

Patterson vestigde er verder de aandacht op, dat het antiwijnsteenzuur geheel andere eigenschappen had dan de actieve zuren, wij konden dit verschil in eigenschappen uit de gevonden oriënteering der groepen verklaren [1]).

Er moge nog de volgende opmerking gemaakt worden.

Strikt genomen is door het boorzuur-onderzoek alleen aangetoond, dat de OH-groepen in de actieve zuren en enkele derivaten dichter bij elkander liggen dan in het antizuur en zijn overeenkomstige derivaten.

Dit kon verklaard worden door aan te nemen, dat de al of niet gesubstitueerde carboxylgroepen elkander afstieten. Tengevolge van de gemakkelijke draaibaarheid van het molekuul om de gemeen-

[1]) Versl. Ak. Wet. 29 p. 272—273 (1920).

schappelijke as der centrale koolstofatomen konden deze groepen zoo ver mogelijk uiteen gaan.

Nu is het uit de boorzuuronderzoekingen gebleken, dat ook de OH-groepen elkander afstooten; het ligt dus voor de hand, dat dergelijke afstootende (en aantrekkende) krachten tusschen alle groepen van het molekuul werkzaam zijn. Een enkele plaatsverwisseling moet dus wel leiden tot een geheele verschikking. Zelfs in dit schijnbaar eenvoudige geval kan van optische superpositie geen sprake zijn.

Delft, October 1920.

Histologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan van den Heer M. W. WOERDEMAN: *„Onderzoek naar de localisatie van de kaliumverbindingen in het electrisch orgaan van den Stekelrog (Raja clavata).”*

(Mede aangeboden door den Heer J. BOEKE).

In den laatsten tijd heb ik, op aanraden van Prof. ZWAARDEMAKER, verschillende weefsels en organen microchemisch op de aanwezigheid van kaliumverbindingen onderzocht. Terwijl ik hoop later over de methodiek en uitkomsten van dit onderzoek nog uitvoeriger te kunnen berichten, zou ik gaarne datgene, wat ik bij het onderzoek van het electrisch orgaan van den Stekelrog (Raja clavata) vond, reeds thans meedeelen.

Door de onderzoekingen van ZWAARDEMAKER weten we, dat de verrichting van met een zoutoplossing kunstmatig doorstroomde organen in hooge mate afhankelijk is van het kaliumgehalte dier oplossing en dat het kalium als zwak radio-actief element juist door zijn radio-activiteit zoo'n gewichtige rol speelt bij het tot stand komen der orgaanwerkingen. Men mag dan ook veronderstellen, dat in het planten- en dierenlichaam de kaliumverbindingen een belangrijk aandeel hebben aan het normaal verloop der orgaanverrichtingen. Zoo ligt het dus voor de hand, dat men gaarne ingelicht wil zijn omtrent het al of niet voorkomen van kaliumverbindingen in bepaalde cellen, weefsels of organen.

Nu is door het chemisch onderzoek reeds met groote nauwkeurigheid vastgesteld, hoeveel kalium verschillende organen bevatten, maar dit onderzoek leert niet, in welke cellen van het orgaan de kaliumverbindingen gelocaliseerd zijn. Dit is n.l. door MACALLUM aan het licht gebracht: de kaliumzouten zijn in tal van weefsels en organen maar niet willekeurig en onregelmatig verspreid, maar ze komen er vaak in voor op zeer bepaalde plaatsen, gebonden aan heel bepaalde structuren. MACALLUM [1]) gebruikt als reagens op kaliumverbindingen een modificatie van het door onzen landgenoot DE KONINCK [2]) voor het eerst gebruikte mengsel van een kobaltzout

[1]) A. B. MACALLUM. On the distribution of potassium in animal and vegetable cells. Journ. of Physiol. Vol. XXXII, 1905 en Die Methoden und Ergebnisse der Mikrochemie in der biologischen Forschung. Ergebn. der Physiologie, Jrg. 7, 1908, blz. 552.

[2]) DE KONINCK. Zeitschr. f. analyt. Chemie. Bnd. 20. 1881, blz. 390.

en natriumnitriet. Dit mengsel, gevoegd bij een oplossing van een kaliumzout, doet het krystallijne zout van FISCHER neerslaan (een kalium-kobalt-natrium-nitriet). MACALLUM brengt vriescoupes of pluispraeparaten van versch weefsel in zijn kobaltnitriet-natriumnitrietmengsel. In de weefsels en cellen treedt nu het kalium-neerslag op. Na duchtig spoelen met gedistilleerd water, waardoor men het reagens wegspoelt, wordt het weefsel nabehandeld met zwavelammonium, waardoor het zout van FISCHER zwart wordt (vorming van kobaltsulfide). Overal, waar men dan bij microscopisch onderzoek zwarte neerslagen of zwarte verkleuring ziet, mag men de aanwezigheid van kaliumverbindingen aannemen.

Behandelt men volgens MACALLUM's methode bv. willekeurig spierweefsel, dan ziet men, dat de kaliumverbindingen vrijwel uitsluitend voorkomen in de dubbelbrekende lagen van de spiervezels. De enkelbrekende lagen zijn vrij van kalium. Daar nu de electrische organen der z.g. electrische visschen zich (op enkele uitzonderingen na) uit willekeurig spierweefsel ontwikkelen, en door niemand nog de localisatie van kaliumverbindingen in dit gemetamorphoseerde spierweefsel is nagegaan, verdienden de electrische organen ten volle een onderzoek op kalium. Helaas kon ik, niettegenstaande de directeur van Natura Artis Magistra, Dr. C. KERBERT zijn gewaardeerde medewerking toezegde, niet in het bezit komen van de sterke electrische visschen. Maar ook de, aan onze Noordzeekust voorkomende, Stekelrog (Raja clavata) heeft een electrisch orgaan, dat, hoewel zwak werkend, toch in bouw veel gelijkenis vertoont met de sterker werkende organen. Door de vriendelijke gastvrijheid van Dr. REDEKE en Dr. VAN GOOR kon ik nu in het Zoölogisch Station te Helder de kalium-reactie toepassen op het nog levende electrische orgaan van een stekelrog. Het weefsel werd in het reagens gebracht en later tot vriescoupes verwerkt. Hoewel het beter is eerst vriescoupes te maken en die daarna dadelijk met het reagens te behandelen, moest ik de omgekeerde volgorde wel volgen, daar mij in het Station geen vriesmicrotoom ten dienste stond. Op de uitkomsten van het onderzoek heeft echter de veranderde werkwijze geen nadeeligen invloed uitgeoefend. Ik zorgde er voor zeer kleine stukjes weefsel in het reagens te brengen om zoodoende een snel en goed indringen van het reagens mogelijk te maken en aangezien ik geen verschil zie tusschen de buitenste lagen van de praeparaten en het middengedeelte, blijkt dat indringen ook goed gelukt te zijn. Alvorens ik nu de uitkomsten van het onderzoek mededeel, moge er aan herinnerd worden, dat het electrisch orgaan zich bij den Stekelrog in het laatste tweederde gedeelte van den staart bevindt. Daar ligt het

lateraal van de dorsale en ventrale spierbundels en bestaat uit een groot aantal z.g. electrische plaatjes, die in rijen gerangschikt zijn, welke evenwijdig aan de lichaamsas verloopen. Ieder plaatje (zie fig. 1) bestaat uit 1°. een z.g. voorste schorslaag, die uit een enkele laag

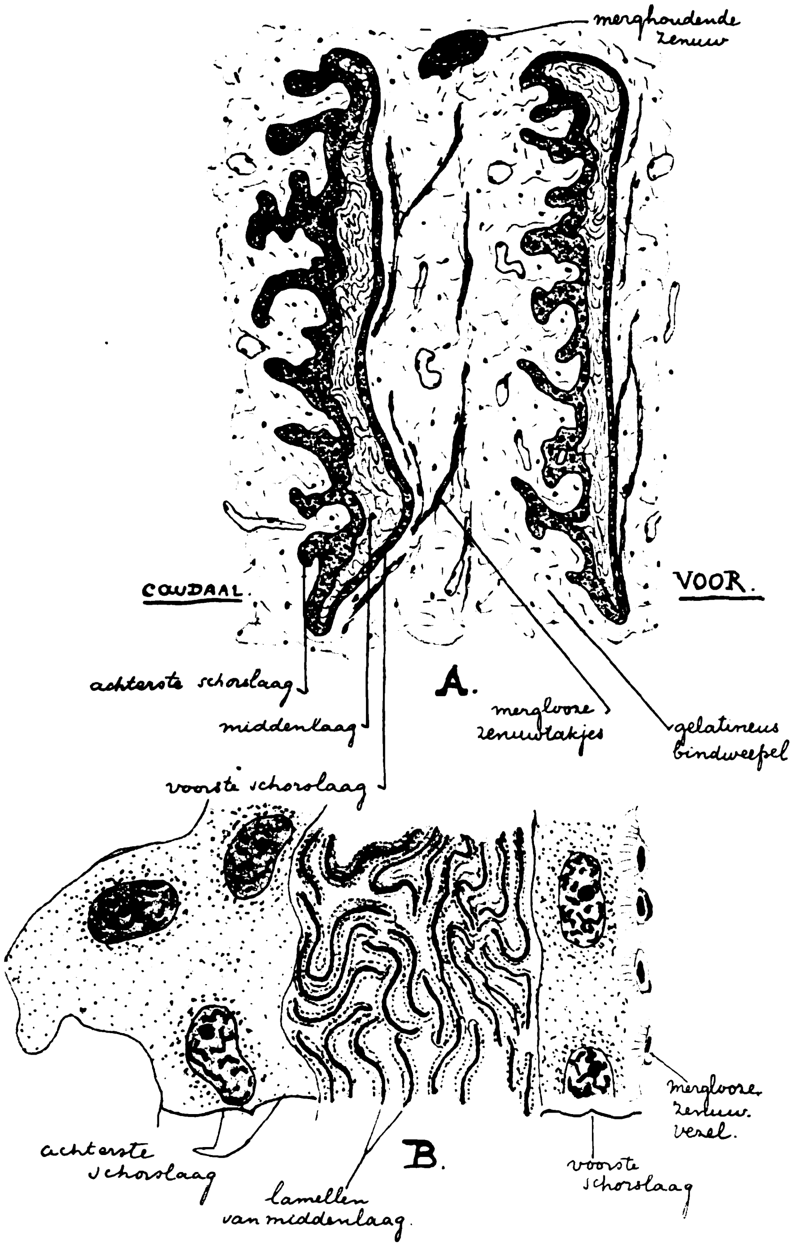


Fig. 1. A. Sagittale doorsnede door electrisch orgaan van stekelrog. (Slechts twee electrische plaatjes zijn afgebeeld).
B. Deel van een electrisch plaatje, sterker vergroot. (Schemata, naar vriescoupen-beelden vervaardigd).

van cellen bestaat, 2°. een uit tal van gewonden lamellen bestaande middenlaag en 3°. een achterste schorslaag. Deze laatste bestaat ook, evenals de voorste schorslaag, uit een enkele laag van cellen, maar deze vormt zoo talrijke plooien, dat op doorsneden de indruk gewekt wordt, dat de achterste schorslaag franje-achtige uitloopers bezit. Het geheele plaatje is door een zeer dun, homogeen vlies (het electrolemma) omgeven. Tegen de voorste schorslaag legt zich een zeer fijn netwerk van merglooze zenuwvezels aan. Daar, waar de vezels tegen de cellen van de schorslaag aanliggen, vertoonen die cellen eigenaardige staafjes. De middenlaag is de gecompliceerdste. Om haar bouw te kunnen begrijpen, is het dienstig er aan te herinneren, dat ieder electrisch plaatje opgevat moet worden als een gewijzigde spiervezel.

De lamellen, die men in de middenlaag vindt, leidt men nu af van de anisotrope en isotrope-lagen van de dwarsgestreepte spiervezel (zie o.a. het onderzoek van ENGELMANN in Onderzoekingen Physiol. Labor. Utrecht 4e Reeks III, blz. 307).

De dubbelbrekende lagen worden hooger, ze verliezen hun dubbelbrekendheid, terwijl de isotrope lagen als fijnere, donkere bandjes zichtbaar blijven. De lagen leggen zich in windingen en zoo ontstaat de samengestelde bouw van de middenlaag van het electrisch plaatje. BABUCHIN kon bij jonge roggen de geleidelijke verandering der spiervezels in electrische plaatjes tijdens het leven zien en kon aantoonen, dat nog niet geheel veranderde vezels bij electrische prikkeling nog samentrekkingen vertoonden. Is eenmaal het electrische plaatje gevormd, dan is de contractiliteit verloren, maar de vorming van electriciteit, die ook de spiervezel als eigenschap bezit, veel meer hoofdfunctie geworden. Het electrisch orgaan mag dus wel als een heel belangwekkend studievoorwerp voor kalium-onderzoekingen beschouwd worden.

Ten slotte zij nog vermeld, dat alle electrische plaatjes in een geleiachtig bindweefsel zijn gelegen.

In goed gelukte praeparaten, behandeld volgens MACALLUM's methode, heb ik nu kunnen vaststellen, dat de electrische plaatjes zeer veel kaliumverbindingen bevatten, terwijl de gelei, waarin ze liggen, vrijwel geheel kaliumvrij is (zie fig. 2). Terwijl in de mergmantel der merghoudende zenuwen een duidelijke reactie wordt gevonden, waardoor het z.g. neurokeratineskelet duidelijk zichtbaar wordt, bleken de merglooze vezels geheel vrij van kalium te zijn. Van het zenuwnetwerk, dat zich tegen de voorste schorslaag aanlegt, ziet men dan ook in de meeste praeparaten niets. Dit is een bevestiging van MACALLUM's vondst, dat in de ascylinders der zenuwvezels geen

kaliumreactie optreedt. Het electrolemma is ongekleurd en dus blijkbaar kaliumvrij. In het electrisch plaatje zelf vindt men de reactie het duidelijkst in de middenlaag (zie fig. 3). In de voorste en achterste schorslaag vindt men fijnkorrelige, zwarte neerslagen, vooral rondom de kernen. In de kernen zelf is geen reactie opgetreden. Trouwens, MACALLUM kon nooit een kali-neerslag in een kern vinden, en dus mag men, volgens hem, de kern als kaliumvrij beschouwen, aangezien z.g. gemaskeerde kaliumverbindingen (zooals van ijzer in bloedkleurstof) niet bekend zijn.

Celgrenzen tusschen de verschillende kernen vond ik in mijn praeparaten niet en dus zou ik voorste en achterste schorslaag liever als syncytium beschrijven. Heel opvallend is, dat in het voorste syncytium een sterke ophooping van zwarte korrels zich bevindt in het gedeelte, dat tegen de middenlaag van het plaatje aanligt. Er bestaat een formeele „korrellaag" op de grens van het voorste syncytium en de middenlaag. Op de grens van middenlaag en achterste syncytium vertoonen mijn praeparaten die ophooping van kaliumneerslagen niet. Hoewel in enkele deelen van het voorste syncytium ook de staafjes te zien waren, vertoonden ze geen zwartkleuring. De middenlaag van het electrisch plaatje is sterk kaliumhoudend en merkwaardigerwijze vindt men hier ook weer áfwisselend dònkere en lichte banden, evenals bij het willekeurig spierweefsel. De donkere banden zijn diffuus zwart gekleurd, korrels zag ik er niet in.

In de stukjes willekeurig spierweefsel van de staart van den rog, die eveneens met het kalium-reagens werden behandeld, waren de anisotrope lagen ook diffuus donker gekleurd en de isotrope lagen geheel kleurloos. Daar nu de middenlaag van het plaatje uit het fibrillaire deel van een willekeurige spiervezel is ontstaan, zal men wel geen fout begaan, indien men de afwisseling van donkere en lichte banden in de middenlaag van het electrisch plaatje als een rest van de afwisseling van anisotrope, kaliumhoudende en isotrope, kaliumvrije schijven (sit venia verbo!) van de spiervezel opvat.

In de gelei tusschen de plaatjes vond ik slechts kaliumneerslagen in het protoplasma der stervormige bindweefselcellen. Die zijn echter arm aan kalium en dus is de geheele hoeveelheid kaliumverbindingen in de gelei zeer gering; in elk geval opvallend gering tegenover den kaliumrijkdom van het electrische plaatje. Daar ik in verschillende praeparaten steeds dezelfde beelden kreeg, als het hierboven beschrevene, meen ik in de bovenvermelde localisatie der kaliumverbindingen geen toevallige, maar de typische te mogen zien.

De wijzen, waarop het kalium in de weefsels voorkomt, zijn volgens MACALLUM de volgende: 1°. als een locaal precipitaat;

2°. als een reeks van locale, scherp omschreven neerslagen, en 3°. als een z.g. biochemische condensatie. Men kan volgens deze terminologie dus zeggen, dat in de voorste en achterste schorslaag het kalium als een locaal neerslag, in de middenlaag echter in biochemische condensatie voorkomt.

Het plaatselijk neerslag vertoont zich vooral rondom de kernen van de beide schorslagen en op de grens van voorste schorslaag en middenlaag, terwijl in laatstgenoemde laag het kalium gecondenseerd is in de oorspronkelijk dubbelbrekende lagen.

Het meest opvallende, dat bij het onderzoek aan het licht kwam, is m.i. dus 1°. de kaliumrijkdom der electrische plaatjes en geringe hoeveelheid kalium in de omgevende gelei; 2°. het voorkomen van een sterk kaliumneerslag op de grens van voorste schorslaag en middenlaag en 3°. het feit, dat in de middenlaag de eigenaardige localisatie der kaliumverbindingen, welke in de spiervezels aangetroffen wordt, bewaard gebleven is.

De physiologische verklaring dezer feiten laat ik gaarne aan daartoe bevoegden over.

Amsterdam. *Histologisch Laboratorium.*

M. W. WOERDEMAN: „Onderzoek naar de localisatie van de kalium-verbindingen in het electrisch orgaan van den Stekelrog (Raja clavata)".

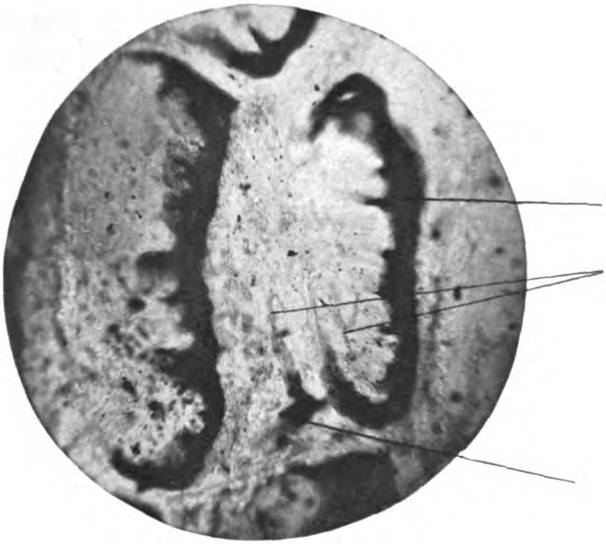


Fig. 2. Microphoto van twee electrische plaatjes van Raja punctata. (Vriescoupe, behandeld met kalium-reagens), vertoonende een sterk zwart neerslag in de electrische plaatjes en weinig of geen neerslag in het gelatineuze bindweefsel tusschen de plaatjes.
(Reichert. Objectief 4. Ocul. 2).

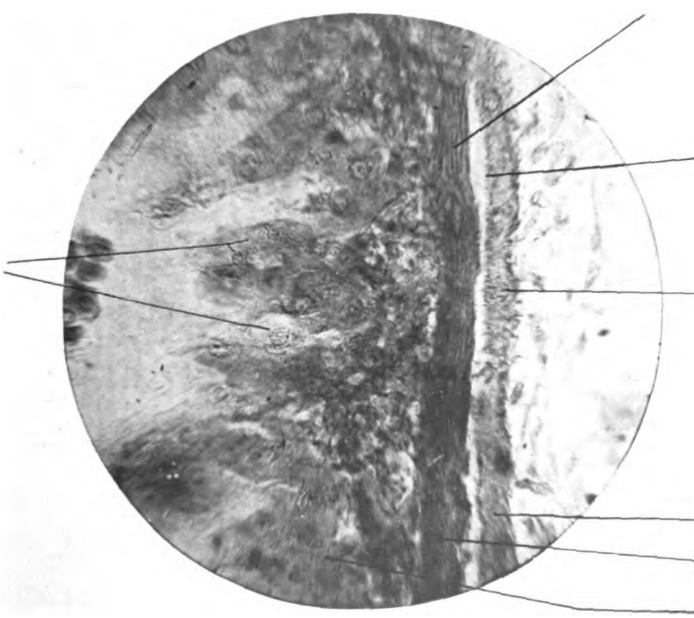


Fig. 3. Microphoto van een electrisch plaatje van Raja punctata. (Vriescoupe, behandeld met kalium-reagens).
(Olie-immersie 1/12 Leitz. Oculair 2).

Natuurkunde. — De Heer W. H. JULIUS biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER: „*De absorbtie-coëfficient van Jodium-oplossingen in het zichtbare Spectrum. Absorbtiemetingen*". I.

(Mede aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK).

1. Onder de verschillende methoden die dienst doen ter bepaling van de verhouding, waarin het licht door een absorbeerende stof verzwakt wordt, is die waarbij de energie der straling met galvanometer en thermozuil gemeten wordt, wel een van de eenvoudigste. In het volgende worden absorbtie metingen beschreven, die door ons langs dezen weg verricht zijn, waarbij wij gebruik hebben gemaakt van de thermozuil en den galvanometer van Dr. W. H. MOLL.

De metingen werden door ons op de volgende wijze uitgevoerd. Een lichtbron L (zie fig. 1) wordt door een lens C_1 afgebeeld op de primaire spleet S_1 van een monochromator M. De secundaire spleet S_2 wordt met behulp van een lens C_2 afgebeeld op de thermozuil T, de thermostroom wordt met den galvanometer gemeten. Tusschen de spleet S_2 en de lens C_2 bevindt zich de absorbeerende stof A. De verhouding van den uitslag van den galvanometer met en zonder de absorbeerende stof in den lichtweg geeft de verhouding aan, waarin het licht van de uit den monochromator tredende golflengte, wordt verzwakt door de absorbeerende stof.

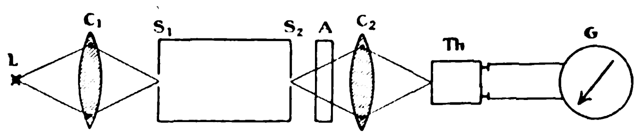


Fig. 1.

2. Als lichtbron is een nitra-lampje (A. E. G.) gebruikt van 25 K en 4 V. De stroom van de lamp wordt door een accumulatoren batterij geleverd. Met behulp van een ampèremeter wordt geconstateerd dat de stroom constant blijft gedurende de waarneming.

De gebruikte monochromator was een exemplaar dat geconstrueerd is door DUBOIS. Het prisma wordt door een schroef bewogen, daardoor komt achtereenvolgens licht van verschillende golflengte voor de spleet S_2. De schroef is van een verdeeling voorzien die in golf-

lengte geijkt kan worden door de aflezingen van de schroef met die van een geijkten spectroscoop te vergelijken.

De wijdte der spleten moest naar de omstandigheden gewijzigd worden. Voor golflengten waarvoor de dispersie gering, of de verandering der absorptie met de golflengte groot is, moeten de spleten nauwer gemaakt worden, dan in de andere gevallen. Op deze wijze was het mogelijk, steeds de doorgelaten energie zoo gunstig mogelijk te kiezen. De breedte van het golflengte-gebied dat doorgelaten werd ligt tusschen 20 en 5 $\mu\mu$.

De door ons gebruikte monochromator had twee ernstige gebreken:

1°. Hoewel de boven beschreven methode volstrekt niet beperkt is tot het zichtbare spectrum — doch zij integendeel het groote voordeel heeft bruikbaar te zijn voor het ultra-rood, zoover dit door glas wordt doorgelaten, en zij misschien ook voor een deel van het ultra-violet toegepast kan worden, voor zoover daar de intensiteit der nitra-lamp niet te gering wordt om haar met voldoende nauwkeurigheid te meten —, was het ons slechts mogelijk waarnemingen in het zichtbare deel van het spectrum te verrichten. Deze beperking ligt in den bouw van den monochromator, waarin het prisma bij de beweging gestuit wordt aan de grenzen van het zichtbare spectrum.

2°. Bij het monochromatische licht was ook een weinig wit licht gemengd. Dit kan vooral fouten veroorzaken bij metingen in het blauw en violet, daar hier de energie van het (practisch) monochromatische licht gering is. De invloed van het witte licht is dan wellicht niet meer te verwaarloozen. Om de fout die hiervan het gevolg is, tot een minimum te beperken, werd in den stralengang een bakje van één centimeter dikte gevuld met 3 °/₀ koperchloride oplossing geplaatst. Deze oplossing absorbeert de ultra roode stralen volkomen en verzwakt ook het rood van groote golflengte tot op een kleine fractie. Bij metingen in het rood, waar koperchloride te veel roode straling wegnam, werd het eventueel aanwezig zijnde ultrarood met behulp van een laag water verwijderd.

De straling, die door de absorbeerende stof is gedrongen, werd zooals reeds is opgemerkt, gemeten met thermozuil en galvanometer. De uitslag van den galvanometer werd fotografisch geregistreerd, waarbij de straling beurtelings toegelaten en onderschept werd. De snelheid en zekerheid der gebruikte instrumenten is zoo groot en het nulpunt zoo constant, dat de gemiddelde fout die men bij het meten der uitslagen maakt, voor de kleine uitslagen nog geen honderdste millimeter bedraagt. Het is daardoor mogelijk geweest onze metingen

uit te strekken tot het uiterste violet. Om de uitslagen met voldoende nauwkeurigheid te bepalen, werden de geregistreerde krommen doorgemeten met een microscoop met oculair micrometer. In fig. 2 ziet men de reproductie van een der geregistreerde lijnen.

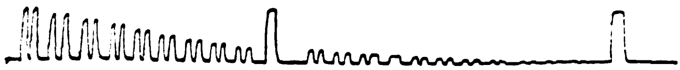


Fig. 2.

3. De bovenbeschreven methode is door ons toegepast op de oplossingen van Jodium in verschillende oplosmiddelen. De oplossing bevond zich in bakjes van 4 mm. dikte. De uitslag van den galvanometer werd achtereenvolgens geregistreerd voor licht van verschillende golflengte. Om de invloed van storingen te elimineeren werd elke uitslag herhaald. Vervolgens werd het zelfde bakje met het zuivere oplosmiddel gevuld en de metingen voor dezelfde golflengten verricht. Zij de uitslag, als het oplosmiddel in het bakje is, u_0, en als de oplossing in het bakje is u. Geldt nu de wet van BEER, dan hangt de verhouding $u_0/_u$, waarin het licht door de opgeloste stof verzwakt wordt, van de dikte der doorloopen laag en van de concentratie af, volgens de vergelijking:

$$\frac{u_0}{u} = e^{kcd} .$$

De hierin optredende constante k is karakteristiek voor de gebruikte stof, terwijl ook de aard van het oplosmiddel invloed op hare waarde kan hebben. De concentratie c moet zoo gekozen worden, dat de verhouding $u_0/_u$ noch te groot noch te klein is. Zoo doende krijgt men een zoo nauwkeurig mogelijke bepaling. Indien de absolute fout in de meting der uitslagen u onafhankelijk van de grootte van den uitslag is, wordt gelijk men gemakkelijk inziet, de meting het nauwkeurigste als de verhouding $u_0/_u$ de waarde e heeft.

Daar de absorbtie-coëfficient k zeer sterk van de golflengte afhangt, moet de meting voor verschillende golflengte-gebieden afzonderlijk en met verschillende concentratie gemeten worden. Voor golflengten waar k groot is werd verdunde, en omgekeerd voor golflengten waar zij klein is geconcentreerde oplossing gebruikt. Op deze wijze wordt zoowel zeer groote als zeer kleine absorbtie vermeden, daar anders de nauwkeurigheid niet voldoende zou zijn.

4. Alvorens de resultaten der metingen te vermelden, moet nog opgemerkt worden, dat in de door ons beschouwde gevallen en tot

de nauwkeurigheid onzer metingen de wet van BEER geldt. Ware dit niet het geval geweest, dan zouden systematische afwijkingen zijn opgetreden daar waar de reeksen van metingen met verschillende concentratie een golflengte-gebied gemeen hebben. Van een dergelijke afwijking was niets te merken.

Daar echter de geldigheid van de wet van BEER speciaal voor

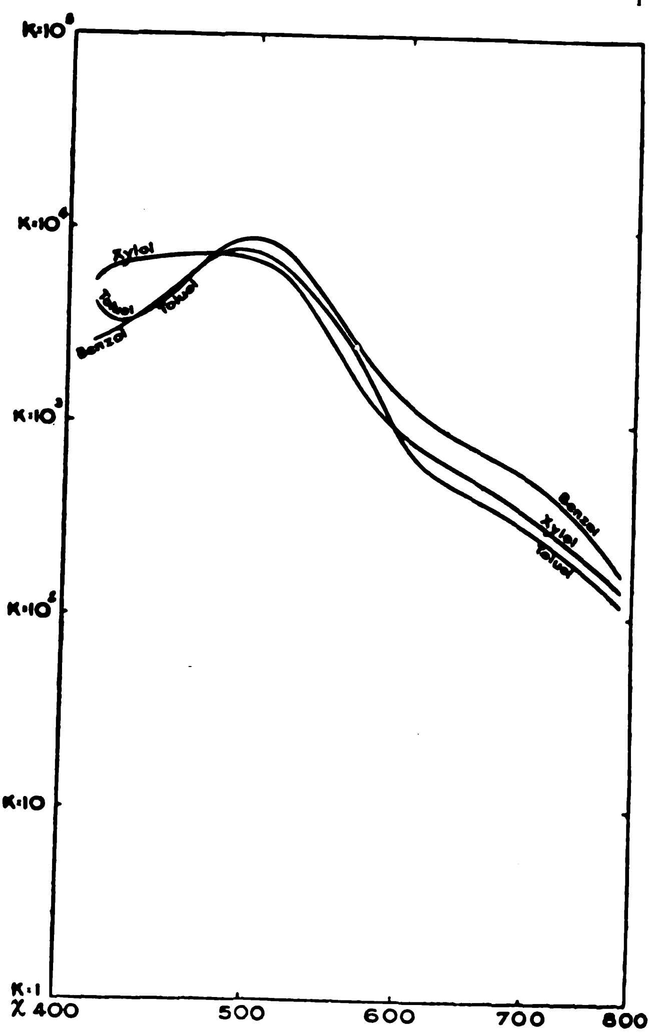


Fig. 3.

jodium-oplossingen in twijfel is getrokken [1]) hebben wij dit punt nader onderzocht voor oplossingen van Jodium in Chloroform. De waarde van den absorbtie-coëfficient voor licht van een golflengte van 512 $\mu\mu$ voor oplossingen, waarvan de concentraties zich verhouden als 1 : 4 : 16 bedraagt resp. 19,9; 19,8 en 20,3. Uit deze getallen blijkt dat k geen functie is van de concentratie.

[1]) STEWART and WRIGHT Journ. Chem. Soc. 111, p. 183, 1917.

Een omstandigheid maakte de metingen nog onzeker. Het bleek dat de absorbtie der oplossingen verandert, indien men ze een tijd

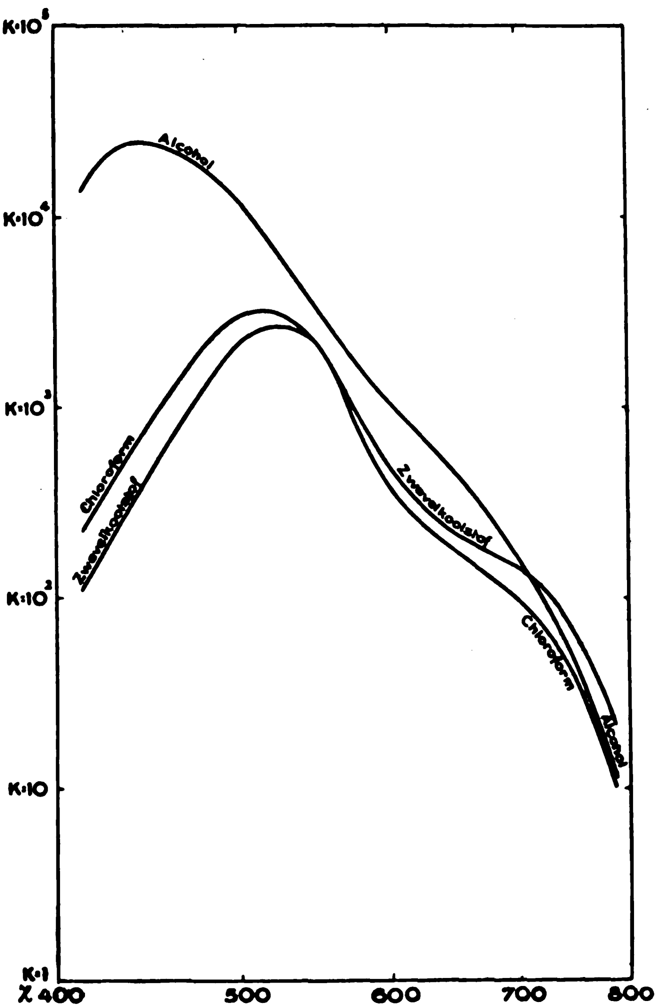


Fig. 4.

bewaart. Deze verandering lag steeds in die richting dat de absorbtie voor violet grooter wordt. Werd eenzelfde meting met versch gepre-pareerde oplossing opnieuw herhaald, dan bleek telkens de absorbtie hetzelfde te zijn. Men moet dus onderstellen dat er in de oplossing een chemische omzetting plaats grijpt.

Het is een bekend feit dat Jodium in verschillende oplosmiddelen met zeer verschillende kleur oplost. De absorbtie-coëfficient is voor Jodium-oplossingen dus blijkbaar afhankelijk van het oplosmiddel. Wij hebben deze golflengte-afhankelijkheid in de eerste plaats bepaald voor de bruine oplossing in alcohol. Verder voor de paarsche oplos-

singen in zwavelkoolstof en in chloroform. Er bestaat tusschen de bruine en de paarsche oplossingen een zeer groot verschil, zoowel wat de grootte der absorbtie als wat de plaats van het maximum betreft. Tusschen de beide paarsche oplossingen is een klein doch duidelijk verschil. Daar de damp van Jodium paars is, is het waarschijnlijk dat de paarsche kleur der Jodium-oplossingen van Jodium en zwavelkoolstof wijst op afwezigheid van chemische reactie met het oplosmiddel of althans toont dat de inwerking gering is.

Verder werd de absorbtie van Jodium-oplossingen in Benzol, Toluol en Xylol onderzocht. Deze oplossingen hebben een roode kleur. Met toenemend moleculair gewicht in de homologe reeks blijkt het maximum der absorbtie naar kleiner golflengte te verschuiven. Deze verschuiving gaat met een vervorming der geheele kromme gepaard, die waarschijnlijk wijst op des te sterker inwerking van Jodium op het oplosmiddel, naarmate de stof een hooger moleculair gewicht heeft [1]).

Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Utrecht, Oct. 1920.

[1]) In de figuren is voor de golflengten en voor den absorbtie-coefficient een logarithmische schaal gebruikt.

Dierkunde. — De Heer WEBER biedt eene mededeeling aan van de Heeren J. VERSLUYS en R. DEMOLL: „*De verwantschap der Merostomata met de Arachnida en met de andere klassen der Arthropoda*". (Tweede mededeeling)[1]).

(Mede aangeboden door den Heer SLUITER).

IV.

Het inzicht dat wij ons met LANKESTERS opvatting eener afstamming der Arachniden van de *Merostomata* op een dwaalweg bevinden heeft vele dierkundigen er toe gebracht iedere verwantschap van *Limulus* met de Arachniden in twijfel te trekken. Doch deze is vast gegrondvest; onjuist kan en moet echter de opvatting van LANKESTER zijn, dat de zeebewonende *Merostomata* de stamvormen der op land levende Arachniden zijn, — ook de omgekeerde afleiding is denkbaar en moet nu onderzocht worden.

Wij hebben hier in ieder geval een verandering van medium voor ons, daar de dieren of van het zeeleven tot het landleven overgegaan zijn, of, wat wij nu in het bijzonder willen beschouwen, van het landleven naar het zeeleven over zijn gegaan. Dit zou van grooten invloed op den bouw van eenige organen geweest kunnen zijn. De vraag treedt op den voorgrond of wij niet in den bouw dezer dieren verhoudingen kunnen ontdekken, die ons aantoonen of het land- of wel het waterleven het meer oorspronkelijke was.

Hierbij denkt men vooral aan de ademhalingsorganen, als die organen, wier bouw in de eerste plaats door het medium beinvloed kon worden. De homologie der tracheenlongen met de kieuwen der Merostomen kan niet ontkend worden. En wij vinden hier inderdaad verschillen in den bouw, welke met het medium in nauwen samenhang staan (verg. p. 454, 1[ste] mededeeling). De eigenaardige lamellen, welke zoo typisch zijn voor de ademhalingsorganen, zijn in ligging verschillend. Bij de *Merostomata* liggen zij vrij open aan de achterzijde der bladvoeten, zoodat het zeewater ze vrij omspoelt; de lamellen zijn groot en talrijk (*Limulus*) opdat een oppervlak van

[1]) Voor de eerste mededeeling zie het verslag van de vergadering van September 1920.

voldoende grootte voor de gaswisseling met het betrekkelijk zuurstofarmere zeewater gegeven zij. Bij de Arachniden zijn de lamellen veel kleiner en liggen verborgen in holtes, die door eene nauwe opening, het stigma, naar buiten monden; zij worden daardoor beschermd tegen uitdroogen of beschadiging door aarddeeltjes, terwijl de lucht toch voldoenden toegang heeft en de oppervlakte der lamellen groot genoeg is voor de opname van zuurstof uit de daaraan veel rijkere lucht. De samenhang van bouw en medium is dus duidelijk. Ter wille van de snellere vernieuwing van het ademhalingswater liggen de kieuwen der *Merostomata* op de beweeglijke bladvoeten. Deze bladvoeten komen overeen met de sternieten der scorpioenen (verg. p. 454 en fig. 2 en 3, 1ste mededeeling). Nu zijn echter de sternieten niet anders dan skeletplaten der huid en als zoodanig primair onbeweeglijk. Zij moeten bij de *Gigantostraca* dus eerst beweeglijk geworden zijn en dit moet een secundaire toestand zijn in vergelijking met de onbeweeglijke sternieten der scorpioenen. Maar de door onbeweeglijke sternieten bedekte, dus slechts door een nauw stigma toegankelijke en bij hun overeenkomstige inwendige ligging ook slechts betrekkelijk kleine ademhalingsorganen kunnen slechts in de lucht voldoende gepraesteerd hebben; zij kunnen slechts tracheenlongen en nooit kieuwen geweest zijn. De gemeenschappelijke stamvormen der scorpioenen en *Merostomata* waren dus door tracheenlongen ademende dieren, dus *landdieren*. Met den overgang tot het zeeleven werden de ademhalingsorganen daaraan, dat wil zeggen aan de door het zuurstofarmere en minder beweeglijke medium gestelde eischen aangepast door vergrooting der oppervlakte der lamellen en der longholte zelf evenals der, aan den achterrand der sternieten liggende stigmata. Daardoor werden de sternieten meer en meer los gemaakt van het overige lichaam en tenslotte tot de beweeglijke, kieuwendragende chitineplaten, die wij bij de *Gigantostraca*, en, meer samengesteld van bouw, bij *Limulus* vinden. Het pleit ook voor de juistheid dezer opvatting, dat wij bij de *Merostomata* naast de bladvoeten geen sternieten vinden. De ademhalingsorganen en het landleven der scorpioenen zijn dus oorspronkelijker dan de kieuwen en het zeeleven der *Merostomata*!

Gevoelig voor een verandering van het medium moeten veelal ook de hoogere zintuigen zijn. Bij de *Merostomata* en de scorpioenen wordt blijkbaar de bouw der oogen door het medium beïnvloed, want deze zintuigen zijn bij beide recht verschillend gebouwd (verg. DEMOLL, 1914; 1917). *Limulus* bezit twee parige oogen, het facettenoog en het lensoog, beide op de bovenzijde van het kopborststuk

liggend (Fig. 1, 1ste mededeeling). Het eerste, hoewel geen typisch facettenoog, zooals het de kreeften en insecten vertoonen, funktioneert op gelijke wijze, daar elk der talrijke omma of enkeloogen, waaruit het facettenoog opgebouwd is, slechts een punt der omgeving ziet en eerst de vereeniging van al deze puntbeelden het beeld geeft, dat door het dier wordt waargenomen. De lensoogen zijn kleine, eenvoudige oogen; waarschijnlijk zijn zij hulpoogen van het facettenoog, waarmede zij het gezichtsveld ongeveer gemeen hebben. Zij dienen er wellicht toe, den afstand der voorwerpen te schatten, welke met de facettenoogen gezien worden. Want een facettenoog, zooals dat van *Limulus*, veroorlooft slechts eene zeer gebrekkige schatting der afstanden. Veel insecten bezitten tot dit doel hulpoogen, de ocellen (verg. DEMOLL en SCHEURING, 1912).

De scorpioen bezit geen facettenoogen, maar in de plaats daarvan beiderzijds op den cephalothorax een groep van 2 tot 5 enkeloogen of lateraaloogen, ieder een eenvoudig gebouwd lensoog (Fig. 4). Daarbij komt boven op den cephalothorax nog een paar enkelvoudige oogen, eveneens met lens, maar van veel meer samengestelden bouw, de hoofdoogen.

Men heeft wegens de gelijke ligging deze hoofdoogen met de lensoogen van *Limulus* vergeleken, maar nader onderzoek heeft een zoo principieel verschil in den bouw doen kennen, dat eene omvorming der hoofdoogen tot de lensoogen of omgekeerd onmogelijk schijnt (DEMOLL, 1914, 1917; bevestigd werd deze opvatting door de belangrijke ontdekking van HOLMGREN, 1916, p. 110, dat de innerveering dezer oogen van verschillende afdeelingen der hersenen uitgaat).

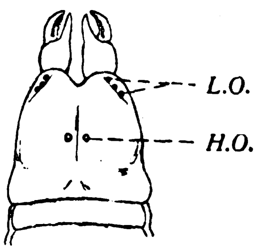


Fig. 4. Cephalothorax met oogen van een scorpioen, *Pandinus*. Origineel; nat. grootte.
H.O hoofdoogen; *L.O* lateraal-oogen.

Denken wij ons nu, dat een dier met de oogen van *Limulus*, zooals voor zoover duidelijk ook de *Gigantostraca* bezaten, tot het landleven overging. De facettenoogen zouden daarbij in hunne praestatie nauwelijks beïnvloed kunnen worden, want bij de eigenaardige wijze, waarop bij het facettenoog het beeld uit geïsoleerde puntbeelden wordt opgebouwd, heeft het medium geen invloed op het ontstaande beeld. Het eenvoudige lensoog zou bij de verandering van het medium wel in zijn prestatie verzwakt worden, daar een door de lens ontworpen beeld niet meer nauwkeurig op het netvlies zou geprojecteerd worden; wellicht zou dit voor het hulpoog van het facettenoog niet van veel belang zijn en het oog zou zonder grootere verandering nog voldoende kunnen praes-

teeren, òf het zou zijn beteekenis verliezen en rudimentair kunnen worden; — maar nooit zou daaruit het zoo geheel anders gebouwde hoofdoog van den scorpioen kunnen ontstaan. Eene aanmerkelijke omvorming der oogen schijnt dus in de verandering van medium geen grond te vinden en wij vinden geen reden waarom de oogen van *Limulus* zouden kunnen worden omgevormd tot de oogen van den scorpioen. De oplossing van het facettenoog in een groep van lensoogen, de lateraaloogen, eene verandering die eene vermindering van het gezichtsvermogen beteekent, blijft onverklaard. En onbeantwoord blijft de vraag, waar het hoogontwikkelde hoofdoog van den scorpioen plotseling van daan zou gekomen zijn. Het gelukt niet de door LANKESTER's theorie gevorderde omvorming der oogen van *Limulus* tot die van den scorpioen uit de verandering van het medium te verklaren of uit den bouw af te leiden.

Stellen wij ons nu de tegenvraag: welken invloed zou de overgang tot het leven in water op de oogen, op het zien van den scorpioen kunnen uitoefenen? Bij de hoofdoogen zou, door de veel verminderde of wegvallende breking der lichtstralen op de convexe voorvlakte der onbedekte lens, het beeld vrij ver achter het netvlies vallen, zoodat in het oog slechts een zeer onduidelijk beeld ontstaan zou. Het dier zou met zijn hoofdoogen niet meer goed kunnen zien en deze zouden, als alle nuttelooze organen, gereduceerd worden of wel geheel verdwijnen. Het ontbreken der hoofdoogen bij *Limulus* zou dus door de verandering van medium verklaard worden[1]).

De lateraal-oogen van den scorpioen zijn eveneens lensoogen en elk voor zich zou, evenals de hoofdoogen, door de verandering van medium in de praestatie belangrijk achteruit gaan. Maar deze oogen werken, zoover bekend, bij den scorpioen ook reeds eenigszins te samen, als de ommata der facettenoogen, en daarbij is het niet zoo wezenlijk, of het beeld in ieder oog op of achter de retina valt; vooral voor het zoo belangrijke zien van bewegingen der omringende voorwerpen zou de groep van lateraal-oogen nog bruikbaar blijven. Deze zouden dus kunnen blijven bestaan en wel zoo, dat zij nog slechts te samen, als ommata, werkten. Men kan zich zeer goed voorstellen, dat op deze wijze in de wisseling van medium

---

[1]) Volgens HOLMGREN (1916, p. 111) zou het hoofdoog bij *Limulus* door het laterale gedeelte van het zoogenaamde reukorgaan vertegenwoordigd zijn. Deze opvatting is niet juist. Het zoogenaamde reukorgaan — vermoedelijk is het een niet meer functioneerend, rudimentair oog — wordt van uit hetzelfde optische ganglion geïnnerveerd als het facettenoog van *Limulus*, heeft dus ook wel denzelfden oorsprong (de lateraaloogen van den scorpioen; verg. DEMOLL, 1914).

de grond voor de vermeerdering en de dichtere aaneensluiting der lateraal-oogen gegeven was en daarbij moest uit de ocellen van den scorpioen een eenvoudig facetten-oog ontstaan.

Het lensoog van *Limulus* is blijkbaar uit een der lateraal-oogen van den scorpioen ontstaan, dat niet in het facettenoog opgenomen werd. Wij kennen een fossielen, in zee levenden scorpioen, *Proscorpius osborni*, die duidelijk het wegschuiven van een der lateraal-oogen van de andere en naar de mediaanlinie van het lichaam toe vertoont, terwijl het oude hoofdoog ook noch herkenbaar is (Fig. 5).

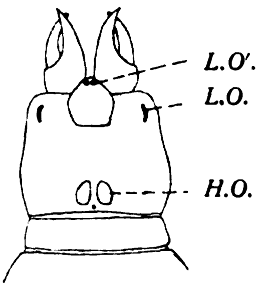


Fig. 5. Cephalothorax met oogen van den marinen scorpioen *Proscorpius osborni*. Naar CLARKE en RUEDEMANN, 1912, p. 389, fig. 83.
H.O hoofdoogen; *L.O* lateraal-oogen; *LO'* naar de mediaanlinie verschoven lateraaloog.

Aldus kan door den overgang van het landleven tot het zeeleven zoowel het verdwijnen der hoofdoogen als de omvorming der lateraal-oogen tot het facettenoog (en een hulpoog) worden verklaard. Ook het duidelijk streven der lens van het lensoog bij *Limulus* zich af te snoeren wijst er op, dat dit oog nog bezig is, zich aan het zien in water aan te passen door de ontwikkeling van een door een cornea bedekte lens, aan wier voorvlakte weer eene breking der lichtstralen zou optreden. De vorm der lens alleen zou reeds tot de gevolgtrekking voeren, dat de ontwikkeling van landdier naar waterdier ging en niet omgekeerd.

Dat de oogen van *Limulus* een periode van omvorming doorgemaakt hebben, blijkt duidelijk uit de talrijke rudimentaire oogen (DEMOLL, 1914); hier moet alles in omvorming geweest zijn. Bij den scorpioen vinden wij nergens aanwijzingen eener voorafgegane omvorming der oogen.

Zoo zien wij, dat de voor een verandering van het medium in de eerste plaats gevoelige ademhalingsorganen en oogen ons op de vraag, in welke richting eene verandering van levenswijze moet plaats gegrepen hebben, het antwoord geven: in de richting van land- naar zeeleven, niet, zooals LANKESTER aannam, omgekeerd.

Wij willen er verder op wijzen, dat bij eene verandering van medium eerst later de aanpassing kan volgen; een dier kan zich aan een milieu niet aanpassen voor het er in leeft. Indien de scorpioenen van zeedieren afstammen zouden, moesten dus de overgangsvormen landdieren geweest zijn. Wat vinden wij nu in dit opzicht bij de scorpioenen en de *Gigantostraca*? Wij kennen geen op land levende, zich in de omvorming tot een scorpioen bevindende *Gigantostraca*, zooals LANKESTER's theorie die aannemen moet. Wel echter

kennen wij in zee levende (in kustwateren en, vermoedelijk, delta-gebieden, maar in ieder geval in het water [1])) overgangsvormen, marine scorpioniden, zooals *Palaeophonus* en *Proscorpio* [2]) en *Gigantostraca*, met scorpioenachtigen habitus, zooals *Eusarcus* en *Slimonia*. De theorie van LANKESTER zou hier eischen, dat de scorpioniden-organisatie nog gedurende het zeeleven zou zijn ontstaan en daarna de bijna volmaakte scorpioenen aan het land gingen. Daar ware dan hun lichaamsvorm zoo geschikt gebleken (hoewel zij onder geheel andere omstandigheden in water ontstaan ware), dat hij vrijwel onveranderd tot in dezen tijd bewaard kon blijven. Dat wil zeggen, de aanpassing zou in hoofdzaak van te voren, nog gedurende het waterleven, tot stand zijn gekomen, niet *na* de verandering van levenswijze, op het land. Leiden wij daarentegen de *Merostomata* van scorpioenachtige land-arachniden af, dan heeft eerst de verandering van medium plaats gevonden en verdween daarna langzamerhand de typische scorpioniden-bouw. Uit tot het strandleven in zee of in delta-gebieden overgegane, aan het nieuwe medium eerst in geringe mate aangepaste scorpioenen zijn dan de scorpioenachtige *Gigantostraca* ontstaan (*Eusarcus scorpionis* e a.); langzamerhand veranderde zich onder den invloed der nieuwe levensomstandigheden, de lichaamsvorm, paste zich aan de zwemmende levenswijze aan (zwempooten; staartvin) of veranderde zich in aanpassing aan de in den bodem woelende levenswijze steeds verder, tot ten slotte vormen als *Hemiaspis* en *Limulus* ontstonden [3]).

Deze omvorming, aanpassing, is bij *Limulus* heden nog niet geheel afgesloten. Voor de oogen bevindt zich *Limulus* nu nog in een overgangsstadium, waarbij allerlei nog in omvorming is. Dit blijkt uit aantal en ligging der zich terugvormende oogen en uit den vorm der lens bij het mediale oog. Wij stellen dus nog eens nadrukkelijk vast: niet de scorpioen, maar *Limulus* heeft een tijd van diepgaande omvorming van den bouw achter zich, die zelfs nu wellicht nog niet geheel afgesloten is.

Uit deze uiteenzetting blijkt wel overtuigend, dat eene afstamming

---

[1]) Vergel. O'CONNELL (1916) en SCHUCHERT (1916). O'CONNELL meent, dat de *Gigantostraca* rivierbewoners waren; de latere vormen, bijv. *Eurypterus*, waren wel zeker marine-vormen.

[2]) Hiermede wil niet gezegd zijn, dat deze marine-scorpioenen de directe stamvormen der *Gigantostraca* moeten zijn; maar zij toonen aan, dat scorpioenen tot het zeeleven zijn overgegaan.

[3]) Met deze opvatting stemt overeen, dat *Limulus* zijn eieren hoog op het strand legt, zoodat zij slechts van tijd tot tijd door het zeewater bedekt worden (IWANOFF, 1907; MONTGOMERY, 1909, p. 314).

der Arachniden van de in zee levende Merostomen niet kan worden aangenomen, maar dat integendeel deze laatste ontstaan zijn uit op land levende Arachniden, welke primitive scorpioniden waren. Slechts met deze opvatting stemt het feit overeen, dat niet de scorpioenen en Merostomen de primitifste organisatie onder de Arachniden vertoonen, maar geheel andere vormen (de *Solifuga*, *Palpigradi* en *Schizonotidae*; verg. pg. 459, 1ste mededeeling).

Eene moeilijkheid zou voor deze nieuwe opvatting nog kunnen ontstaan, wanneer eene verwantschap der Merostomen met Trilobiten of andere *Crustacea* aangetoond ware. LANKESTER heeft deze verwantschap aangenomen en dit moge mede beslissend voor zijn geheele opvatting van het *Limulus*-probleem geweest zijn. Houdt men aan deze opvatting vast, dan is het inderdaad moeilijk de *Merostomata* van land-arachniden af te leiden, omdat men dan ook moet aannemen, dat de *Crustacea* van de *Merostomata* afstammen (men vergelijke JAWOROWSKI, 1894, p. 66 en volgende, p. 74—75). Daaraan kan echter niet gedacht worden omdat de *Crustacea* ongetwijfeld van veel primitievere en geheel anders gebouwde Artropoden moeten worden afgeleid, als de Merostomen zijn. Het is echter geheel onjuist eene directe verwantschap der *Merostomata* met de *Crustacea* als bestaande te beschouwen; deze is in het geheel niet bewezen. De geringe gelijkenissen (de kieuwen!) zijn als convergenties te verklaren. De bladvoeten van *Limulus*, die door hun verondersteld splijtvoettype aan de *Crustacea* zouden doen aanknoopen, zijn slechts omgevormde sternieten en geen ledematen. Bij de *Gigantostraca* vertoonen zij nog geen spoor van een splijtvoetcharacter; dit treedt eerst bij den geologisch zooveel jongeren *Limulus* op. Hier ligt slechts convergentie voor, en daarbij eene die in het geheel niet ver gaat. De kreeften, inclusieve de *Limulava* (WALCOTT, 1911, 1912; CLARKE en RUEDEMANN, 1912, p. 410) bezitten twee paar antennen [1]) typische monddeelen (mandibulae; twee paar maxillae) en ledematen van duidelijk splijtvoettype. In geen enkel opzicht is welke overeenstemming ook in de ledematen te ontdekken, welke als een teeken eener verwantschap der *Limulava* met de *Merostomata* zou kunnen worden beschouwd. De geleding van het lichaam is, wanneer men voldoende rekening houdt met de segmenteering der verschillende afdeelingen van den romp, ook eene andere; eene, een enkele maal voorkomende, slechts zeer oppervlakkige gelijkenis in lichaamsvorm, zooals zij onder Arthropoden van verschillende klassen hier en daar gevonden wordt, heeft met bloedverwantschap niets uitstaande.

[1]) De Trilobiten bezitten in plaats van het 2de paar antennen nog den oorspronkelijk gebouwden splijtvoet.

Dit geldt vooral voor de, niet eens groote, gelijkenis der *Limulus*-larven met sommige Trilobiten.

Strabops, een fossiele vorm uit het cambrium, die als meest oorspronkelijke, nog niet typische Gigantostrake opgevat wordt (CLARKE en RUEDEMANN, 1912, p. 152—155) vertoont met de *Gigantostraca* een zekere gelijkenis in lichaamsvorm, maar deze is lang niet volledig. Van de ledematen, die bij fossiele *Arthropoda* toch beslissend zijn voor de beoordeeling der verwantschap, is niets bruikbaars bekend, (wij beschikken slechts over een afdruk der rugzijde en enkele zeer kleine fragmenten der ledenmaten). De oogen hebben een geheel anderen vorm, als bij de *Gigantostraca*; lensoogen (hulpoogen) ontbreken. Verder ontbreekt iedere aanduiding van eene differentiatie in prae:- en postabdomen. Wij weten niet of het rijkelijk kleine kopschild een uit zes segmenten bestaanden cephalothorax bedekte, en of het abdomen bladvoeten droeg, zooals bij de *Merostomata*, of splijtvoeten, zooals bij de *Crustacea*. De verwantschap van *Strabops* is dan ook geheel en al problematisch en deze vorm is voor phylegonetische conclusies niet bruikbaar.

Wij zien dus, dat in deze richting geen moeilijkheden voor de boven bepleite afstamming der *Merostomata* van landbewonende *Arachnida* gevonden worden. Niets dwingt ons, eene verwantschap der *Crustacea* (*Trilobita* en *Limulava* inbegrepen) met de *Merostomata* aan te nemen. De diepgaande verschillen in bouw evenals de zeker bestaande verwantschap der *Merostomata* met de *Arachnida* spreken tegen een directen genetischen samenhang der *Merostomata* met de *Crustacea*; deze aan te nemen voert tot de onhoudbare consequentie, dat de *Crustacea* van de Arachniden zouden afstammen.

Wij kunnen dus aan de opvatting vasthouden, dat de *Merestomata* van primitieve landbewonende Scorpioniden afstammen. Alleen dan kan voor de Arachniden de stamvorm aangenomen worden, die inderdaad den voor deze dieren noodzakelijken laagstaanden Arthropodenbouw vertoont met betrekking tot de geleding van het lichaam (drie vrije thoraxsegmenten, vrij praegenitaalsegment, geen geleding in prae- en postabdomen), de sterna, mondvorming (mond vrij van de ledematen; geen kauwplaten), de ademhalingsorganen (tracheen met stigmata in de meeste segmenten van het lichaam), het endosterniet (eerst nog ontbrekend) en de coxaalklieren (minstens voorhanden in segment 2 tot 5 van den cephalothorax)[1]). Ook de oogen laten niet toe van den toestand der scorpioenen uit te gaan; wij moeten van een evers oogtype uitgaan (*Solifuga*, *Phalangida*, *Acarida*); daaruit ontstond eerst het inverse oog der scorpioenen.

[1]) Verg. p. 459 en 460, 1ste mededeeling.

V.

Deze opvatting van den stamvorm der *Arachnida* maakt het ook mogelijk, een samenhang met de andere landbewonende Arthropoden, vooral met de *Onychophora* en *Myriapoda* aan te nemen. De Arachniden kunnen dan van dezelfde primitieve, door tracheen ademende landarthropoden afgeleid worden als de *Myriapoda* en de uit deze ontstane *Hexapoda*; alle tracheate *Arthropoda* zijn dan van gemeenschappelijken oorsprong. Daarbij moet de tot de Arachniden voerende tak zich zeer vroegtijdig hebben afgesplitst. De ligging der geslachtsopening vrij ver naar voren wijst op progoneate *Myriapoda*, de exogene eivorming op deze en op *Peripatus* (verg. VAN KAMPEN, 1916). Het ontbreken van eigenlijke kauwwerktuigen doet vermoeden dat de stamvormen der *Arachnida* in de nabijheid der *Onychophora* geplaatst moeten worden [1]). Daarop wijzen ook de coxaalklieren, die bij de *Solifuga* juist als bij *Peripatus* als speekselklieren funktioneeren (vergel. BUXTON, 1913, p. 258; 1917, p. 8 en over de *Palpigradi* p. 9).

Van groote beteekenis is ook de door HOLMGREN vastgestelde vergaande overeenstemming in bouw van de hersenen; belangrijk is het primair ongesegmenteerde type der voorhersenen bij *Onychophora*, *Arachnida* en *Limulus* (en *Polychaeta*) in tegenstelling met het secundair gesegmenteerde type der voorhersenen bij de overige *Arthropoda* (*Crustacea*, *Myriapoda* en *Hexapoda*), hetwelk van het eerste type afgeleid moet worden. Verder hebben de *Onychophora*, *Arachnida* en *Limulus* een typisch gebouwd „centraallichaam" (Zentralkörper, gestreifter Körper bij HOLMGREN) en een aan de voorhersenen direct aansluitend tritocerebrum (HOLMGREN, 1916, p. 274, 275).

Voor zoover duidelijk moeten wij als uitgangspunt voor den stam der Arachniden kaaklooze, in enkele opzichten nog op *Peripatus* gelijkende vormen met geleden extremiteiten aannemen. De *Arachnida* gingen van hier uit hun eigen weg. Zij vormden geen kaken, voedden zich in hoofdzaak met de meer vloeibare of door fermenten in situ vervloeide bestanddeelen der door hen gevangen dieren. Er bestaat geen grond directe betrekkingen der oer-arachniden met de *Crustacea* aan te nemen. De oorsprong dezer laatste moet veeleer

[1]) De vraag waar de antennen bij de Arachniden gebleven zijn, laten wij onbesproken, daar dit ons te ver zou voeren; als antennensegment komt vooral het praecheliceren-segment in aanmerking (verg. HEYMONS, 1901, p. 148; CARPENTER, 1913, p. 342; KORSCHELT en HEIDER, 1892, p. 636, en vooral HOLMGREN, 1916, p. 76).

gezocht worden in de nabijheid van dien hoofdtak die naar de *Hexapoda* voert. Hiervoor spreekt vooral de gelijke bouw der hersenen (HOLMGREN, 1916, p. 116) en der facetten-oogen. Wel is waar is eene convergente vorming van dit type van oogen mogelijk, want het is bij de *Scutigerida*, bij de *Strepsiptera* en bij de *Hexapoda-Crustacea* ontstaan (het toch recht onvolmaakte facettenoog van *Limulus* laten wij hier buiten beschouwing). Maar bij het facettenoog der *Hexapoda* en *Crustacea* is eene zoo ver gaande overeenstemming in bouw voorhanden (gelijk getal der elementen, waaruit de samenstellende deelen van het oog bestaan, zooals door HESSE en zijn leerling ZIMMERMANN, 1913, aangetoond werd; verg. LANKESTER 1904 A, p. 573) dat wij een gemeenschappelijken oorsprong van dit facettenoog aannemen moeten [1]).

Naar onze meening heeft zich dus van den stam der *Arthropoda* het eerst de tak afgesplitst, die naar de *Arachnida* voerde, onder vorming der cheliceren en verlies der antennen, terwijl de *Hexapoda* en *Crustacea* eerst nog eenige etappen hunner ontwikkeling gemeen hadden, die zich in verschillend opzicht in hun bouw uit-

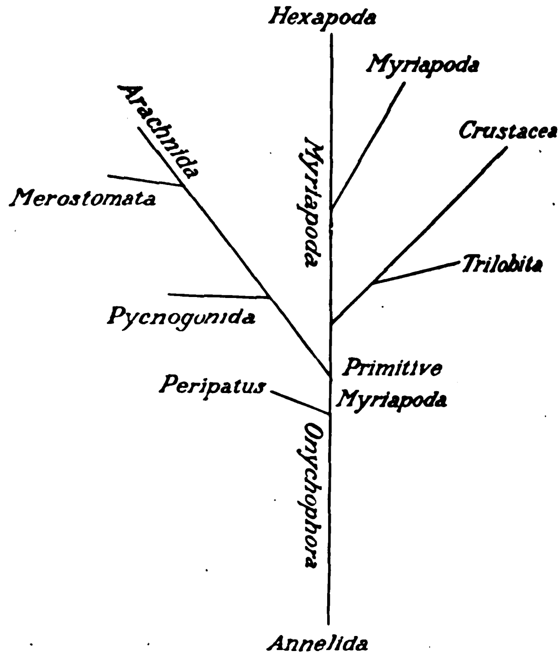


Fig. 6. Ontwerp van een stamboom der *Arthropoda*.

[1]) Tegen een monophyletischen oorsprong van het facettenoog der *Crustacea* en *Hexapoda* heeft zich MOROFF (1911) uitgesproken; zijn gronden schijnen ons niet juist.

spreken. De stamvormen der *Crustacea* gingen tot het waterleven over.

Een diphyletischen oorsprong der Arthropoden, zooals VON KENNEL (1891) bepleit heeft en ook KINGSLEY (1894) in overweging neemt, waarbij zich de *Crustacea* zelfstandig uit Annelidenachtige marine stamvormen zouden ontwikkeld hebben, kunnen wij niet aannemen. De overeenstemming in den bouw aller *Arthropoda* schijnt ons dit uit te sluiten (verg. HEIDER, 1914, p. 498—499). De *Crustacea* moeten dan echter van tracheate landarthropoden afgeleid worden.

Van den tot de Arachniden voerenden tak splitsten zich vermoedelijk de Pycnogoniden af, en wel vroegtijdig. Met de *Arachnida* en *Merostomata* te samen vormen zij eene groote afdeeling der *Arthropoda*, die men naar het voor haar typische bezit van cheliceren *Chelicerota* kan noemen (verg. HEYMONS, 1901).

Onze opvatting van de verwantschap der groote afdeelingen der Arthropoden is in schematischen vorm in den hier voorgaanden stamboom (fig. 6) neergelegd [1]).

CONCLUSIES.

1. De *Merostomata* zijn uit primitieve scorpioenen ontstaan, welke tot het leven in water waren overgegaan. Zij behooren tot de *Arachnida*.

2. Met de *Crustacea* zijn de *Merostomata* niet nauwer verwant.

3. De *Arachnida* stammen van zeer oorspronkelijke, met de *Onychophora* na verwante *Myriapoda*, af.

4. Eerst daarna ontstonden uit de *Myriapoda* de *Crustacea* en de *Hexapoda*.

5. De tracheen der *Arthropoda* zijn één in oorsprong; een twee of meermalig parallel ontstaan heeft niet plaats gevonden.

---

[1]) Onze stamboom verschilt vooral daardoor van den nieuwen stamboom der Arthropoda van HOLMGREN (1916, p. 278, schema 6), dat HOLMGREN boven de *Onychophora* de marine *Trilobita* invoegt, terwijl wij daar primitieve, op land levende, *Myriapoda* laten aansluiten. HOLMGREN's stamboom berust in hoofdzaak op zijn eigen onderzoekingen van de hersenen der *Arthropoda*. De hersenen der Trilobiten zijn uit den aard onbekend en hier liet *Holmgren* zich leiden door de opvatting. dat de *Merostomata* van de *Trilobita* afstammen, eene opvatting die wij verwerpen. Overigens bestaat zeer vergaande overeenstemming in de beide stamboomen.

LITERATUUR.

BERNARD, H. M. (1896), The comparative morphology of the galeodidae, in: Trans. Linnean Soc. London. Zool., Vol. 6, 1894—96.

BERTKAU, PH. (1884), Ueber den Bau und die Funktion der sog. Leber bei den Spinnen, in: Arch. mikrosk. Anat., Vol. 23, p. 214—245.

BÖRNER. Carl (1902), Arachnologische Studien II und III, in: Zoolog. Anz., Vol. 25. p. 433—466.

—— (1904), Ein Beitrag zur Kenntnis der Pedipalpen, in: Zoologica, Heft. 42, Vol. 17.

BRAUER, A. (1895), Beiträge zur Kenntnis der Entwicklungsgeschichte des Skorpions, II, in: Ztschr. wiss. Zoolog., Vol. 59, p. 351—435.

BUXTON, B. H. (1913), Coxal glands of the Arachnids, in: Zoolog. Jahrb. Suppl. 14, Heft. 2, p. 231—282.

—— (1917), Notes on the Anatomy of Arachnids, in: Journ. Morphol., Vol. 29. p. 1—31.

CARPENTER, GEORGE H. (1903), On the relationships between the classes of the Arthropoda, in: Proc. Roy. Irish. Acad., Vol. 24, Sect. B, p. 320—360.

CLARKE, JOHN. M., and R. RUEDEMANN (1912), The Eurypterida of New York, in: New-York State Museum, Memoir 14.

DEMOLL, R. (1914), Die Augen von Limulus, in: Zoolog. Jahrb., Anat., Vol. 38, p. 443—464.

—— (1917), Die Sinnesorgane der Arthropoden, ihr Bau und ihre Funktion, Braunschweig 1917.

DEMOLL und L. SCHEURING (1912), Die Bedeutung der Ocellen der Insekten, in: Zoolog. Jahrb., Vol. 31, Syst., p. 519—628.

HEIDER, K. (1914), Phylogenie der Wirbellosen in: Kultur der Gegenwart, Teil 3; 4te Abt., Vol. 4, Abstammungslehre, u.s.w.

HESSE, R. (1901), Untersuchungen über die Organe der Lichtempfindung bei niederen Thieren, VII, von den Arthropodenaugen, in: Ztschr. wiss. Zoolog., Vol. 70.

HEIJMONS, R. (1901), Die Entwicklungsgeschichte der Scolopender, in: Zoologica, Heft. 33, Vol. 13, 1901—02.

—— (1905), Ueber die Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Solifugen, in: C. R. 6ième Congrès internat. Zool., Session Berne, 1904, p. 429—436.

HOLMGREN, N. (1916), Zur vergleich. Anatomie des Gehirns von Polychaeten, Onychophoren, Xiphosuren, Arachniden, Crustaceen, Myriapoden und Insekten, in: Kgl. Svenska Vetensk. Akad. Handlingar, Vol. 56, No. 1, p. 1—303.

IWANOFF, P. (1907), Eiablage und Larven von Limulus moluccanus, in: Bull. Départ. Agriculture aux Indes Néerlandaises, No. 8 (Zoologie 2), p. 18—21.

JAWOROWSKI, A. (1894), Die Entwicklung der sogenannten Lungen bei den Arachniden und speziell bei Trochosa singoriensis Laxm., in: Ztschr. wiss. Zool., Vol. 58, p. 54—78.

JORDAN, H. (1913), Vergleichende Physiologie wirbelloser Tiere, Vol. 1, Jena.

KAMPEN, P. N. VAN (1916), On the female reproductive organs and the first stages of development of Peripatopsis Dewaali, in: Tijdschr. Ned. Dierk. Vereen., (2). Vol. 15, p. 1—15.

KASSIANOW, N. (1914), Die Frage über den Ursprung der Arachnoideenlungen aus den Merostomenkiemen (Limulus-Theorie), in: Biolog. Ctrbltt, Vol. 34, p. 8—46, 108—149, 170—213, 221—247.

KAUTSCH, G. (1910), Ueber die Entwicklung von Agelena labyrinthica Clerck, II Teil, in: Zoolog. Jahrb., Vol. 30, Anat., p. 535—602.

KENNEL, J. VON (1891), Die Verwandtschaftsverhältnisse der Arthropoden, in: Schriften naturf. Gesellsch. Univ. Dorpat, Vol. 6, p. 1—47.

KINGSLEY, J. S. (1885), Notes on the embryology of Limulus, in: Quart. Journ. microsc. sci (new Ser.), Vol. 25, p. 521—572.

—— (1893), The embryology of Limulus, Prt. II, in: Journ. Morphology, Vol. 8, p. 195—268.

—— (1894), The classification of the Arthropoda, in: Tufts College Studies, Vol. 1, p. 15—48; ook in: Amer. Naturalist, Vol. 28, p. 118 en 220.

KISHINOUYE, K. (1891), On the development of Limulus longispina, in: Journ. College sci. imp. Univ. Japan, Vol. 5, p. 53—100.

KORSCHELT, E. und K. HEIDER (1892), Lehrbuch der vergleich. Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Thiere, spezieller Teil, Heft 2. Jena.

LANKESTER, E. RAY (1881), Limulus an Arachnid, in: Quart. Journ. microsc. sci (new Ser.), Vol. 21, p. 504—548, 609—649.

—— (1885), New Hypothesis as to the relationship of the lungbook of Scorpio to the gillbook of Limulus, in: Quart. Journ. microsc. Sci. (new Ser.), Vol. 25, p. 339—342.

—— (1904 A), The structure and classification of the Arthropoda, in: Quart. Journ. microsc. Sci., Vol. 47, p. 523—582.

—— (1904 B), The structure and classification of the Arachnida, ibid., Vol. 48, p. 165—269.

LANKESTER, E. RAY, W. B. S. BENHAM and E. J. BECK (1885), On the muscular and endoskeletal systems of Limulus and Scorpio, in: Trans. Zool. Soc. London, Vol. 11, p. 311—384.

LAURIE, M. (1894), On the morphology of the Pedipalpi, in: Journ. Linn. Soc. London, Zool., Vol. 25, 1896, p. 20—48.

MAC LEOD, J. (1884), Recherches sur la structure et la signification de l'appareil respiratoire des Arachnides, in: Archives de Biologie, Vol. 5, p. 1—34.

MONTGOMERY Jr., TH. H. (1909), On the spinnerets, cribellum, colulus, tracheae and lungbook's of Araneads, in: Proc. Acad. Sci. Philadelphia,. Vol. 61, p. 299—320.

MOROFF, TH., (1911) Ueber die Entwicklung des Facettenauges bei Krüstaceen, in: Biol. Zentralbl. Vol. 31.

O'CONNELL, M. (1916), The habitat of the Eurypterida, in: Bull. Buffalo Soc. nat. Sci., Vol. 11, No. 3.

PATTEN, WM., and WM. A. REDENBAUGH (1899), The nervous system of Limulus polyphemus, in: Journ. Morphology, Vol. 16, p. 91—200.

POCOCK, R. J. (1893), On some points in the morphology of the Arachnida (s. s.) with notes on the classification of the group, in: Annals Mag. nat. Hist., (ser. 6), vol. 11, p. 1—19.

PURCELL, W. F. (1909), Development and origin of the respiratory organs in Araneae, in: Quart. Journ. microsc. Sci., vol. 54, p. 1—110.

REUTER, E. (1909), Zur Morphologie und Ontogenie der Acariden, in: Acta soc. sci., Fennicae, vol. 36, No. 4.

SARLE, C. J. (1903), A new Eurypterid fauna from the base of the salina of Western New York, in: New York State Mus., Annual Report for 1902, No. 2, 1904, p. 1080—1108; als Bull. 69, Report State Palaeontologist, 1903.

SCHUCHERT, CH. ((1916), Earliest fresh water Arthropods, in: Proc. nat. Acad. Sci., U. S. A., vol. 2, p. 726.

SÖRENSEN, W. (1914), Recherches sur l'anatomie extérieure et intérieure des Solifuges, in: vid. Selsk. Overs. Köbenhavn, 1914, p. 131—215.

STRAUS DÜRCKHEIM, H. (1829), Mémoire sur le système tégumentaire et musculaire de l'araignée aviculaire, in: Bull. Sci. nat. et de Géologie, vol. 17, p. 446—447, 2ième section du Bull. univ. Sci. et de l'Industrie de M. de Férussac.

VERSLUYS, J. (1919), Die Kiemen von Limulus und die Lungen der Arachniden, in: Feestnummer voor Dr. Kerbert, Bijdragen tot de Dierkunde, vol. 21, p. 41—49.

WALCOTT, C. D. (1911), Middle Cambrian Merostomata; Cambrian Geology and Palaeontology, 2, in: Smithon. miscell. collect., vol. 57, p. 17—40.

—— (1912), Middle Cambrian Branchiopoda, Malacostraca, Trilobita and Merostomata; Cambr. Geol. and Palaeont., 2, ibid. vol. 57, p. 145—228.

WESTER, D. H. (1913), Staat Limulus chemisch het dichtst bij de Arachnoidea of bij de Crustacea, in: Tijdschr. Nederl. Dierk. Vereen., (2), vol. 12, p. 222—224.

—— (1913), Chemischer Beitrag zur Limulus-Frage; in: Zoolog.-Jahrb., Syst., vol. 35, p. 637—639.

WIREN, E. (1918), Zur Morphologie und Phylogenie der Pantopoden, in: Zoolog. Bidrag fran Uppsala, vol. 6, p. 41—181.

WOODWARD, H. (1913), The position of the Merostomata, in: Geolog. Magaz., London, Dec. 5, vol. 10, p. 293—300.

ZIMMERMANN, K. (1913), Ueber die Facettenaugen der Libelluliden, Phasmiden und Mantiden, in: Zool. Jahrb. Anat., vol. 37, 1913.

Over de phylogenie der Arthropoden vergelijke men verder:

BOAS, J. E. V. (1898), Om Peripatus' Stilling i Dyreriget, in: Oversigt Kgl. Danske Videnskab Selskab Forhandl. 1898, p. 345—365.

BÖRNER, CARL (1909), Neue Homologien zwischen Crustaceen und Hexapoden, in: Zoolog. Anz., vol. 34, p. 100—125.

BÜTSCHLI, O. (1904), Diskussion zu Ziegler, das Zoologische System im Unterricht, in: Verhandl. Deutsch. Zoolog. Gesellschaft, 1904. p. 179.

HANDLIRSCH, A. (1906), Ueber Phylogenie der Arthropoden, in: Verhandl. K. K. Zoolog.-botan. Gesellschaft Wien, Jhrg. 1906, vol. 56, p. 88—103.

KINGSLEY, J. S. (1883), Is the group Arthropoda a valid one?, in: Amer. Naturalist, vol. 17. p. 1034—1037.

OUDEMANS, A. C. (1885), Die gegenseitige Verwandtschaft, Abstammung und Classification der sogenannten Arthropoden, in: Tijdschr. Nederl. Dierk. Vereen., (2), vol. 1, p. 37—56.

TOTHILL, J. D. (1916), The ancestry of insects with particular references to Chilopods and Trilobites, in: Amer. Journ. Sci., vol. 42, p. 373—387.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer M. PINKHOF: *„Een nieuwe methode voor het registreeren van de veranderingen in den openingstoestand der huidmondjes.”* (Eerste Mededeeling.)

(Mede aangeboden door den Heer MOLL.)

§ 1. *Inleiding.*

Voor organismen als de „hoogere” planten, die als regel in de (gasvormige) atmospheer leven, maakt de regeling van de gaswisseling een belangrijk punt van de organisatie uit. In dit verband mag wel worden gewezen op het feit, dat onder de vegetatieve organen, die allen planten gemeenzaam zijn, het eenige, dat door zijn gespecialiseerden bouw tot snelle reactie in staat is en den naam van „toestel” verdient — juist de gaswisseling heeft te regelen. Dit orgaan is het huidmondje (Spaltöffnungs*apparat*).

Even belangrijk als de stomata zelf voor de plant zijn, is de bestudeering ervan voor den plantenphysioloog. Het vinden van methoden om door experimenteele onderzoekingen de werking der stomata te leeren kennen, was en is dan ook een voorwerp van aanhoudende zorg in de physiologie. Er is inderdaad op dit gebied reeds veel gewerkt, maar er blijven natuurlijk steeds onvolmaaktheden te verbeteren en als een poging daartoe is het ontwerpen van den hier te behandelen zelfregistreerenden vorm van een bestaand toestel te beschouwen.

Na de uitvoerige bespreking, die VAN SLOGTEREN in de inleiding van zijn dissertatie[1]) heeft gewijd aan de talrijke directe en indirecte methoden, die zijn uitgedacht om den openingstoestand der huidmondjes te kunnen beoordeelen — lijkt het mij overbodig deze methoden opnieuw op te sommen en bepaal ik mij tot het citeeren van hetgeen VAN SLOGTEREN zegt omtrent de porometer-methode van DARWIN en PERTZ en de voordeelen daarvan.[2])

„. . . ze berust op het volgende principe: een glazen klokje wordt luchtdicht tegen een blad bevestigd en door een aan dit klokje ver-

[1]) E. v. SLOGTEREN, De gasbeweging door het blad in verband met stomata en intercellulaire ruimten. Groningen 1917, p. 1—13.

[2]) l.c., p. 14.

bonden buisje wordt hieruit lucht gezogen, waardoor een verminderde druk in het klokje wordt verkregen. Nadat het zijbuisje is afgesloten, kan het drukverschil binnen en buiten het klokje slechts worden opgeheven, doordat er lucht door het blad wordt gezogen. Uit den tijd, noodig voor het gelijkworden van den druk, wordt een oordeel gevormd over den openingstoestand van de stomata.

Een groot voordeel van deze methode is, dat de gevonden waarden niet direct samenhangen met de transpiratie..."

„Een voordeel, dat de porometer-methode boven alle andere aanbiedt, is, dat ze in staat stelt de stomata aan het levende, met de plant verbonden blijvende blad te onderzoeken, onder *meer* normale omstandigheden dan bij de overige methoden. Ze stelt in staat om gedurende zeer langen tijd achtereen hetzelfde blad waar te nemen, zonder dat dit er eenige schadelijke gevolgen van ondervindt."

Ten slotte wijst VAN SLOGTEREN [1]) er op, dat de porometer van DARWIN en PERTZ ook daarom de voorkeur verdient, omdat hij ook kleine veranderingen in de openingswijdte nauwkeurig aangeeft en het gemiddelde van duizenden van stomata tegelijkertijd doet kennen.

Het was wel te verwachten, dat na het bekend worden van de methode van DARWIN en PERTZ [2]), pogingen zouden worden gedaan om haar voor zelfregistratie bruikbaar te maken. Het te bestudeeren verschijnsel vraagt er als het ware om, een continu beeld van zijn veranderingen te doen ontwerpen. Inderdaad zijn er reeds een drietal zelfregistreerende porometers beschreven (resp. door BALLS [3]), JONES [4]) en LAIDLAW & KNIGHT [5]) waarvan de stomatograaf van BALLS wel de meest geslaagde mag genoemd worden. Omtrent deze toestellen zegt VAN SLOGTEREN [6]): „Een gevaar hierbij is, dat men, òf met een te grooten druk werkt, òf door het toestel zeer samengesteld te maken allerlei mogelijke foutenbronnen inschakelt. Een groot voordeel van den oorspronkelijken porometer van DARWIN en PERTZ is juist de eenvoudigheid, waardoor de invloed van uitwendige factoren op het toestel uitgeoefend, zoo gemakkelijk te beoordeelen is. Ook komt de plant onder zeer abnormale omstandigheden, indien er een voort-

---

[1]) l.c., p. 16.

[2]) F. DARWIN and D. F. M. PERTZ. On a New Method of Estimating the Aperture of Stomata, Proc. Roy Soc. Lond. Serie B, Vol. **84**, 1912.

[3]) W. L. BALLS, The Stomatograph, Proc. Roy. Soc. Lond. B, **85**, 1912, p. 33.

[4]) W. NEILSON JONES, A Selfrecording Porometer and Potometer, New Phytologist, XIII, 1914, p. 353.

[5]) C. G. P. LAIDLAW and R. C. KNIGHT, A Description of a Recording Porometer etc., Annals of Botany, XXX, 1916, p. 47.

[6]) l.c., p. 16.

durende luchtstroom door het blad wordt gezogen, zooals bij deze methoden noodig is."

Bij den registreerenden porometer, dien ik thans ga beschrijven, zijn al deze bezwaren vermeden en de omstandigheden waaronder de plant tijdens de proefneming verkeert, zijn zelfs nog gunstiger dan bij den oorspronkelijken porometer.

§ 2. *Algemeene beschrijving.*

Wanneer men een zelfregistreerend instrument vervaardigt, heeft men daarbij onder meer de bedoeling het werk van den persoon, die het overeenkomstige niet-registreerende toestel bedient, te vervangen. In het meest eenvoudige geval bestaat dit werk uit het aflezen en noteeren van den stand van een wijzer en van den tijd (vgl. aneroïde-barometer en barograaf). Bij den porometer van DARWIN en PERTZ is de bediening van het toestel echter ingewikkelder, want behalve dat er voor elke waarneming *twee* standen en *twee* tijdstippen moeten worden afgelezen en genoteerd, moet na elke waarneming het toestel opnieuw in den stand van uitgang worden teruggebracht. Er zijn hier dus meerdere functies die bij een zelfregistreerenden porometer automatisch zullen moeten geschieden. Ik heb nu getracht bij het invoeren van automatische inrichtingen het principe van den oorspronkelijken porometer zooveel mogelijk onveranderd te laten.

Het toestel (zie fig. 1, onderste helft) bestaat uit een aan het blad gelijmd glazen klokje (**1**) [voorzien van het door VAN SLOGTEREN [1]) aangegeven zijbuisje (**2**), *dat voorloopig gesloten moet worden gedacht*, evenals het buisje **18** uit fig. 1], verbonden aan een U-vormigen manometer, waarin gedistilleerd water. Het gesloten been $\mathbf{M}_1$ heeft een zijbuisje met gummislang (**3**). Bij den gewonen porometer zou de waarnemer, bij het tot stand brengen van een bepaalden druk, de veerende klemkraan opendrukken, aan het slangetje zuigen, en daarna de klemkraan weer doen dichtveeren. Hier echter leidt het slangetje naar de waterstraalluchtpomp **P** en gaat daarbij door een veerende klemkraan, die het als regel afsluit, doch op de vereischte tijdstippen door een electromagneet $\mathbf{K}_1$ wordt opengetrokken, waardoor de verbinding tusschen luchtpomp en porometer tot stand komt. Is de gewenschte luchtverdunning bereikt, dan wordt de stroom van den magneet verbroken, de klemkraan veert dicht en de verdunning kan alleen worden vereffend via de huidmondjes. Daar de luchtpomp voortdurend werkt zou in de ruimte buiten de klem spoedig een

[1]) l.c, p. 18.

zeer groote verdunning ontstaan, die bij het openen van de klem ook in den porometer zelf zou optreden. Om dit te voorkomen is de van de luchtpomp komende buis buiten de klem vertakt en loopt een tweede slangetje (**4**) tusschen den beweegbaren arm (**5**) van de

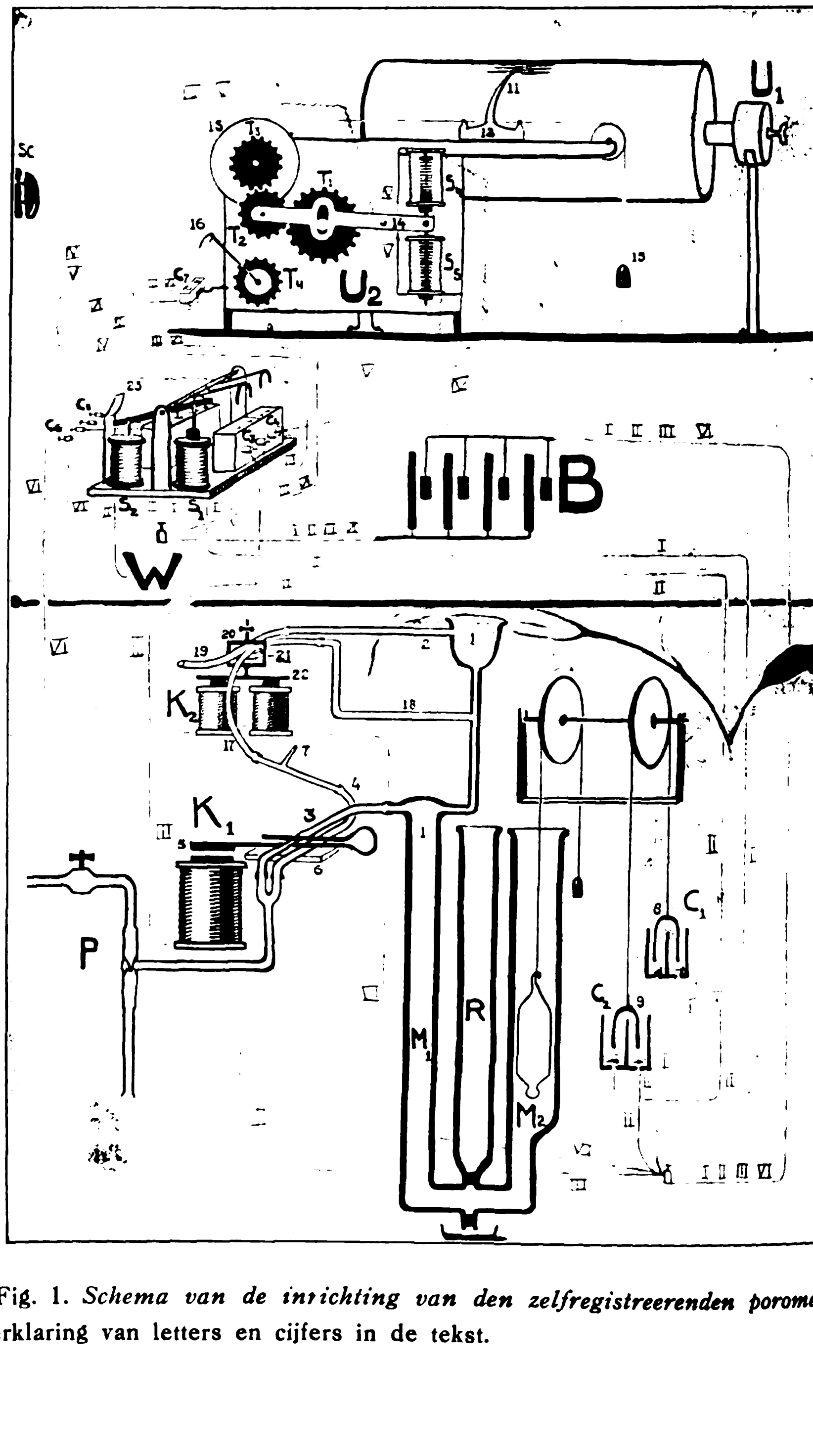


Fig. 1. *Schema van de inrichting van den zelfregistreerenden porometer.* Verklaring van letters en cijfers in de tekst.

klem en een vast metalen blokje (**6**) door. In den ruststand van de klem is dit slangetje open, waardoor de pomp in verbinding staat met de atmospheer (bij **7**). Wordt de klem echter opengetrokken, dan wordt **4** afgeklemd, zoodat de pomp nu alleen op den porometer kan werken (door **3**).

De waterstraalluchtpomp en de electromagnetische klem vervangen dus het zuigen met den mond en de veerende klemkraan.

Nu moet nog gezorgd worden, dat de klem op den juisten tijd in werking komt. Het open been $\mathbf{M_2}$ van den manometer is wijder dan het andere en op het water drijft een glazen drijver, die aan een over een katrolschijf loopend koord hangt en zoodoende bij niveau-veranderingen van het water het katrol in beweging brengt. De kracht, waarmee dat gebeurt, is uitsluitend afhankelijk van de drijfkracht van den drijver en *geheel onafhankelijk van het te vereffenen drukverschil*. Er kan dus gewerkt worden met drukken, die weinig van den atmospherischen druk verschillen, hetgeen de omstandigheden voor de proefplant natuurlijker maakt. Fig. 1 heeft betrekking op een oogenblik, waarbij het drukverschil bezig is vereffend te worden, dus het water daalt in $\mathbf{M_1}$ en stijgt in $\mathbf{M_2}$ en het katrol beweegt zich zooals de pijl aangeeft. Nu bevindt zich op dezelfde as een tweede katrolschijf en daarover loopt een koord, dat aan elk zijner uiteinden een nikkeldraden ∩-vormig beugeltje draagt. Zoo'n beugeltje beweegt zich bij draaïing van het katrol dus verticaal en wel met elk der beenen in een glazen buisje, waar onderin zich kwik bevindt, dat in een stroomketen is gebracht. Zakt nu het beugeltje **8** tot in het kwik van contact $\mathbf{C_1}$, dan wordt stroomketen **I** gesloten en de stroom gaat door de solenoïde $\mathbf{S_1}$ van den electrischen wipschakelaar **W** (bovenste helft van Fig. 1). De weekijzeren kern wordt aangetrokken, de wip wordt omgeschakeld en onder anderen komt een der geïsoleerd bevestigde ijzeren beugels in de kwikbakjes van contact $\mathbf{C_3}$, waardoor stroomketen **III** gesloten wordt, de electromagneet de klem $\mathbf{K_1}$ opentrekt, de porometer in verbinding komt met de pomp en het water in $\mathbf{M_1}$ stijgt en in $\mathbf{M_2}$ daalt. De luchtverdunning en daarmee de beweging van het water en van het katrol gaan zoolang door, tot het nu dalende beugeltje **9** het kwik in $\mathbf{C_2}$ bereikt, want daardoor wordt stroomketen **II** gesloten, solenoïde $\mathbf{S_2}$ werkt en bij het omschakelen van de wip wordt stroomketen **III** weer verbroken, de porometerruimte weer afgeklemd en nu begint de luchtstroom door de stomata weer met het vereffenen van het drukverschil. Het is duidelijk, dat men de grootte van de luchtverdunningen waartusschen men wil werken, kan regelen door de plaats van de kwikcontacten langs een statief te veranderen.

Het voorgaande kan als volgt worden samengevat:

Er zijn twee afwisselende perioden in de werking van het toestel:

Periode 1, van veranderlijken, min of meer langen duur, waarbij de stand van den wipschakelaar zóó is, dat de stroom door den electromagneet verbroken is; de porometerruimte is daardoor afgeklemd en de druk wordt door den luchtstroom door het blad verhoogd vanaf de laagst gestelde grens tot de hoogste.

Periode 2, van korten duur, waarbij de stand van den wipschakelaar zóó is, dat de stroom door den electromagneet gaat; de porometerruimte komt daardoor in verbinding met de pomp, die den druk weer verlaagt tot de laagste grens.

Elke periode begint met een contact, gemaakt door een der beugeltjes (die de beweging van het water in den manometer meemaken) waardoor de wipschakelaar in den gewenschten stand wordt getrokken.

Nu is het er om te doen den duur van periode 1 telkens te registreeren. De eenvoudigste methode zou wel zijn, den wipschakelaar bij elke omschakeling een merkteeken op een draaiende trommel te doen geven, en vervolgens de afstanden dier merkteekens uit te meten en daar een grafische voorstelling van te maken. Een dergelijke werkwijze is ook reeds gevolgd door Balls en door Laidlaw en Knight, die gebruik maakten van vrij snel draaiende dalende trommels, omdat anders de merkteekens te dicht bijeen kwamen om de afstanden te kunnen beoordeelen.

Het hier te beschrijven registreertoestel is daarentegen zoo ingericht, dat het op een langzaam draaiende trommel de gezochte gegevens direct op een overzichtelijke wijze weergeeft, zoodat de veranderingen in den openingstoestand der stomata, gedurende 24 uur bijvoorbeeld, zonder meten of overteekenen zijn af te lezen.

Het bestaat ten eerste uit een registreertrommel, die door het uurwerk $\mathbf{U}_1$ in 24 uur wordt rondgedraaid (zie fig. 1 bovenaan). De schrijftstift (**11**) is bevestigd aan een wagentje (**12**), dat over een rail evenwijdig aan de beschrijvende lijn van den cylinder kan worden bewogen, doordat het met een koord verbonden is aan de katrolschijf **13**, die op één as zit met het tandrad $\mathbf{T}_1$ van het tweede uurwerk $\mathbf{U}_2$. $\mathbf{T}_1$ is echter niet steeds in verbinding met de overige tandraderen van $\mathbf{U}_2$. Het tandrad $\mathbf{T}_2$, dat de beweging van het uurwerk op $\mathbf{T}_1$ moet overbrengen, draait nl. niet in de kast van het uurwerk, maar in een afzonderlijken hefboom, die om de spil **14** over een kleinen hoek bewogen kan worden door beurtelingsche aantrekking van de weekijzeren kernen door de solenoïdes $\mathbf{S}_4$ en $\mathbf{S}_5$.

Trekt S_5 naar beneden, dan gaat T_2 naar boven en de beweging van T_1 wordt op T_3 overgebracht, waardoor het wagentje met een bepaalde snelheid naar links wordt getrokken. Trekt daarna echter S_4, dan gaat T_2 naar beneden, T_3 wordt losgelaten en het wagentje wordt door het gewichtje **15** teruggetrokken naar het nulpunt.

De bedoeling van deze inrichting is nu, dat het wagentje slechts gedurende de te registreeren periode 1 van den porometer door het uurwerk wordt meegenomen en dat het gedurende periode 2 gelegenheid heeft naar het nulpunt terug te loopen, om bij de volgende periode 1 weer met zijn eenparige beweging te beginnen. Hoe langer nu periode 1 duurt, des te langer blijft het uurwerk onafgebroken trekken, dus des te langer wordt de lijn, die de schrijfstift naar links schrijft. De linkeruiteinden van de zoo verkregen lijnen geven zoodoende een duidelijk beeld van den gang van den duur der perioden 1, dat is van den openingstoestand der huidmondjes.

Voor het op den juisten tijd omschakelen van de tandraderen zorgt de wipschakelaar **W**, die immers juist bij de afwisseling van twee perioden zelf wordt omgeschakeld. Aan zijn as zijn nl. nog eenige ijzeren beugels geïsoleerd bevestigd en deze dienen om bij het begin van periode 1 in het kwikcontact C_5 de stroomketen **V** te sluiten, waardoor de solenoïde S_5 (aan het uurwerk) werkt en T_2 in T_3 laat grijpen — terwijl bij het begin van periode 2 in C_4 stroomketen **IV** gesloten wordt, die door middel van S_4 het tandrad T_2 weer naar beneden trekt.

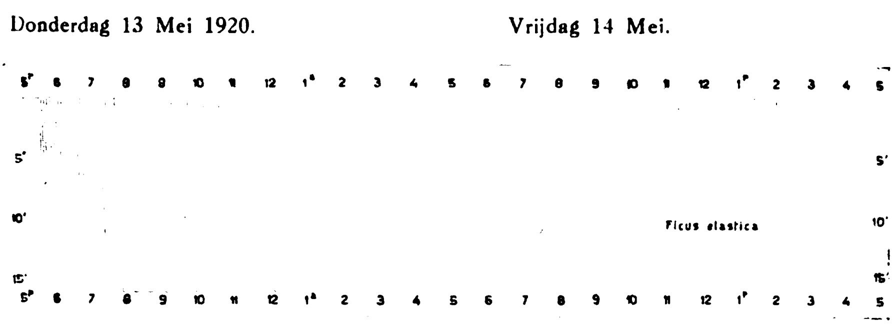


Fig. 2. Gang van den openingstoestand der stomata in een blad van *Ficus elastica* gedurende bijna 24 uur. De lengte der lijnen geeft aan den tijd, waarin de druk in den porometer werd verhoogd van 5 tot 1 cM. water onder den barometerstand.

Fig. 2 is een reproductie van een met behulp van bovenstaande inrichting verkregen diagram. Ten overvloede wijs ik er op, dat de afstand tusschen de lijntjes des te kleiner is, naarmate de perioden 1 korter zijn. Duurt periode 1 langer dan 16 minuten, dan gaat de

schrijfstift niet verder, zoodat de lijn a. h. w. wordt afgeknot. Dit is echter geen bezwaar, omdat bij zulke langdurige perioden de lengte tot in halve minuten nauwkeurig op de tijdas kan worden afgelezen. Het beeld, dat fig. 2 geeft, doet duidelijk zien hoe op 13 Mei te 5.30p reeds een langzame sluiting van de stomata bezig was, tusschen 7 en 8 uur ging de sluiting hoe langer hoe sneller, te 8.30p was de tijdsduur 5 $\times$ zoo groot als te 5.30p. Vervolgens bleven de huidmondjes in den sterk vernauwden toestand tot ongeveer middernacht, toen begonnen ze weer open te gaan, eerst heel langzaam, maar tusschen 4 en 6 uur 's morgens zeer snel. Van 7 tot 9 uur waren zij meer geopend dan den vorigen middag 5.30. Tusschen 9 en 2 vertoonde de openingstoestand vrij sterke schommelingen, die, in verband met waarnemingen die ik hier niet verder bespreken zal, waarschijnlijk meer aan temperatuursinvloed dan aan het licht moeten worden toegeschreven. Bij de maximale opening te 2 uur was periode 1 zestien maal zoo kort als bij de grootste sluiting te 10 uur in den vorigen avond. Na 4 uur begon weer een langzaam sluiten, zoodat de toestand omstreeks 5 uur nagenoeg dezelfde was als 24 uur te voren.

Op het eerste gezicht lijken de op deze wijze verkregen resultaten bevredigend. Ongetwijfeld is ook uit het diagram de algemeene gang van den openingstoestand der stomata af te lezen. Toch heeft de tot nu toe behandelde inrichting hetzelfde bezwaar als de andere registreerende porometers: de onafgebroken luchtstroom door het blad. Aan dit bezwaar kan worden tegemoet gekomen, door tusschen elke twee waarnemingen een rusttijd in te schakelen, gedurende welke de druk in den porometer gelijk is aan dien van de atmospheer. Daarvoor is de volgende inrichting aan het toestel toegevoegd (Fig. 1, bovenste helft). De stroomketen **III**, die den electromagneet in staat stelt den porometer in verbinding te brengen met de pomp, is niet alleen aan de contactplaats C_8 (aan den wipschakelaar) onderbroken, doch bovendien bij C_7 (kwikbakjes in ebonieten blokje aan het uurwerk U_1 bevestigd). Al komt dus aan het einde van periode 1 de verbinding in C_8 tot stand, de stroom zal niet door den magneet gaan, voor bovendien C_7 gesloten is. Dit kan gebeuren door een beugeltje (**16**), dat aan het tandrad T_4 bevestigd is. In den afgebeelden stand (gedurende periode 1) is dit tandrad vrij van het uurwerk en wordt door een gewichtje zoo gehouden, dat het beugeltje **16** een bepaalden afstand van C_7 houdt. Bij het einde van periode 1 gaat T_3 naar beneden en zijn tanden grijpen nu in die van T_4. Nu draait dit laatste langzaam terug en na eenigen tijd bereikt **16** C_7, waardoor de stroomketen **III** geheel gesloten is en het verminderen van den druk in den porometer kan beginnen.

Daar de stang, waaraan **16** geisoleerd bevestigd is, met klemming om de as van $\mathbf{T_4}$ gedraaid kan worden, is de hoek, waarover het door het uurwerk bewogen moet worden, naar willekeur te stellen, dus hiermee kan de duur van de rustperiode bepaald worden.

Nu is ons doel, om gedurende de rustperiode in den porometer den atmospherischen druk te hebben, nog niet bereikt, want bij het begin van den rusttijd is er nog een drukverschil en het zou lang duren eer dit geheel vereffend was.

De porometerruimte moet dus direct in verbinding met de buitenlucht worden gebracht en dit geschiedt nu langs het slangetje **19** (Fig. 1, onderste helft), dat aan het zijbuisje **2** van het glazen klokje zit, en dat nu niet, zooals bij VAN SLOGTEREN's porometer, met een klemkraan is afgesloten, doch door een electromagnetische klem loopt. Gedurende periode 1 was **19** tusschen het raampje **20** en het vaste blokje **21** afgeklemd, doordat het anker **22** door den electromagneet $\mathbf{K_2}$ was aangetrokken. Hiervoor dient stroomketen **VI**, die aan het kwikcontact $\mathbf{C_6}$ van den wipschakelaar kan worden onderbroken, doch in den afgebeelden stand (periode 1) juist door een beugeltje gesloten blijft. Schakelt de wip aan het einde van periode 1 om, dan wordt **VI** dus onderbroken en het raampje **21** gaat door de veerkracht van het slangetje zelf naar boven, zoodat **19** geopend is en de druk binnen en buiten den porometer gelijk wordt. Is de rustperiode geëindigd, dan moet **19** weer gesloten worden, want anders kan de pomp den druk niet verlagen. Om dit te verkrijgen is stroomketen **VI** ook langs $\mathbf{C_7}$ geleid, zoodat **19** wordt afgeklemd zoodra **16** in het kwik komt. Daar $\mathbf{T_4}$ (dus **16**) niet eerder door $\mathbf{T_3}$ wordt losgelaten, dan wanneer de wipschakelaar den in het schema weergegeven stand heeft gekregen, dus de stroom **VI** ook in $\mathbf{C_6}$ gesloten is, blijft **VI** doorgaan, en slangetje **19** blijft dicht, ook gedurende den overgang tusschen periode 2 en 1.

De inrichting is derhalve zoo, dat stroomketen **III** eerst geheel gesloten is, wanneer *zoowel in* $\mathbf{C_3}$ *als in* $\mathbf{C_7}$ contact is gemaakt, terwijl de stroom door **VI** reeds gaat wanneer in *een van beide* contacten $\mathbf{C_6}$ of $\mathbf{C_7}$ het beugeltje in het kwik komt.

In de practijk was gebleken, dat gedurende de rustperiode, door de transpiratie van het blad, in het glazen klokje de lucht met waterdamp verzadigd werd, waardoor de toestand van den gomrand niet betrouwbaar bleef. Het was dus zaak de lucht tijdens de rust te ververschen en dit kon worden bereikt, door het „looze" slangetje **4**, dat bij **7** open eindigde en waar dus tijdens periode 1 en de rust door de pomp lucht van buiten in wordt gezogen, een zijtak (**17**) te geven, die door klem $\mathbf{K_1}$ loopt en vervolgens langs **18** onder

in het glazen klokje uitkomt. Is **K_1** open, dan gaat er dus een lucht-stroom bij **19** naar binnen en langs **2**, **1**, **18**, **17**, **4** naar de pomp. Doordat **7** steeds open blijft is de luchtstroom door het klokje niet te sterk. Als de rusttijd voorbij is, wordt **17** in **K_1** tegelijk met **19** afgeklemd en de circulatie houdt op.

Bij het aldus gewijzigde toestel treden dus 3 perioden op:

Periode 1. Porometer-ruimte afgesloten. De lucht komt door stomata binnen.

Rustperiode. Porometer-ruimte zoowel met de atmospheer als met de pomp in verbinding.

De lucht circuleert.

Periode 2. Porometer-ruimte alleen met de pomp in verbinding. De lucht wordt verdund.

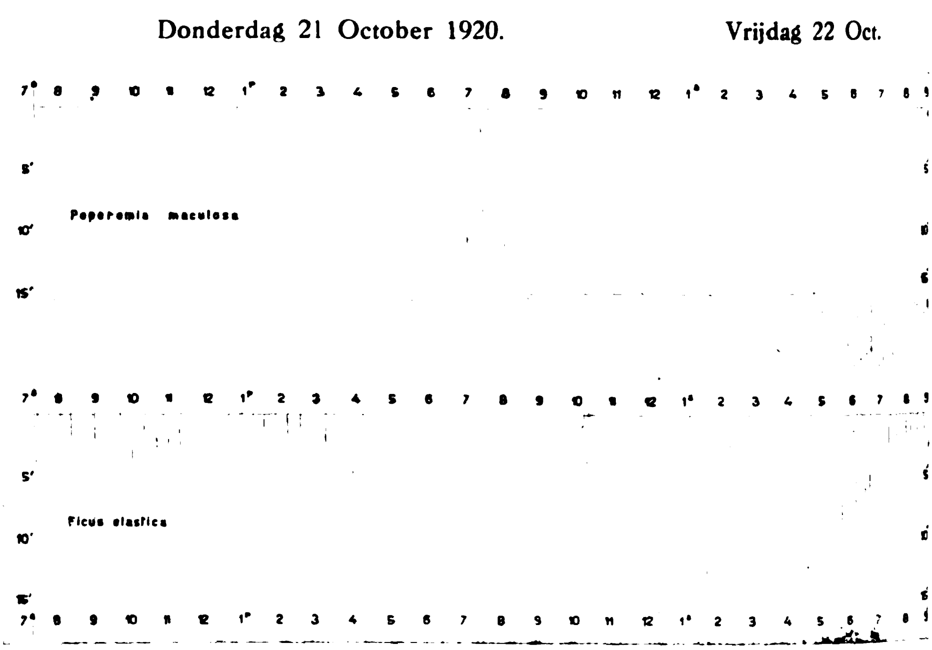


Fig. 3. Gang van den openingstoestand der stomata in bladeren van *Peperomia maculosa* en *Ficus elastica*, gelijktijdig geregistreerd met tusschenpoozen van 20 minuten gedurende bijna 26 uur. De lengte der lijnen geeft aan den tijd, waarin de druk in den porometer wordt verhoogd van 7 tot 4 c.M. water beneden den barometerstand.

Fig. 3 is een foto van een diagram, waarop de rustperioden tusschen de waarnemingen te zien zijn. Het laboratorium is in het bezit van twee registreerende porometers, die op één cylinder schrijven, waardoor het mogelijk is twee planten gelijktijdig te onderzoeken. In dit geval waren het *Ficus elastica* en *Peperomia maculosa*. Het is op-

vallend, dat bij *Ficus* sinds het invoeren van den rusttijd, een veel grooter amplitude is waar te nemen, dan bij de onafgebroken registreering, hetgeen de noodzakelijkheid van de rustperiode bewijst (vergelijk fig. 2 en fig. 3). Was van 13 op 14 Mei de tijdverhouding tusschen „meest geopend" en „meest gesloten" 1 : 16, in fig. 3 is zij **1 : 85**. Ook is merkwaardig, dat gedurende den nacht nog een open- en dichtgaan is waar te nemen, hetgeen bewijst, dat nog andere factoren, dan het licht een rol spelen.

Vergelijking tusschen *Ficus* en *Peperomia* doet zien, hoe bij de laatste midden overdag de stomata den luchtstroom zeer weinig weerstand bieden, tegen den avond gaat de sluiting bij *Ficus* veel sneller. Wat te 4 uur nog 5½ minuut duurt, gebeurt tusschen 5 en 7 uur in 125 minuten. *Peperomia* gaf in den avond een langzamer sluiting dan *Ficus*, in den ochtend echter een minstens even snel opengaan. De verhouding tusschen open en dicht is bij *Peperomia* al bijzonder sterk. 's Middags 1 uur is de dalingstijd nog geen ¼ minuut, omstreeks middernacht 32 minuten. Het is hier niet de plaats om verder

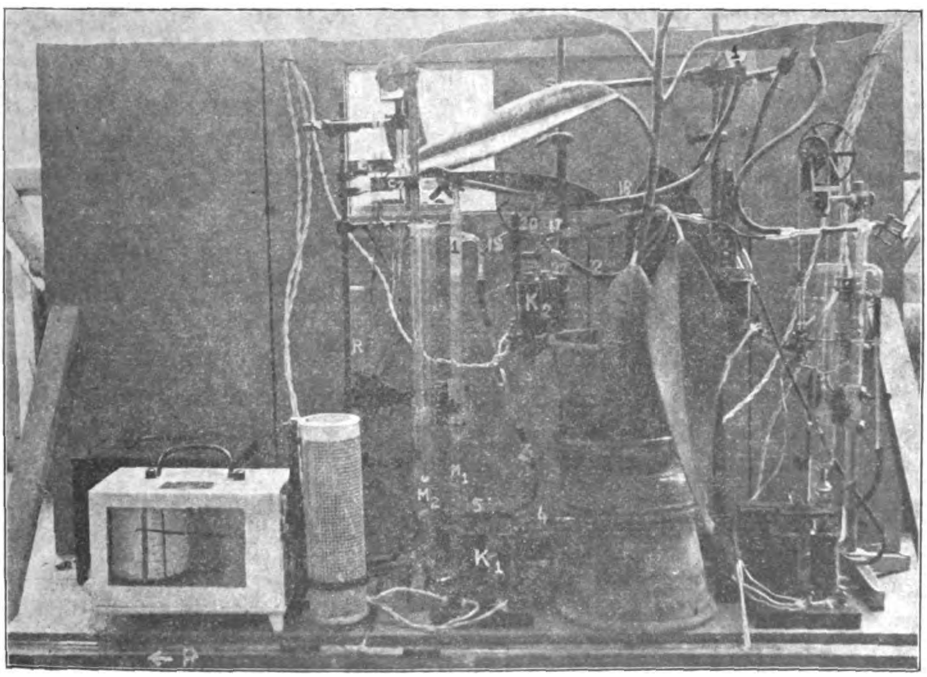


Foto J. Quelle.

Fig. 4. ***Opstelling van twee registreerende porometers***, waarvan de klokjes zijn aangebracht aan één blad van een *Ficus elastica*, ter weerszijden van de hoofdnerf. Verklaring van letters en teekens in den tekst. Links een hygrograaf en daarachter een thermograaf. Door het geopende luikje bovenaan in het midden is iets van den zonneschijnautograaf te zien.

op deze resultaten, die dadelijk tot verdere physiologische beschouwingen aanlokken, in te gaan.

§ 3. *Bijzonderheden.*

Bij de practische uitvoering van het besproken systeem zijn verschillende ervaringen opgedaan, die ik hier wil mededeelen. In fig. 4 en 5 is de werkelijke opstelling der onderdeelen afgebeeld, welke hier en daar van de schematische fig. 1 afwijkt. De beteekenis van letters en cijfers is overal dezelfde.

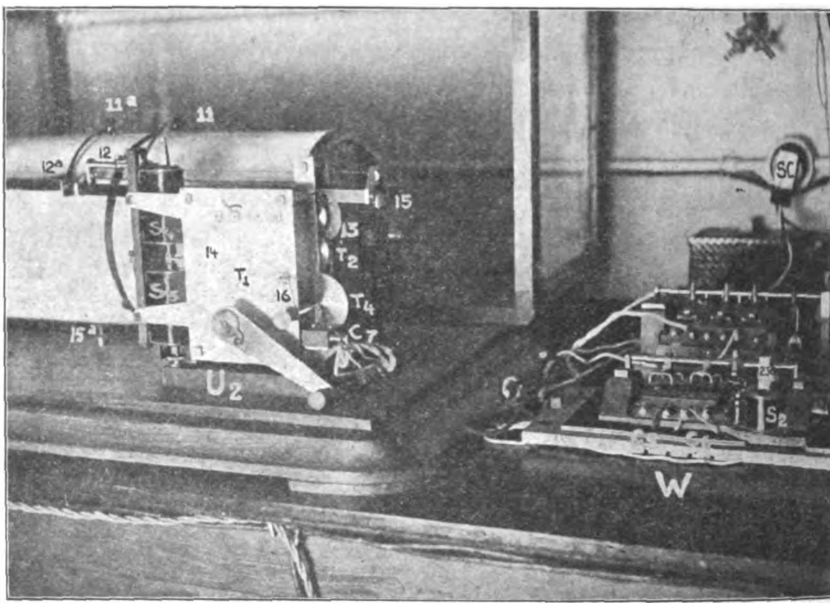


Foto J. QUELLE.

Fig. 5. ***Opstelling van het registreertoestel.*** **Links de registreertrommel en daarvoor één der twee schrijfuurwerken (U_2). Het overeenkomstige tweede uurwerk stond te veel naar links om op de foto te komen, slechts eenige er bij behoorende onderdeelen (11^a, 12^a, 15^a) zijn te zien. Het uurwerk, dat de trommel beweegt, moet ook links gedacht worden. Rechts achter elkander twee wipschakelaars en daarachter een weerstand. Verdere verklaring der teekens in den tekst.**

1. *Het glazen klokje.* Tegenwoordig gebruik ik steeds het model, dat VAN SLOGTEREN op pag. 18 van zijn dissertatie heeft afgebeeld, dus met het zijbuisje dicht bij den rand ingeplant. Ik gebruik bij *Ficus elastica* klokjes met wijde opening (middellijn 4 mM.), omdat daardoor een grooter aantal stomata medewerkt en het dalen van het water in den porometer vlugger gaat. Doordat ik bij drukken werk, die weinig beneden den atmospherischen liggen (nl. tusschen 7 en 4 mM. onderdruk of tusschen 5 en 1 mM. onderdruk) om den

toestand voor de plant zoo weinig mogelijk van den natuurlijken te doen verschillen, is de dalingstijd grooter dan b.v. bij de meeste proeven van VAN SLOGTEREN. Daarom zijn maatregelen als het gebruiken van groot-oppervlakte-klokjes en het verkleinen van den gas-inhoud van den porometer aan te bevelen.

Een teer punt blijft steeds het bevestigen van het klokje aan het blad. In 1914, toen ik mij met gewone porometerwaarnemingen bezig hield, heb ik een aantal kleefmiddelen geprobeerd, en evenals VAN SLOGTEREN [1]) kwam ik tot de slotsom, dat gewone *Arabische gom* verreweg de voorkeur verdient. In 1919 ben ik op aanraden van mijn collega J. HEIMANS er toe overgegaan een kleine hoeveelheid *Sesamolie* door de gom te mengen en inderdaad wordt de consistentie daardoor wat taaier en komen bij het drogen minder gauw barstjes voor. Bovendien voeg ik steeds een spoortje *thymol* toe, tegen het bederven. Te veel thymol schaadt de proefplant.

Ook ik heb als ervaring, dat goed aangehechte klokjes tot 4 weken bruikbaar kunnen blijven, maar dan moet tusschen de proefnemingen ook geregeld geventileerd worden. Het is van belang, dat de lucht in de kas althans in de eerste uren na de aanhechting nogal droog is, anders blijft de gom te lang week en is er kans dat het blad zich, zij het ook weinig, van het klokje aftrekt.

II. *De manometer*. De beide beenen zijn ongelijk van doorsnede, dus voor het in dienst brengen moet men den manometer ijken om te weten welke afstand in de nauwe buis overeenkomt met een drukverandering van 1 cM. water. Het stellen van het wateroppervlak op het 0-punt gaat zeer eenvoudig en vlug, door de aanwezigheid van een waterreservoir **R** (dat door een slang met klemkraan aan den manometer verbonden is) en van een afvoer met klemkraan. De practijk leert, dat er bijna geen water uit den manometer verdampt, zoodat het toestel 48 uur achtereen kan werken, zonder dat de vloeistofspiegel opnieuw behoeft te worden gesteld [2]).

III. *De electromagnetische klem* K_1. Het geheele toestel is eigenlijk gebaseerd op de stelling, dat de veerende klemkranen de slangen absoluut afsluiten en dat op de plaatsen waar de slangen over de glazen buizen geschoven zijn, geen lekken mogelijk is. Hetgeen fig. 3 voor Ficus elastica vertoont tusschen 5 en 7 uur n.m. is wel het beste bewijs voor de bruikbaarheid van deze stelling. Omtrent de inrichting van de klem zelf is niet veel meer te zeggen, dan uit de afbeeldingen te zien is. De electrische stroom moet echter uitvoeriger

[1]) l.c., p. 20.

[2]) De U-vormige manometer is daarom ook bij den niet-registreerenden porometer te verkiezen boven stijgbuis en bak.

besproken worden. Hij wordt geleverd door een accumulatorenbatterij van 7 cellen, dus met een spanning van 14 Volt en de stroomsterkte is voor de klem **K**$_1$ slechts 1 Ampère. Hij gebruikt zeer weinig stroom, want de tijd van het opzuigen van het water in den manometer duurt hoogstens 4 secunden. De stroom van de batterij wordt ook gebruikt voor de solenoïdes van den wipschakelaar (stroomketen **I** en **II**) en voor de klem **K**$_2$ (stroomketen **VI**). Daar een gedeelte van de toestellen in de kas staat (alles wat in fig. 1 onder de horizontale streep staat) en de rest in een laboratoriumkamer (wipschakelaar, registreertoestel en batterij) is een aantal draadverbindingen noodig. Een buis, waarin 16 draden, loopt tusschen de twee localiteiten en de draden eindigen op klemmenbordjes met genummerde klemmen, vanwaar soepele snoeren naar de verschillende toestellen loopen. Er zijn twee z.g. trapschakelaars aangebracht, waardoor zoo noodig de stroom zoowel in de kas als in de kamer kan worden gesloten en verbroken.

IV. *De electromagnetische klem K_2*. Deze moet, behalve in den rusttijd, steeds gesloten blijven en dus stroom verbruiken. Daarom is zij zoo ingericht, dat een stroom van 0,45 Ampère voldoende is. Voor de slangetjes **17** en **19** is dan ook van *ventielslang* gebruik gemaakt.

V. *De katrol-contactinrichting*. De katrol-as loopt zeer licht tusschen twee conische tappen. De drijver is van glas en bevat onderin kwik. Een dun koord loopt over de ééne katrolschijf en draagt aan zijn andere uiteinde een tegenwichtje. In fig. 4 rechts is te zien, dat in het nieuwste model de tweede katrolschijf grooter is, waardoor de beweging van de beugeltjes **8** en **9** wordt vergroot en men de contacten **C**$_1$ en **C**$_2$ zuiverder kan stellen.

Zooals uit de beschrijving is gebleken, heb ik bij de contactinrichtingen steeds gebruik gemaakt van kwik, en wel omdat kwikcontacten absoluut betrouwbaar zijn, in tegenstelling met sleepcontacten van andere metalen en omdat voor het totstandbrengen van de verbinding geen kracht noodig is.

Het zou niet gemakkelijk zijn het kwik in de glazen buisjes van **C**$_1$ en **C**$_2$ schoon te houden wanneer het door het vonken verontreinigd werd. Nu treden bij de gebruikte stroomsterkte alleen vonken op bij het verbreken van den stroom, dus het was zaak de stroomketens **I** en **II** steeds ergens anders te verbreken vóór de beugeltjes **8** of **9** weer uit het kwik gaan. Dit is gelukt door aan

VI. *den wipschakelaar* een (niet in het schema opgenomen) hefboomenstelsel aan te brengen, waardoor, alweer met behulp van kwikcontacten, de stroomketens **I** en **II** kunnen worden verbroken, wanneer de wip den gewenschten stand heeft bereikt en verdere werking van

de solenoïdes S_1 of S_2 overbodig is. Door deze inrichting is een tweeledig doel bereikt: 1° wordt de verbrekingsvonk verplaatst naar een plaats waar het schoonblijven van het kwik niet noodzakelijk is; 2° wordt het stroomverbruik door de solenoïdes tot een minimum beperkt.

Bij de eerste proefnemingen met den wipschakelaar bleek, dat door het veerkrachtig neerkomen van de ijzeren beugeltjes in de kwikbakjes, de wip na een moment weer halverwege terugsprong. Om dit te voorkomen is door den uurwerkmaker J. MESSIAS een reminrichting aangebracht, bestaande uit een tweetal metalen veeren, die de beweging van den hefboom dempen. Eén daarvan is als N°. **23** in het schema aangegeven.

De kwikbakjes van de contacten C_2 tot C_6 zijn uitgeboord in ebonieten blokken. Onder in de holten eindigen de ijzeren schroeven van de zijdelings aangebrachte zoogen. „mannetjes", waardoor de stroom op het kwik wordt overgebracht.

VII. *Het uurwerk U_2.* De verhouding van de tandraderen en de omtrek van het katrol **13** is zoodanig, dat het wagentje wordt voortgetrokken met een snelheid van 1 mM. per minuut.

Het is van belang, dat de hefboom, waarin T_2 draait telkens stevig in een bepaalden stand wordt gehouden. Daarom schiet hij na elke beweging achter een veerenden pal. Dit heeft weer tengevolge, dat de solenoïdes S_4 en S_5 groote kracht moeten bezitten om den hefboom langs den pal terug te trekken. De door de batterij geleverde electrische stroom zou dit niet kunnen bewerken, en er is voor deze inrichting dan ook gebruik gemaakt van den wisselstroom van 220 Volt van het stadsnet, welke stroom aan een stopcontact **SC** wordt ontleend. Door de gegolfd geteekende stroomketens **IV** en **V** gaat dus sterkstroom. De Heer MESSIAS heeft een inrichting bedacht, waardoor ook hier de stroom niet langer doorgaat dan strikt noodig is. De verticale as, waaraan de weekijzeren kernen in S_4 en S_5 bevestigd zijn, eindigt nl. aan weerskanten in een beenen punt en deze verbreekt den stroom als de uiterste stand bereikt is, door twee met goud bedekte veertjes van elkaar te drukken (Dit is in de afbeelding niet weergegeven).

VIII. *De schrijfstift.* Het schrijven gebeurt met registreerinkt en wel met roode, omdat de gebruikelijke paarse inkt bij photographeeren niet wordt gereproduceerd. De glazen pennetjes zijn vervaardigd naar het model, dat bij het Kon. Ned. Meteorologisch Instituut te De Bilt in gebruik is [1]). Elk pennetje bestaat uit een bolvormig reservoir

[1]) Dr. C. SCHOUTE, Directeur aan het Instituut, was zoo vriendelijk mij met deze methode bekend te maken.

dat genoeg inkt kan bevatten voor 48 uur registreeren) van waar uit een puntig capillair buisje komt, dat op het papier rust. Het capillair is met behulp van lak in het reservoir bevestigd. Het geheel is gevat in een kleine klemschroef aan het uiteinde van den arm van het wagentje.

IX. *De registreertrommel* draait in 24 uur rond en heeft een omtrek van 72 cM. Elk uur wordt dus 3 cM. en de minuten van ½ mM. zijn gemakkelijk af te lezen. Als papier wordt millimeter-papier gebruikt, zoodat niet achteraf een schaal behoeft te worden aangebracht en de gegevens direct nauwkeurig kunnen worden nagegaan. Het papier wordt met smalle koperen banden om de trommel geklemd.

De lijnen, die door het pennetje worden geschreven als het wagentje door het uurwerk U_2 wordt voortgetrokken, maken met den ordinaat een hoek, waarvan de tangens is: het quotiënt van den afstand, die door de registreertrommel in één minuut wordt afgelegd en dien, welke het wagentje in één minuut langs zijn rail aflegt, of $\frac{1}{20}$.

Zooals reeds boven is aangestipt, wordt het wagentje gestuit wanneer het 15 minuten geloopen heeft. Het uurwerk kan dan blijven doorloopen, doordat op de as van T_1 een klemming is aangebracht. Gedurende dien tijd schrijft de pen een lijn evenwijdig aan de abscis (zie fig. 2 en 3).

X. *Algemeene opmerkingen.* De gedachte om gebruik te maken van een periodiek teruglooperden schrijfstift, is door mij ontleend aan de in de meteorologie gebruikte zelfregistreerende windsnelheidsmeters. Daar wordt door het elke 5 minuten teruglooppen van den schrijfstift de afgelegde weg automatisch gedifferentiëerd naar den tijd, dus de snelheid wordt opgeschreven. Bij mijn toestel heeft het differentieeren niet op de gebruikelijke wijze naar den tijd plaats, maar wordt de snelheid opgevat als „de tijd noodig om een bepaalden weg af te leggen”.

In dit verband wil ik er op wijzen, dat het registreertoestel op zich zelf, dus afgescheiden van den porometer, gebruikt kan worden voor allerlei andere physiologische onderzoekingen, waarbij snelheden moeten worden geregistreerd. Ik hoop spoedig den groeiboog van een inrichting te voorzien, waardoor het mogelijk wordt den groei op de bedoelde wijze te registreeren. Dan kunnen de veranderingen in groei*snelheid*, waar het eigenlijk om gaat, direct worden afgelezen, terwijl zij bij de gebruikelijke methode uit de helling van de curve moeten worden opgemaakt.

Het is misschien niet ongewenscht de voordeelen van registreer-instrumenten in het algemeen nog even na te gaan, dus afgezien

van de hier gevolgde speciale methode. In de eerste plaats hebben we dan de onafgebroken waarneming, vervolgens een groote tijdbesparing, want als de constructie voldoende zeker is, kan een toestel als het onderhavige 24 uur werken, zonder dat er naar behoeft te worden omgezien. Ten slotte de nauwkeurigheid waarmee alles te regelen is. Het is bv. een proefnemer onmogelijk om op de hier gevolgde wijze waar te nemen: een waarneming, waarbij geduldig gewacht moet worden, dan precies 20 minuten wachten, weer een waarneming, weer 20 minuten wachten — dat is een tijdroovend en weinig animeerend werk, dat men niet lang achtereen kan volhouden. Ook is het bij langzame beweging van den meniscus niet precies te zeggen, wanneer het juiste punt is bereikt. Het kwikcontact zegt dat met pijnlijke nauwkeurigheid. Inderdaad is het werken met zulke kleine drukverschillen (dus onder zoo weinig ongunstige voorwaarden voor de plant) als hier mogelijk is, voor een gewonen waarnemer bijna onuitvoerbaar.

Gaan we ten slotte na, welke voordeelen het hier beschreven toestel boven de bestaande registreerende porometers biedt, dan vinden we als algemeen voordeel: de mogelijkheid van het invoeren van rusttijden met luchtverversching tusschen de waarnemingen. Vervolgens bezien we afzonderlijk den eigenlijken porometer en het registreertoestel. De porometer zelf is bijna even compact te bouwen als de stomatograaf van Balls, dus evenzeer geschikt om in kassen of buiten tusschen de planten gebruikt te worden. Het mechanisme, dat zich in de onmiddellijke nabijheid van de plant moet bevinden is echter eenvoudiger en door de kwikcontacten zekerder in werking. Als complicatie komt er echter bij, dat het toestel door middel van een buis met een luchtpomp verbonden moet zijn. De porometer van Laidlaw en Knight is door de noodzakelijkheid van het plaatsen van een bad van constante temperatuur om de flesch van Mariotte, slechts voor niet te langdurige laboratoriumproeven te gebruiken en staat daardoor, ondanks den ongeveer constanten druk, bij de toestellen van Balls en van mij ten achter. Ook lijkt mij het zich vormen en loslaten van een druppel water een minder zuivere maat voor een tijdsverloop, dan de niveauverandering in een manometer. — Alle genoemde methoden winnen het echter van die van Jones, waarbij de registreerinrichting met den porometer één, veel ruimte innemend, geheel vormt.

Het voordeel van de electrische verbinding tusschen porometer en registreertoestel, die een willekeurigen afstand tusschen beide mogelijk maakt, is n.l. niet te onderschatten. Men kan de plant onder de meest verschillende omstandigheden onderzoeken, terwijl het regis-

treeren op een vaste plaats gebeurt en het toestel niet van ongewone temperatuur of vochtigheid te lijden heeft.

De speciale voordeelen van de gebruikte registreermethode zijn reeds terloops ter sprake gekomen: 1°. De veel nauwkeuriger afleesbaarheid, ook van zeer korte perioden, zonder dat de eenheden langs de tijdas bijzonder groot behoeven te zijn; 2°. het schrijven van een direct bruikbare graphische voorstelling van den gang van het te bestudeeren verschijnsel; 3°. de bruikbaarheid voor het registreeren van andere physiologische verschijnselen waarbij het om snelheden gaat en dat op meer overzichtelijke wijze dan tot dusverre het geval was. Deze eigenschappen van het registreerapparaat wegen wel tegen de betrekkelijk hooge aanschaffingskosten op en maken het tot een toestel waarvan op een laboratorium geregeld gebruik kan worden gemaakt.

De waarnemingen met een registreertoestel, dat een geheelen dag alleen kan worden gelaten, vereischen intusschen, dat ook de omstandigheden, waaronder de proefplant zich bevindt, onafgebroken worden opgeschreven. Anders is niet na te gaan, waaraan de optredende verschijnselen zijn toe te schrijven. Het ideaal zou zijn temperatuur, vochtigheid, enz. op één registeertrommel met het te onderzoeken levensverschijnsel te registeeren. Voor dit echter bereikt is, moeten wij tevreden zijn met de bestaande toestellen op dit gebied, die als eenig inconveniënt hebben, dat de in een week ronddraaiende trommel te klein is om den tijd zelfs tot in 5 minuten nauwkeurig te kunnen aflezen. Door de welwillendheid van Prof. E. VAN EVERDINGEN, Hoofddirecteur van het Kon. Ned. Meteor. Instituut, had ik tijdens mijn proeven eenige instrumenten in bruikleen. Thans beschikt het Plantenphysiologisch Laboratorium zelf over een thermograaf een hygrograaf en een zonneschijn-autograaf.

De in het voorgaande weergegeven resultaten zouden niet bereikt zijn, wanneer ik niet had kunnen steunen op het vertrouwen in het slagen der onderneming, dat de directeur van het Laboratorium, Prof. E. VERSCHAFFELT steeds heeft getoond, en op den bijstand in raad en daad, dien ik van den Heer J. VAN DER ZWAAL, instrumentmaker en den Heer J. MESSIAS, uurwerkmaker, heb ondervonden bij de technische uitvoering der plannen.

October 1920.

(*Uit het Plantenphysiologisch Laboratorium der Universiteit van Amsterdam*).

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer A. D. FOKKER: *„De geodetische precessie; een uitvloeisel van Einstein's gravitatietheorie".*

(Mede aangeboden door den Heer A. EINSTEIN.)

Men weet wat een evenwijdige verplaatsing of een geodetische translatie beteekent in een niet-euclidische ruimte[1]) en men weet, hoe een kompaslichaampje, dat steeds evenwijdig aan zichzelf blijvende een omloop volbrengt in een gesloten kring, tengevolge van de ruimtekromming ten slotte niet op dezelfde manier georiënteerd zal zijn als in den beginne: er komt een zekere krommingswenteling voor den dag. Het wilde nu SCHOUTEN voorkomen[2]) dat bij de jaarlijksche beweging der aarde ook haar as van omwenteling — althans indien de aarde een bol ware — evenwijdig aan zich zelf zou blijven in den algemeenen zin, en aldus aan het eind van het jaar naar een ander punt van den hemel wijzen zou, in overeenstemming met de in het veld der zon teweeggebrachte ruimtekromming. Deze geodetische precessie zou op de gewone, in de astronomie uit andere oorzaken berekende precessie gesuperponeerd moeten worden.

Het probleem is echter niet zoo eenvoudig als het hier voorgesteld is. Wel kan men bewijzen, dat de omwentelingsas evenwijdig aan zichzelf blijft, maar in werkelijkheid hebben wij te maken, niet met een rondvoeren van de as in de ecliptica-van-een-bepaald-oogenblik t, maar met het medenemen van de as langs het vierdimensionale schroefspoor der aarde door de tijdruimte. Het probleem moet gesteld worden als een van vierdimensionale meetkunde, d.w.z. het is een probleem van mechanica, en niet een van driedimensionale meetkunde. Indien men dit in acht neemt, is de uitkomst deze, dat de te verwachten precessie een bedrag heeft, anderhalf maal zoo groot als door SCHOUTEN werd aangegeven, n.l. 0.019 boogsecunde per jaar. Dit opstel moge zulks aantoonen.

---

[1]) LEVI CIVITA, Rendic. Cerc. Mat. Palermo, **42**, p. 1, 1917; SCHOUTEN, Direkte Analysis zur n. Relativitätstheorie, Verhandelingen Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, XII, no. 6, 1919; WEYL, Raum, Zeit, Materie, 3de uitg. Berlijn 1920. Zie ook een opstel van den schrijver in de Zitt. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam, **27**, p. 363, 1918.

[2]) SCHOUTEN, deze Verslagen, **27**, p. 214, 1918; met een aanhangsel door DE SITTER.

De volgende gedachte ligt aan de beschouwingen ten grondslag. Indien wij voor de beschrijving der bewegingen in de nabijheid der aarde gebruik maken van assen, dusdanig gekozen dat de tijdas steeds gericht is langs het tijdspoor der aarde en dat de oorsprong der ruimte met de aarde medevalt, waarbij de aanvangsrichtingen der ruimteassen door den tijd evenwijdig aan zichzelf verplaatst worden, dan mogen wij vertrouwen dat de bewegingsvergelijkingen een bijzonder eenvoudigen vorm zullen aannemen. Inderdaad: voor bewegingen die zich afspelen in de onmiddellijke omgeving van den oorsprong (d.w.z. binnen een gebied, welks tweedimensionale doorsneden, vermenigvuldigd met de RIEMANNiaansche maat voor de kromming verwaarloosbaar klein zijn) wordt de tijdruimte homoloidaal: losse deeltjes bewegen er in rechte banen, aan geen krachten onderhevig, en een om zijn symmetrieas draaiende tol zal die as ten opzichte van de beschrijvingsassen in een onveranderlijke richting houden. Indien de laatste evenwijdig aan zichzelf langs de tijdas slieren zal hetzelfde gelden voor de as van wenteling. [1])

In een volgende benadering vinden wij de losse deeltjes onderhevig aan de krachten der eb- en vloedwerkingen, en aan krachten, welke afhangen van de snelheid en welke een trek hebben die doet denken aan de krachten van CORIOLIS in een centrifugaalveld.

Om tot deze benadering door te dringen, is het noodig het coordinatensysteem nog iets precieser aan te geven. In elk punttijdstip van het tijdspoor zullen wij alle geodetische lijnen trekken die er loodrecht op staan; deze zullen de ruimten vormen. Drie van die geodetische lijnen kiezen wij als ruimteassen. Het is gemakkelijk als deze loodrecht op elkander gekozen worden.

Natuurlijk kan zulk een ruimte niet samenvallen met de ruimte waarmede een op de zon stilstaande waarnemer rekent. De twee ruimten doorsnijden elkander in een zeker oppervlak, dat in de buurt van het schroefspoor der aarde de richtingen bevat die loodrecht op de baan in de ecliptica staan. Dit brengt een zekere com-

---

[1]) Ook bij de beweging der maan om de aarde zal het baanvlak, voor zoover de aantrekking der aarde er bij betrokken is, ten opzichte der medevallende assen een onveranderlijken stand hebben. Het gevolg hiervan is, dat de knoopenlijn dezelfde seculaire draaïng vertoont als de vallende assen. Het is dan ook niet toevallig, dat DE SITTER, op geheel andere wijze te werk gaande, bij zijn berekeningen tot een beweging komt der knoopenlijn van 1″.91 per eeuw, precies het voor de precessie gevonden bedrag (Deze Versl. **25**, p. 244, 1916; ook Monthly Notices R.A.S. **77**, p. 172, 1916). Om echter deze voorspelling aan de waarneming te toetsen, zou men met grootere nauwkeurigheid de uit de klassieke NEWTONiaansche theorie volgende beweging der knoopen moeten kunnen berekenen dan thans het geval is (DE SITTER, l.c.)

plicatie mede als men de betrekkelijke standen der twee beschrijvings-ruimten wil nagaan. In het geval eener cirkelvormige planetenbeweging echter kan men wel een uitweg vinden.

Het blijkt dan, dat, indien men de standen der medevallende assen aan het begin en aan het eind van een jaar vergelijkt, er een precessie op te merken valt van het boven aangegeven bedrag. Zooals reeds door DE SITTER werd opgemerkt ligt, bij een toetsing aan de waarnemingen, de moeilijkheid niet zoozeer in de vereischte precisie der waarnemingen als in onze onbekendheid met de juiste waarden der hoofdtraagheidsmomenten der aarde, en de onzekerheid, die daaruit voortvloeit, hoeveel precessie voor rekening komt van de werkingen van zon en maan als gevolg van de afplatting der aarde.

Wij zullen nu overgaan tot de analytische behandeling van het probleem.

De geodetische medevallende coördinaten.

Wij denken ons een of ander gravitatieveld, met de potentialen g_{ab}, beschreven in den tijd x^0 en de ruimtecoördinaten $x^{(1)}$ $x^{(2)}$ $x^{(3)}$. Op de gebruikelijke wijze schrijven wij voor de symbolen van CHRISTOFFEL:

$$\left\{ \begin{matrix} ab \\ n \end{matrix} \right\} = \Sigma\, g^{mn} \begin{bmatrix} ab \\ m \end{bmatrix} = \Sigma\, g^{mn} \cdot \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{am}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{bm}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^m} \right].$$

Hierin beteekenen de g^{mn} de algebraische complementen der g_{mn}.

Een vector V^a wordt evenwijdig aan zichzelf verplaatst over een eind dx^m, indien daarbij zijn kentallen veranderen met

$$dV^a = -\Sigma \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} V_b\, dx^m.$$

Beschouw een punttijdstip $x^a{}_0$ $(a = 0, 1, 2, 3)$, en kies daar een eenheidsvector met tijdkarakter $A^a{}_0$:

$$\Sigma\, g_{ab}\, A^a{}_0\, A^b{}_0 = 1,$$

benevens drie andere eenheidsvectoren, alle onderling, en ook op den vorigen, loodrecht, zoodat

$$\Sigma\, g_{ab}\, A^a{}_\mu\, A^b{}_\mu = -1, \quad \text{en} \quad \Sigma\, g_{ab}\, A^a{}_i\, A^b{}_j = 0 \quad \text{indien} \quad i \neq j.$$

Daar in het betoog de tijdcoördinaat niet op denzelfden voet behandeld wordt als de ruimtecoördinaten, zullen wij met Grieksche letters die indices aanduiden welke nimmer de waarden 0 mogen aannemen.

Wij transformeeren nu naar coördinaten z^i door de volgende formules:

$$x^a - x^a_0 = \Sigma A^a_i z^i - \tfrac{1}{2} \Sigma \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} A^b_i A^m_j z^i z^j -$$

$$- \tfrac{1}{6} \Sigma \left[\frac{\partial}{\partial x^n} \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} ms \\ a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} bn \\ s \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} bs \\ a \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} mn \\ s \end{matrix} \right\} \right] A^b_i A^m_j A^n_k z^i z^j z^k -$$

$$- \tfrac{1}{3} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_\mu (A^m_\nu A^n_0 - A^n_\nu A^m_0) z^\mu z^\nu z^0 -$$

$$- \tfrac{1}{6} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_0 (A^m_\nu A^n_0 - A^n_\nu A^m_0) z^\nu z^0 z^0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Met $Q^a_{b\,mn}$ hebben wij kortheidshalve den vorm aangeduid die in den voorgaanden regel tusschen haken staat. Men lette op de symmetrie in de indices b en m die aan $Q^a_{b,mn}$ eigen is. Indien wij stellen

$$R^a_{b,mn} = Q^a_{b,mn} - Q^a_{b,nm} \, ,$$

dan is $R^a_{b,mn}$ niets anders dan een vier-indices-symbool van RIEMANN:

$$R^a_{b,mn} = \{ba, mn\},$$

en het is bekend dat de covariante kentallen aan de volgende identiteiten voldoen:

$$R_{ab,mn} = - R_{ba,mn} = - R_{ab,nm} = R_{mn,ab} \, ,$$

en

$$R_{ab,mn} + R_{bm,an} + R_{ma,bn} = 0.$$

Wij zullen thans aantoonen dat de aangegeven transformatie werkelijk leidt tot de coördinaten die in de inleiding bedoeld werden.

De as der z^0 valt samen met het spoor van een deeltje. Want, zijn alle $z^\mu = 0$, dan wordt

$$x^a - x^a_0 = A^a_0 z^0 - \tfrac{1}{2} \Sigma \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} A^b_0 A^m_0 z^0 z^0 - \tfrac{1}{6} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_0 A^m_0 A^n_0 z^0 z^0 z^0 \, ..$$

niets anders dan, tot in de tweede benadering, de vergelijking voor de geodetische lijn die in het punttijdstip x^a_0 begint met aanvankelijke richtingsparameters A^a_0 en waarbij z^0 het langs den boog gemeten interval is, zoodat onze tijdas werkelijk samenvalt met het door een vallend deeltje geteekende spoor. Wij duiden het tweede lid der vergelijking aan door ξ^a.

De ruimte-assen zijn, zoover onze benadering reikt, steeds weer *geodetische lijnen*. Want indien op een gegeven oogenblik z^0 alle coördinaten behalve z^μ nul worden, dan vinden wij na een herschikking der termen:

$$x^a - x^a_0 - \xi^a = A^a_\mu z^\mu -$$

$$- \Sigma' \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} A^b_\mu A^m_0 z^\mu z^0 - \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_\mu A^m_0 A^n_0 z^0 z^0 z^\mu -$$

$$- \tfrac{1}{2} \Sigma \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} A^b_\mu A^m_\mu z^\mu z^\mu - \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_\mu A^m_\mu A^n_0 z^0 z^\mu z^\mu -$$

$$- \tfrac{1}{6} \Sigma Q^a_{b,mn} A^b_\mu A^m_\mu A^n_\mu z^\mu z^\mu z^\mu \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Dit is de vergelijking voor een geodetische lijn, welke van het punttijdstip $x^a + \xi^a$ uitgaat met richtingsparameters

$$A^a{}_\mu - \Sigma \begin{Bmatrix} bm \\ a \end{Bmatrix} A^b{}_\mu A^m{}_0 z_0 - \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_\mu A^m{}_0 A^n{}_0 z^0 z^0,$$

waarbij z^μ de lengte van den boog voorstelt. Wij merken op dat deze parameters de kentallen zijn van den *eenheidsvector* $A^a{}_\mu$, indien deze *geodetisch uit den oorsprong langs de tijdas verplaatst* wordt, met de nauwkeurigheid der tweede benadering. Daar een geodetische verplaatsing de hoeken tusschen gemeenschappelijk verplaatste vectoren onveranderd laat, zullen de beginrichtingen van onze tijd- en ruimte-assen dus *onderling loodrecht* blijven.

Op dezelfde wijze lukt het aan te toonen dat elke radius der ruimte, dat is een lijn $z^0 = t$, $z^{(1)} = \lambda_1 s$, $z^{(2)} = \lambda_2 s$, $z^{(3)} = \lambda_3 s$, met $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, een geodetische lijn is, waarvan s de lengte meet vanuit den oorsprong der ruimte.

De potentialen g'_{ij} in de geodetische medevallende coördinaten.

Wij rekenen de nieuwe waarden der g'_{ij} uit met behulp der transformatie formule

$$g'_{ij} = \Sigma\, p_{ai}\, p_{bj}\, g_{ab}\,,$$

waarin

$$p_{ai} = \partial x^a / \partial z^i.$$

Bij de berekening dezer p_{ai} komt ons de symmetrie van $Q^a{}_{b,mn}$ in b en m bijzonder goed te pas om de termen overzichtelijk te rangschikken. Wij krijgen

$$p_{a0} = A^a{}_0 - \Sigma \begin{Bmatrix} bm \\ a \end{Bmatrix} A^b{}_0 A^m{}_i z^i - \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_0 A^m{}_i A^n{}_j z^i z^j -$$
$$- \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_i (A^m{}_j A^n{}_0 - A^n{}_j A^m{}_0) z^i z^j,$$

terwijl voor $\mu \neq 0$ de uitkomst wordt:

$$p_{a\mu} = A^a{}_\mu - \Sigma \begin{Bmatrix} bm \\ a \end{Bmatrix} A^b{}_\mu A^m{}_i z^i - \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_\mu A^m{}_i A^n{}_j z^i z^j -$$
$$- \tfrac{1}{2} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_\mu (A^m{}_\tau A^n{}_0 - A^n{}_\tau A^m{}_0) z^\tau z_0 -$$
$$- \tfrac{1}{6} \Sigma Q^a{}_{b,mn} A^b{}_\sigma (A^m{}_\tau A^n{}_\mu - A^n{}_\tau A^m{}_\mu) z^\sigma z^\tau.$$

In de tweede regels dezer formules zullen wij wegens de scheve symmetrie der haken in m en n de $Q^a{}_{b,mn}$ mogen vervangen door $\tfrac{1}{2} R^a{}_{b,mn}$. In de eerste regels staan precies de kentallen der eenheidsvectoren $A^a{}_j$ zooals zij na een geodetische verplaatsing uit den oorsprong naar het punttijdstip z^i zouden zijn. Dit maakt, dat, voorzoover deze eerste regels betreft, de transformatieformule

$\Sigma p_{ai}\, p_{bj}\, g_{ab}$ oplevert 1, —1, —1, —1 of 0 al naar $i=j=0$, $i=j=\mu$ of $i \neq j$. Wij krijgen

$$g'_{00} = 1 + 0 - \tfrac{1}{2} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_0 A^b{}_i (A^m{}_j A^n{}_0 - A^n{}_j A^m{}_0) z^i z^j.$$

Blijkbaar zal in den laatsten term $j=0$ niets tot de som bijdragen en hetzelfde geldt voor $i=0$ wegens de scheve symmetrie der $R_{ab,mn}$ in a en b. De scheve symmetrie in m en n doet ons schrijven:

$$g'_{00} = 1 + \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_0 A^b{}_\sigma A^m{}_0 A^n{}_\tau z^\sigma z^\tau.$$

Overgaande tot $g'_{0\mu}$, krijgen wij

$$g'_{0\mu} = 0 + 0 - \tfrac{1}{4} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_\mu A^b{}_i (A^m{}_j A^n{}_0 - A^n{}_j A^m{}_0) z^i z^j -$$
$$- \tfrac{1}{4} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_0 A^b{}_\mu (A^m{}_\tau A^n{}_0 - A^n{}_\tau A^m{}_0) z^\tau z^0 -$$
$$- \tfrac{1}{12} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_0 A^b{}_\sigma (A^m{}_\tau A^n{}_\mu - A^n{}_\tau A^m{}_\mu) z^\sigma z^\tau.$$

Nemen wij in de eerste som $i=0$, dan valt dit stuk weg tegen de tweede som. Het overblijvende nemen wij samen met de derde som, en dat geeft

$$g'_{0\mu} = \tfrac{2}{3} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_\mu A^b{}_\sigma A^m{}_0 A^n{}_\tau z^\sigma z^\tau.$$

Ten slotte wordt $g'_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu} + 0 - \tfrac{1}{12} \Sigma R_{ab,mn} [A^a{}_\nu A^b{}_\sigma (A^m{}_\tau A^n{}_\mu - A^n{}_\tau A^m{}_\mu) +$$
$$+ A^a{}_\mu A^b{}_\sigma (A^m{}_\tau A^n{}_\nu - A^n{}_\tau A^m{}_\nu)] z^\sigma z^\tau -$$
$$- \tfrac{1}{4} \Sigma R_{ab,mn} (A^a{}_\nu A^b{}_\mu + A^a{}_\mu A^b{}_\nu)(A^m{}_\tau A^n{}_0 - A^n{}_\tau A^m{}_0) z^\tau z^0,$$

waarbij $\varepsilon_{\mu\nu} = 1$ voor $\mu = \nu$ en $\varepsilon_{\mu\nu} = -1$ voor $\mu \neq \nu$. Tengevolge der symmetrieën van $R_{ab,mn}$ laat dit zich herleiden tot

$$g'_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu} + \tfrac{1}{3} \Sigma R_{ab,mn} A^a{}_\mu A^b{}_\sigma A^m{}_\nu A^n{}_\tau z^\sigma z^\tau.$$

Indien wij nu aan de transformatieformule voor $R_{ab,mn}$ denken:

$$R'_{ij,rs} = \Sigma p_{ai}\, p_{bj}\, p_{mr}\, p_{ns}\, R_{ab,mn},$$

dan blijkt dat wij zonder iets van den graad van benadering te verliezen mogen schrijven:

$$g'_{00} = 1 + \Sigma R'_{0\sigma,0\tau} z^\sigma z^\tau,$$
$$g'_{\mu 0} = \tfrac{2}{3} \Sigma R'_{\mu\sigma,0\tau} z^\sigma z^\tau,$$
$$g'_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu} + \tfrac{1}{3} \Sigma R'_{\mu\sigma,\nu\tau} z^\sigma z^\tau.$$

Wij merken op, dat deze gravitatiepotentialen *niet meer van den tijd z^0 afhangen*, zoover als onze benadering gaat. Het veld is in onze geodetische medevallende coördinaten stationnair.

De $R'_{ij,rs}$ zijn ten nauwste verbonden met de mate van kromming volgens RIEMANN. Indien wij slechts deeltjes beschouwen die zoo *dicht in de buurt van den oorsprong* blijven dat de kwadraten van de afstanden, met de mate van kromming vermenigvuldigd, verwaarloosbaar klein zijn, dan mogen wij *de g'_{ij} als constanten* beschouwen, en dan hebben zij de *homoloïdale waarden* 1, —1, —1, —1.

Bewegingsvergelijkingen voor losse deeltjes in geodetische medevallende coordinaten.

Wij stellen de vereenvoudigende onderstelling voorop, dat wij slechts deeltjes zullen beschouwen met zulk een langzame beweging, dat de kwadraten der snelheden kunnen worden verwaarloosd tegenover het kwadraat der lichtsnelheid, die nabij den oorsprong in onze coördinaten de eenheid is. De bewegingsvergelijkingen zijn

$$\frac{d^2 z^\alpha}{ds^2} = -\Sigma \begin{Bmatrix} i\,j \\ \alpha \end{Bmatrix} \frac{dz^i}{ds}\frac{dz^j}{ds}.$$

Krachtens onze onderstelling mogen wij $dz^0/ds = 1$ stellen, en behoeven wij slechts die combinaties te beschouwen waarin i of j of beide 0 zijn. In de accoladen van CHRISTOFFEL kennen wij de afgeleiden der g'_{ij} slechts tot in de eerste machten der z^τ. Voor de omgekeerden g'^{ij} kunnen wij dus volstaan de waarden te nemen, 1, —1, —1, —1, en bijgevolg is

$$\begin{Bmatrix} i\,j \\ \alpha \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} i\,j \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Uitrekenende krijgen wij

$$\begin{bmatrix} 0\,0 \\ \alpha \end{bmatrix} = -\Sigma R'_{0\alpha,0\tau}\, z^\tau,$$

en

$$\begin{bmatrix} 0\,\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\Sigma\, (R'_{\alpha\beta,0\tau} + R'_{\alpha\tau,0\beta} - R'_{\beta\alpha,0\tau} - R'_{\beta\tau,0\alpha})\, z^\tau,$$

$$= -\Sigma R'_{\beta\alpha,0\tau}\, z^\tau - \tfrac{1}{3}\Sigma\, (R'_{\beta\alpha,\tau 0} + R'_{\alpha\tau,\beta 0} + R'_{\tau\beta,\alpha 0})\, z^\tau.$$

De haak verdwijnt wegens de trivectorsymmetrie van $R'_{\beta\alpha,\tau 0}$, zoodat

$$\begin{bmatrix} 0\,\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = -\Sigma R'_{\beta\alpha,0\tau}\, z^\tau.$$

De bewegingsvergelijkingen worden tenslotte

$$\frac{d^2 z^\alpha}{dz_0^{\,2}} = -\Sigma R'_{0\alpha,0\tau}\, z^\tau - \Sigma R'_{\beta\alpha,0\tau}\, z^\tau \frac{dz^\beta}{dz_0}.$$

Stellen wij hierin nog

$$\Sigma R'_{23,0\tau}\, z^\tau = 2\omega_1,$$
$$\Sigma R'_{31,0\tau}\, z^\tau = 2\omega_2,$$
$$\Sigma R'_{12,0\tau}\, z^\tau = 2\omega_3,$$

dan kunnen wij het laatste stuk in den vorm schrijven

$$-2\,[\omega\,.\,\mathrm{v}].$$

Het eerste stuk van het rechter lid geeft ons eb- en vloedkrach-

ten. Het tweede stuk heeft den vorm van een kracht van CORIOLIS zooals die optreedt in een roteerend systeem. Het eigenaardige daarbij is echter dat de rotatievector ω die er in voorkomt een lineaire functie is van de coordinaten en aan weerszijden van den oorsprong tegengesteld teeken heeft. Misschien zal deze „kracht" merkbaar kunnen worden bij de beweging van een satelliet.

In een eerste benadering hebben wij niet te maken met het rechterlid. De bewegingsvergelijkingen van vrije deeltjes zijn in onze medevallende coordinaten juist zooals zij in de klassieke dynamica zijn als er geen krachten op werken. Indien de deeltjes wederkeerige krachten op elkander uitoefenen, dan zal hiervan de uitwerking precies dezelfde zijn als men in de gewone mechanica berekent. In het bijzonder zal een tol die om de symmetrie-as draait, de as van wenteling in onveranderden stand ten opzichte der beschrijvingsassen handhaven, en derhalve deelen in elke precessie die deze eventueel ten opzichte van stilstaande assen mochten vertoonen.

Hetzelfde geldt voor het baanvlak van een deeltje, dat aan een centrale kracht onderworpen is.

Letten wij op de eb- en vloedkrachten, dan zal hun invloed op een precessie verdwijnen indien de aarde een bolvorm heeft. Is dit niet het geval, dan komt er een precessie, die nu berekend kan worden ten opzichte van de medevallende assen, en waarop dus de precessie van deze assen nog gesuperponeerd wordt, wanneer wij op stilstaande assen overgaan.

Ten slotte is er nog een kracht loodrecht op de snelheid: het vectorproduct van de snelheid met een driedimensionalen rotatievector, die door middel van een aantal componenten van den krommings-bivector-tensor van RIEMANN een lineaire vectorfunctie is van den radiusvector.

Wij zullen deze krachten thans laten rusten en overgaan tot de berekening der precessie van de medevallende assen.

De precessie der medevallende assen in het geval eener cirkelvormige planetenbeweging.

Wij zeiden reeds dat het vinden dezer precessie gecompliceerd wordt door de omstandigheid dat de ruimte der vallende coordinaten een zekeren hoek insluit met de ruimte van een op de zon stilstaanden waarnemer. De twee ruimten doorsnijden elkaar in een vlak loodrecht op de bewegingsrichting der planeet in de ecliptica.

Beperken wij ons tot cirkelvormige banen dan wordt de zaak eenvoudiger.

In elk punttijdstip van het schroefspoor der planeet door de tijdruimte teekenen wij *vier locale assen*: een zal er samenvallen met de richting van het spoor; een tweede moet wijzen in radiale richting van de zon af; een derde wordt loodrecht op de ecliptica getrokken en de laatste zal een component hebben rakende aan de cirkelbaan en ook een tijdcomponent. Alle vier de assen zullen loodrecht op elkaar zijn en als eenheidsvectoren gedacht worden. Indien nu de planeet met de geodetische medevallende assen voorbij zoo'n plaatselijk assenkruis komt, zullen beide tijdassen samenvallen. Bijgevolg zullen de ruimteassen alle in dezelfde ruimte liggen, en wij kunnen hun onderlingen stand goed vergelijken. Op die manier is het mogelijk, voor en na een omloop de standen der medevallende assen te vergelijken met assenkruisen, die voor een op de zon stilstaanden waarnemer dezelfde orienteering hebben.

Het veld rond de zon is gegeven door den vorm voor het oneindig kleine interval:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \alpha/r} - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + (1 - \alpha/r)\, dt^2.$$

In dit veld is een cirkelbeweging mogelijk in het vlak $\theta = \frac{1}{2}\pi$, met „straal" R en een hoeksnelheid

$$d\varphi/dt = \omega = \sqrt{\alpha/2R^3}.$$

Overal langs het spoor zetten wij assenkruisen neer van de vier eenheidsvectoren $A^a{}_0$, $A^a{}_1$, $A^a{}_2$, $A^a{}_3$, als volgt:

	(0)	(1)	(2)	(3)
$A^a{}_0$:	$\sqrt{\frac{2R}{2R-3\alpha}}$,	0,	0,	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{2R-3\alpha}}$,
$A^a{}_1$:	0,	$\sqrt{1-\alpha/R}$,	0,	0,
$A^a{}_2$:	0,	0,	$1/R$,	0,
$A^a{}_3$:	$\sqrt{\frac{\alpha R}{(R-\alpha)(2R-3\alpha)}}$,	0,	0,	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{2(R-\alpha)}{2R-3\alpha}}$.

Deze zijn alle onderling loodrecht.

Van alle aldus geteekende assenkruisen kunnen wij er een uitkiezen als den oorsprong van onze geodetische medevallende coördinaten. Om te weten hoe deze gericht zullen zijn na een interval ds (kentallen $A^a{}_0\, ds$), hebben wij de waarden noodig van CHRISTOFFEL's symbolen. Deze zijn, in de coördinaten t, r, θ, φ:

$$\left\{ \begin{matrix} 01 \\ 0 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2R(R-a)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 00 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{a(R-a)}{2R^3}, \quad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{-a}{2R(R-a)}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -(R-a), \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} = -(R-a)\sin^2\theta,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{R}, \quad \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{R},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$ De overige zijn nul.

Indien wij nu de geodetische aangroeiingen der kentallen langs ds uitrekenen:

$$dA^a{}_i = -\Sigma \left\{ \begin{matrix} bm \\ a \end{matrix} \right\} A^b{}_i A^m{}_0 ds,$$

dan vinden wij

$$dA^a{}_0 = 0,$$
$$dA^a{}_2 = 0,$$

maar

$$dA^a{}_1 = -\sqrt{a/2R^3} \,.\, A^a{}_3\, ds, \text{ of } = -\omega A^a{}_3\, ds,$$

en

$$dA^a{}_3 = +\sqrt{a/2R^3} \,.\, A^a{}_1\, ds, \text{ of } = +\omega A^a{}_1\, ds.$$

Hieruit zien wij, dat de vallende $Z^{(1)}$- en $Z^{(3)}$-assen na verloop van het interval vergeleken bij het plaatselijke assenkruis teruggeloopen zijn over een hoek ωds in hun eigen vlak. Bij de cirkelvormige planetenbeweging zal dit ook eenparig zoo doorgaan. Ondertusschen is de anomalie van de planeet toegenomen met ωdt. De twee hoeksnelheden komen dus eender uit als de eene in ds en de ander in dt wordt gemeten. De verhouding is

$$ds = \sqrt{(1-3a/2R)} \,.\, dt,$$

en dus zullen de medevallende assen, wanneer de planeet een omloop volbracht heeft, nog niet geheel rondgekomen zijn, vergeleken bij de plaatselijke assenkruisen. Wanneer zij rond zijn, is de planeet op een voerstraal gekomen die met den voerstraal van uitgang een hoek insluit van

$$2\pi \sqrt{\frac{2R}{2R-3a}}.$$

Ten opzichte van dezen voerstraal is de stand der assen weer juist als hij was ten opzichte van den anderen in den beginne. Verwaarloozen wij nu hoogere machten van a/R dan mogen wij dus

tot een precessie besluiten, die, per jaar, het overschot bedraagt van den genoemden hoek boven 2π. Dit is

$$2\pi\left[\sqrt{\frac{2R}{2R-3a}}-1\right]=2\pi\,.\,\tfrac{3}{4}\,\frac{a}{R}$$

per jaar, en, gelijk reeds vermeld, dit is anderhalf maal het door SCHOUTEN verwachte bedrag. Voor de aarde beloopt het 0.019 boogsecunde per jaar.

Sterrekunde. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer A. PANNEKOEK: „*Verdere beschouwingen over de donkere nevels in Taurus*".

(Mede aangeboden door den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

§ 1. In een vorige mededeeling hebben wij, in de onderstelling, dat de sterleegten in Taurus door absorbeerende nevels veroorzaakt worden, den afstand van die nevels bepaald op omstreeks 140 parsecs. De lichtopslorping van een gebied met matige absorbtie, waarover ook gegevens voor de 12de grootte voorhanden waren, bleek 1 à 2 grootteklassen te zijn; voor de donkerste gebieden *A* en *B* moet zij dan gemiddeld zeker wel 2 grootteklassen zijn, waarmee het logarithmisch tekort voor 15,^{m}9 niet in strijd is; de zwartste kernen daarin hebben een nog veel sterker absorbtie. De aanwezigheid van zoo groote gebieden (de afmetingen van *A* zijn 9° bij 3°, dus 20 bij 7 parsecs; *B* is zeer onregelmatig, maar ongeveer even groot in oppervlak) met bekende absorbtie veroorlooft eenige gevolgtrekkingen omtrent dichtheid en massa van deze gaswolken.

Wij nemen dus aan, dat zich daar in de ruimte een gaswolk bevindt, waarvan de moleculen door verstrooiing het licht absorbeeren. Lord RAYLEIGH heeft in zijn onderzoekingen omtrent de blauwe kleur van den hemel een formule afgeleid voor de absorbtie van het licht door een troebel medium, waarin de gesuspendeerde deeltjes het licht naar alle zijden verstrooien [1]). SCHUSTER wees er in 1909 op, dat de extinctie van het licht in onzen dampkring zoo goed als geheel op rekening van zulk een verstrooiing te stellen is, waarbij de luchtmoleculen zelve de rol van verstrooiende deeltjes spelen; de selectieve absorbtie speelt daarbij slechts een ondergeschikte rol [2]). Daar de absorbtie in grootteklassen evenredig is met dichtheid × dikte, dus met het aantal moleculen, dat de lichtstraal ontmoet, kan men door vergelijking met de gegevens van de atmosferische extinctie dichtheid en massa van een kosmische gasmassa berekenen. ABBOTT geeft voor Mount Wilson in het zenith een transmissiecoëfficient 0,95, dus een absorbtie van 0,056 grkl. op, die voor een luchtkolom van 6 KM. hoogte en een dichtheid 0,0013 geldt.

[1]) Philosophical Magazine 1899, pag. 379.
[2]) Nature 1909, pag. 97.

Neemt men voor de dikte van de gaswolk in Taurus (naar de lineaire afmetingen 20 × 7) 10 parsecs aan (1 parsec = 3 × 10^{13} KM.), dan vindt men bij een absorbtie van 2 grootteklassen voor de dichtheid van de gaswolk 10^{-15}. De massa is onafhankelijk van de aangenomen dikte; per c.M^2 doorsnee is zij $^2/_{0,056}$ × gewicht luchtkolom op Mount Wilson = 25 KG.; dus voor een oppervlak van 150 vierkante parsecs wordt $M = 3{,}5 \times 10^{40}$ KG. Daar de zonsmassa 2×10^{30} KG. is, is de massa van de gaswolk nagenoeg 2×10^{10} zonsmassa's.

Men kan dit ook direct met behulp van de formule van RAYLEIGH voor den absorbtiecoefficient k vinden:

$$k = \frac{32\,\pi^3\,(\mu - 1)^2}{3\lambda^4\,N}$$

waarin μ de brekingsindex, λ de golflengte, N het aantal deeltjes (moleculen) per cc. is. Neemt men aan, dat de gaswolk uit waterstof bestaat (wat de kleinste massa geeft), dus bij gewone drukking en dichtheid $\mu = 1{,}000143$, $N = 2{,}7 \times 10^{19}$, en neemt men $\lambda = 5{,}5 \times 10^{-5}$ cM., dan vindt men $k = 2{,}7 \times 10^{-8}$, dus per KM. dikte $2{,}7 \times 10^{-3}$, wat gelijk staat met $2{,}9 \times 10^{-3}$ grootteklassen, terwijl een kolom van 1 cM^2 doorsnede per KM. lengte een massa $8{,}3 \times 10^{-3}$ KG. heeft. De massa van een kolom van 1 cM^2 doorsnee in een absorbeerende gaslaag is dus $2{,}9\,\varepsilon$ KG., als ε de absorbtie in grootteklassen (voor $\lambda = 550$) is. Hieruit vindt men voor een gasmassa met een oppervlak van 150 vierkante parsecs en 2 grootteklassen absorbtie

$$M = 8 \times 10^{39} \text{ KG.} = 4 \times 10^{9} \text{ zonsmassa's.}$$

Het verschil met de vorige uitkomst ontstaat door het verschil tusschen waterstof en lucht.

Volgens KAPTEYN en VAN RHYN [1]) is de dichtheid der sterren in de omgeving van de zon $^1/_{22}$ per kubieke parsec, dus bevinden zich 4×10^9 sterren in een bol met een straal van 2600 parsec. Neemt men hun gemiddelde massa gelijk aan die van de zon dan bevindt zich in deze eene, 140 parsec verwijderde gaswolk (misschien een derde deel van alle absorbeerende gaswolken in die streek) evenveel massa als in alle sterren binnen een bol, die zich 20 maal verder uitstrekt. Tenzij dus deze Tauruswolk uniek is in grootte en dichtheid, lijkt de conclusie gerechtvaardigd, dat in de vaste sterren slechts een klein deel der wereldmaterie is gecondenseerd.

§ 2. De aanname, dat zich op een afstand 140 parsecs een gas-

[1]) J. C. KAPTEIJN and P. J. VAN RHIJN, On the distribution of the stars in space. Astrophysical Journal 52, 32.

wolk van zoo groote massa bevindt, leidt tot eenige merkwaardige consequenties. De aantrekking van deze massa op ons zonnestelsel is niet onmerkbaar; zij bedraagt 5×10^{-6} maal de kracht, die de zon op de aarde uitoefent. Het verdient opmerking, dat deze kracht geheel onafhankelijk is van den aangenomen afstand van de gaswolk. Zij wordt enkel bepaald door het bedrag van zijn absorbtie en zijn schijnbare oppervlak aan den hemel. Is dit oppervlak S vierkante graden en de absorbtie ε grootteklassen, dan vindt men uit de formule van RAYLEIGH op dezelfde wijze als boven:

$$\text{Kracht} = 10^{-7}\, \varepsilon\, S \times \text{de aantrekking zon—aarde.}$$

Is de absorbtie ε' voor fotografische stralen ($\lambda = 440$), dan is $\varepsilon = {}^{1}/_{2}\, \varepsilon'$ te nemen. Liggen dus in allerlei richtingen en op allerlei willekeurige afstanden zulke absorbeerende gaswolken in de ruimte om ons heen, zoo laat zich de totale kracht op ons zonnestelsel uit hun oppervlak en absorbtie berekenen.

Beschouwen wij voorloopig alleen de kracht, die van de Taurus-gaswolk afkomstig is. De storende krachten zijn ook bij de verst-verwijderde planeten onmerkbaar. Maar de kracht op het zonne-stelsel in zijn geheel is zoo groot, dat het (bij een snelheid van 19 K.M., ongeveer loodrecht op de kracht ondersteld) in een gebogen baan met een kromtestraal van 4×10^{5} astronomische eenheden = 2 parsecs moet bewegen en de richting van het apex in 3000 jaren 1° moet veranderen naar Taurus toe. Bij een afstand van 140 parsecs beteekent deze geringe kromtestraal, dat ons zonnestelsel zich in een langgestrekte ellips met excentriciteit ${}^{69}/_{70}$, om de gaswolk moet bewegen in een periode van 2 à 3 millioen jaren, dat het zich nu vrijwel in het apocentrum bevindt en in het pericentrum praktisch door de gaswolk heen moet gaan. Iets dergelijks geldt voor de Hyaden, die op een afstand van ongeveer 100 parsecs van de gaswolk met een snelheid van 45 K.M. voortloopen; om in een hyperbolische baan langs den nevel te loopen zou hun snelheid grooter dan 270 K.M. moeten zijn; met hun kleine snelheid echter moeten zij weldra naar de gaswolk toe vliegen. Zulk een reusachtige massa, als hier voor de gaswolk berekend werd, zou haar tot een centraal lichaam maken, dat alle bewegingen in dit deel van de wereldruimte, tot op vele honderden parsecs, beheerscht. De snelheden der sterren zouden in de omgeving van de gaswolk reusachtig groot zijn; wij zouden dus vooral in de richting van Taurus groote eigenbewegingen moeten waarnemen, die de gewone gemiddelde waarden verre overtreffen.

Nu moeten, ook zonder zulk een groote aantrekkende massa aan te nemen, de eigenbewegingen in de richting der absorbtiegebieden grooter dan de normale zijn, omdat van een bepaalde grootteklasse

(door het uitvallen van sterren achter de absorbeerende laag) de gemiddelde afstand daar kleiner is dan elders. Aansluitend aan de formules van de vorige mededeeling vindt men voor de gemiddelde parallaxe van de sterren van de grootte m vóór het absorbeerende scherm

$$\overline{\pi'}_m = \frac{1}{A'_m} \int\limits_{-\infty}^{\rho_1} 10^{0,4\rho - \frac{1}{\alpha^2}(m - M_0 - \rho)^2 - \frac{1}{\beta^2}(\rho - \rho_0)^2} d\rho .$$

Dezelfde integraal tusschen $\pm \infty$ stelt de normale $\overline{\pi}_m A_m$ voor. Stelt men dus

$$x_2 = 0,22\, \rho_1 - 1,078 - 0,132\,(m - 9) = x_1 + 0,452$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{\pi \log e}} \int\limits_{-\infty}^{x_2} 10^{-t^2}\, dt = \gamma_2$$

dan wordt

$$\frac{\overline{\pi'}}{\overline{\pi}} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

In dezelfde verhouding als de gemiddelde parallaxen worden ook de gemiddelde eigenbewegingen vergroot. Voor $\rho_1 = 6,05$, $r = 160$ parsecs (deze waarde werd genomen, omdat daarbij de getallen van de vroeger berekende tabellen konden gebruikt worden), vindt men voor

m =	6	7	8	9
γ_2/γ_1 =	1,4	1,6	1,8	2,1.

Nu hebben DYSON en MELOTTE in hun stuk reeds de eigen bewegingen van de sterren in de absorbtiegebieden in Taurus verzameld en vastgesteld, dat ze niet grooter zijn dan elders. Inderdaad vindt men voor hun gemiddelde $0'',044$, terwijl sterren van die grootte (1 van de 6de, 1 van de 7de, 5 van de 8ste, 9 van de 9de grootte) bij die galactische breedte een normaal gemiddelde van $0'',041$ geven. Bij het kleine aantal sterren is de negatieve bewijskracht van deze uitkomst wel niet groot genoeg om de aanwezigheid van een absorbeerenden nevel op zich zelf te weerleggen. Maar van een grootere gemiddelde snelheid door de werking van een reusachtige aantrekkende massa is in elk geval niets te bespeuren.

§ 3. De moeilijkheden en niet door de waarneming bevestigde consequenties van de onderstelling, dat de sterleegten in Taurus door absorbeerende gasmassa's veroorzaakt worden, werpt de vraag op of niet een andere verklaring mogelijk is. BARNARD heeft er steeds

den nadruk op gelegd, dat niet alle donkere vlekken en gebieden in den Melkweg door absorbtie, maar zeker een groot aantal door werkelijke ledige ruimtedeelen moeten verklaard worden. In vele gevallen geeft het aspect daaromtrent aanwijzing: de grillig gewonden en vertakte vormen van de donkere gebieden in hun verschillende gradaties van zwartheid, die op de kaart van DYSON en MELOTTE en nog sterker op de door BARNARD gepubliceerde foto's [1]) te voorschijn treden, wijzen voor deze Taurus-gebieden zeer sterk op absorbeerende nevels. Dit wordt bevestigd, als men den invloed van reëele ruimtelijke sterleegten op de aantallen sterren van verschillende grootte berekent.

Wij nemen aan, dat in de gezichtslijn de ruimte van r_0 tot $r_1 = 1,585 r_0$ geheel leeg is (dus over een gebied van ρ_0 tot $\rho_0 + 1$.) In de integraal, die het aantal sterren A_m van de m^{de} grootte voorstelt, ontbreekt dan het gedeelte tusschen de grenzen ρ_0 en $\rho_0 + 1$, of

$$A'_m = A_m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}\, log\, e} \int_{x_0}^{x_0+0,22} 10^{-x^2} dx\right)$$

waarin x dezelfde beteekenis heeft als in de vorige mededeeling. Berekent men deze waarden voor een bepaalde waarde van ρ_0, b.v. $\rho_0 = 6,95$, waarbij het uitvallen van sterren een maximum voor $m = 9$ is, en daaruit de totale aantallen $N'_{m+1/2}$ en het logarithmisch tekort $log\ ^{N'}/_{N}$, dan vindt men

m.	log N'/N	m.	log N'/N
3		10	
	−0,028		−0,080
4		11	
	− 040		− 069
5		12	
	− 055		− 056
6		13	
	− 069		− 043
7		14	
	− 080		− 031
8		15	
	− 086		− 021
9		16	
	− 086		− 014
10		17	

Bij een leegte, die zich over een eenheid in ρ uitstrekt, ontbreekt dus aan het totale steraantal N hoogstens 18°/₀; om zulk een sterk tekort te vinden, als in de Taurusgebieden waargenomen is, moet

[1]) E. E. BARNARD. On a nebulous groundwork in the constellation Taurus. Astrophysical Journal 25, 3.

de leegte zich over vele eenheden in ϱ uitstrekken. Wanneer zulke holten zich in de gezichtslijn niet verder uitstrekken dan loodrecht daarop, dan beteekent één eenheid in ϱ een zijdelingsche afmeting van 26°, twee eenheden in ϱ (dus een leegte van r_0 tot 2,51 r_0) een zijdelingsche uitbreiding over 50°. Wil men dus een duidelijk merkbaar tekort aan sterren (b.v. meer dan 20°/₀, $\log {}^{N}/_{N} > 0{,}10$) over een klein gebied (beneden 10°) verklaren door reëele ruimtelijke leegten in het sterrenheelal, dan komt men tot de moeilijk aan te nemen voorstelling van langgestrekte buisvormige holten, die alle juist in de richting van de gezichtslijn liggen. Alleen daar, waar de sterren zich niet gelijkmatig langs de gezichtslijn in de ruimte uitstrekken, maar tot bepaalde wolken en andere objecten samenballen, kunnen ruimtelijke leegten tusschen hen een belangrijke rol in het aspect van den Melkweg spelen.

Houdt men dus vast aan de verklaring door absorptie, maar zonder een zoo groote massa, dan zouden de deeltjes, die de verstrooiing veroorzaken, nog kleinere massa moeten hebben, dan waterstofmoleculen, dus grootendeels vrije electronen moeten zijn. De vraag, of er werkelijk absorbtie plaats vindt, zou uit te maken zijn door een onderzoek van de kleur der sterren in de ijle gebieden. De absorbtie door verstrooiing is omgekeerd evenredig met λ^4, dus moeten de sterren achter de gaswolk sterk rood gekleurd worden. Voor een aantal „nevelsterren", sterren die door zichtbare nevelhalos omgeven zijn, in Monoceros, Scorpio en Ophiuchus, hebben SEARES en HUBBLE onlangs gevonden [1]), dat hun kleur aanmerkelijk rooder is, dan met hun spectraaltype overeenstemt, dus dat hun licht door den nevel, waar zij doorheen schijnen, verstrooid en verzwakt wordt. Berekent men nu, welk deel van de sterren van elke grootteklasse achter de gaswolk ligt, wanneer men voor haar afstand weer 160 parsecs ($\varrho = 6{,}05$) aanneemt, dan vindt men voor

$m =$	5	6	7	8	9	10	11	12
	0,4°/₀	1°/₀	2°/₀	4°/₀	9°/₀	17°/₀	31°/₀	50°/₀

Dus eerst bij sterren, zwakker dan de 12de grootte, zal de meerderheid deze roodkleuring door absorbtie moeten vertoonen. Daar voor zulke zwakke sterren vergelijking met het spectraaltype moeilijk is, zal de roodkleuring niet direct met zekerheid vastgesteld kunnen worden; wellicht zal echter een statistische bepaling van de kleur of de effectieve golflengte van de zwakkere klassen een beslissing kunnen geven.

[1]) F. H. SEARES and E. P. HUBBLE. The color of the nebulous stars. Astrophysical Journal, 52, 8 (Juli 1920).

Analyse mathématique. — De Heer ARNAUD DENJOY biedt eene mededeeling aan : „*Sur une propriété de séries trigonométriques.*"

(Medegedeeld in de vergadering van 26 Juni 1920).

Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans sa dernière séance, j'ai démontré une propriété dont je vais rappeler l'énoncé, et qui appartient à une certaine classe de fonctions $F(\theta)$ *admettant une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$.

Posons

$$Q(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) - F(\theta)}{u}$$

$$R(\theta, u) = \frac{F(\theta + u) + F(\theta - u) - 2F(\theta)}{u^2}.$$

On a $Q(\theta,u) = Q(\theta + u, -u)$ et $uR(\theta,u) = Q(\theta,u) - Q(\theta,-u)$. Par hypothèse $R(\theta,u)$ tend vers $f(\theta)$ quand u tend vers 0, θ restant invariable (condition A).

Nous désignons par $\psi(\theta)$ le maximum de $|R(\theta,u)|$ pour toutes les valeurs de u,θ gardant une valeur indépendante de u. η étant un nombre positif quelconque, $\psi(\theta,\eta)$ désignera le maximum de $|R(\theta,u)|$ pour $|u| < \eta$.

Les fonctions $F(\theta)$ auxquelles s'applique le théorème démontré dans ma précédente note, satisfont non seulement à la condition de posséder une dérivée seconde généralisée, mais encore à la suivante:

La différence $Q(\theta, \lambda u) - Q(\theta, u)$ *tend vers* 0 *avec* u, *uniformément dans tout champ*: θ *quelconque*, $|\lambda| + \left|\frac{1}{\lambda}\right| < r$, r *étant indépendant de* θ, *de* u *et de* λ (condition B).

Ces propriétés de $F(\theta)$ sont en particulier vérifiées si $f(\theta)$ est la somme d'une série trigonométrique partout convergente. Si l'on pose

$$f(\theta) = a_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

avec $A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$ (a_0, a_n, b_n indépendants de θ), on a

$$F(\theta) = \frac{a_0}{2}\theta^2 + C\theta + C' - A_1 - \ldots - \frac{A_n}{n^2} - \ldots \quad . \ . \quad (3)$$

(C, C' indépendants de θ).

Et si $\varphi(\theta)$ désigne, quand elle existe, la dérivée de $F(\theta)$,

$$\varphi(\theta) = a_0\theta + C + B_1 + \ldots + \frac{B_n}{n} + \ldots$$

avec

$$B_n = - b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta.$$

Les points θ de convergence de la série et d'existence de la dérivée sont les mêmes, avec égalité de la dérivée et de la série en ces points. Cela posé, nous avons démontré la proposition suivante:

Si $|h_n|$ *tend vers* 0 *en décroissant, si la série* $\left|\frac{h_n^2}{h_{n+1}}\right|$ *est absolument convergente, si* $\psi(\theta + h_n)$ *et* $\psi(\theta)$ *sont inférieurs à* A *indépendant de* n, *la fonction* $F(t)$ *possède pour* $t = \theta$ *une dérivée* $\varphi(\theta)$.

Si en outre le rapport $\left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right|$ *est inférieur à* α *indépendant de* n, *et si* $|h| < 2\alpha |h_1|$, *on a*

$$Q(\theta, h) = \varphi(\theta) + 20\delta\alpha Ah \qquad (\delta^2 < 1) \quad . \ . \ . \ . \quad (9)$$

Enfin, si $|h| < \eta$, A *peut être remplacé par la borne supérieure des nombres* $\psi(\theta, \eta)$, $\psi(\theta + h_n, \eta)$ *pour* $|h_n| < \eta$.

L'hypothèse faite sur ψ n'implique pas l'existence de la dérivée seconde généraliste de $f(\theta)$. La démonstration exige la condition (B).

De la formule (9) nous déduirons certaines propriétés différentielles de $F(\theta)$ en nous aidant du théorème de Baire sur les fonctions limites de fonctions continues.

THÉORÈME. *Si* P *est un ensemble parfait (continu ou discontinu), l'ensemble* K *des points de* P *au voisinage desquels* $\psi(\theta)$, *supposé fini, est non borné sur* P, *cet ensemble est non dense sur* P.[1])

Voici le sens de cet énoncé. Nous disons qu'une fonction $g(\theta)$ n'est pas bornée sur P, au voisinage d'un point θ_0, s'il est possible de déterminer une suite θ_n de points *situés* sur P, tendant vers θ_0 quand n croît, et tels que $|g(\theta_n)|$ croisse indéfiniment. θ_0 appartient à P puisque P, étant parfait, contient ses points limites.

---

[1]) Je rappelle qu'un ensemble est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites, *dense en lui-même* s'il admet chacun de ses points pour point limite, *parfait* s'il est à la fois fermé et dense en lui-même.

On appelle *portion* de P tout ensemble parfait ϖ contenu dans P et renfermant tous les points de P compris entre les extrémités de ϖ.

On dit que l'ensemble E est *partout dense* sur l'ensemble parfait P, si toute portion de P contient des points de E. E est dit *dense* sur P, s'il est partout dense sur une portion au moins de P. E est dit *non dense* sur P, si dans toute portion de P il en existe une autre où E n'a pas de points. Si (E, P) désigne l'ensemble commun à E et à P, E est partout dense, est dense, ou est non dense sur P, selon que le dérivé de (E, P), — c'est-à-dire l'ensemble des points limites de (E, P) — ou bien coïncide avec P, ou bien contient une portion de P, ou bien n'en contient aucune.

On peut encore dire que, quelque soit N, dans toute portion de P contenant θ_0, existe un point θ_N où $|g(\theta_N)| > N$.

Si au voisinage d'un point θ_0 de P, $\psi(\theta)$ n'est pas bornée sur P, l'oscillation [1]) de $\psi(\theta)$ sur P au point θ_0 est infinie. Et réciproquement d'ailleurs.

Or, M. Baire a montré que si une fonction $\psi(\theta)$ est limite de fonctions continues, l'ensemble $K(a)$ des points de P où l'oscillation de $\psi(\theta)$ sur P surpasse un nombre positif a donné est non dense sur P. *A fortiori*, l'ensemble K des points où l'oscillation de $\psi(\theta)$ est infinie, est-il non dense sur P.

Voici la démonstration de Baire dans ce cas particulier.

Soit K l'ensemble des points de P au voisinage desquels $\psi(\theta)$ n'est pas borné. K est évidemment fermé. Si K n'était pas non dense sur P, il existerait une portion P_1 de P qui serait contenue dans K. Nous définissons simultanément: une suite de points $\theta_1, \ldots, \theta_n, \ldots$, situés sur P_1, une suite de segments [2]) $s_0, s_1, \ldots$, le segment s_n étant intérieur à s_{n-1} et contenant lui-même θ_n à son intérieur, et une suite de nombres u_n, par cette règle récurrente: s_0 est un segment quelconque contenant des points de P_1. s_{n-1} étant supposé obtenu, nous définissons comme il suit θ_n, s_n, u_n. $\psi(\theta)$ étant non borné sur P_1, au voisinage de tout point de P_1, il existe sur P_1, intérieurement à s_{n-1}, un point θ_n où $\psi(\theta_n) > 2n$. D'après $\psi(\theta_n) = \underset{-\pi < u < \pi}{max.} |R(\theta_n, u)|$, il existe un nombre u_n non nul tel que $|R(\theta_n, u_n)| > n$. $R(\theta,u)$ étant continue par rapport à θ si $u \neq 0$, on peut entourer θ_n d'un segment s_n intérieur à s_{n-1}, inférieur en longueur à $^1/_2 s_{n-1}$ et en tout point θ duquel $|R(\theta, u_n)| > n$.

Il existe un point θ' (et un seul, puisque s_n tend vers 0 en longueur) intérieur à tous les segments s_n. θ' est la limite unique des points θ_n. Donc, θ' est sur P_1. Or, θ' appartenant à s_n quelque soit n, la suite $|R(\theta', u_n)|$ croit indéfiniment avec n, ce qui est contraire à l'existence de $\psi(\theta')$.

Donc K est non dense sur P. Dans toute portion de P il en existe une autre où K n'a pas de points et sur laquelle, par suite, $(\psi\theta)$ est bornée. Cette conclusion exige seulement que, pour chaque valeur de θ, les limites d'indétermination de $R(\theta,u)$ pour $u = 0$

---

[1]) L'*oscillation* de f *sur un ensemble* Q en un point limite θ_0 de Q, est l'écart des valeurs limites extrêmes de $f(\theta)$ quand θ tend vers θ_0 sans quitter Q. (θ peut coïncider une infinité de fois avec θ_0, si θ_0 appartientà Q). Si f supposée finie en tout point et en particulier au point θ_0, est non bornée sur Q au voisinage de θ_0, l'oscillation de f sur Q en θ_0 est évidemment infinie.

[2]) Je distingue le *segment* $\alpha\beta$ (ensemble $\alpha \leq x \leq \beta$) de l'*intervalle* $\alpha\beta$ (ensemble $\alpha < x < \beta$).

soient finies et non pas (condition A) toujours égales et finies.

Si F vérifie la condition (A), on montre par un raisonnement analogue au précédent, que *si en tout point de P, $|f(\theta)|$ est inférieur à un nombre fixe C, on peut trouver un nombre positif η tel que, si $\psi(\theta,\eta)$ est le maximum de $|R(\theta,u)|$ pour $|u|<\eta$, il existe une portion P_1 de P en tout point de laquelle $\psi(\theta,\eta)<C$.* L'hypothèse opposée, que toute portion de P contient, quelque soit η, des points θ où $\psi(\theta,\eta)\geq C$, entraîne $|f(\theta)|\geq C$ en certains points de P. Toute portion de P donne lieu au même énoncé que P lui-même.

Nous allons appliquer les propositions précédentes à diverses catégories d'ensembles parfaits P, *en supposont que F vérifie les conditions* (A) *et* (B).

Prenons d'abord pour P un segment continu $\alpha\beta$. L'ensemble K relatif à P est non dense sur P. Donc, dans tout segment S situé sur $\alpha\beta$, existe un segment s', ou $\alpha'\beta'$, où K ne possède aucun point. Alors, pour tous les points de s', $\psi(\theta)$ est inférieur à un même nombre A. θ et $\theta+h$ étant deux nombres quelconques intérieurs à s', posons $h_n=\frac{h}{2^n}$. D'après $\psi(\theta)$ et $\psi(\theta+h_n)<A$, F a une dérivée au point θ. De plus, d'après la formule (9) où $\alpha=2$ (et dont la démonstration se simplifierait extrémement avec les valeurs considérees de h_n),

$$Q(\theta,h)=\frac{F(\theta+h)-F(\theta)}{h}=\varphi(\theta)+40\delta Ah.$$

En échangeant les rôles de θ et de $\theta+h$, on trouve

$$Q(\varphi+h,-h)=\frac{F(\theta)-F(\theta+h)}{-h}=\varphi(\theta+h)+40\delta' Ah.\ (\delta^{2\prime},\delta'^{2}<1).$$

Par conséquent $\frac{\varphi(\theta+h)-\varphi(\theta)}{h}$ est borné sur l'intervalle $\alpha'\beta'$. Donc la fonction $\varphi(\theta)$ est continue sur s' et a ses nombres dérivés bornés. Elle possède, sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ comprises entre α' et β', une dérivée qui, constituant pour F une dérivée seconde, ne saurait être autre que $f(\theta)$.

Nous obtenons donc ce premier résultat important:

1°. *L'ensemble des points de non existence ou de discontinuité de la dérivée de $F(\theta)$, est non dense sur le continu.*

2°. *L'ensemble des points autour desquels $\varphi(\theta)$, dérivée de $F(\theta)$, existe et est continue, et en lesquels $\varphi(\theta)$ a pour dérivée $f(\theta)$, cet ensemble est partout dense sur le continu.*

Je dis que l'ensemble des points où $F(\theta)$ ne possède pas de dérivée est de mesure nulle.

En effet, supposons que cet ensemble ait une mesure positive (qu'il soit *épais*)[1]). Il contient donc un ensemble parfait épais en lui-même P. Il existe une portion de P, soit P_1, où $\psi(\theta)$ est borné. Or P_1 étant épais, contient des points où son épaisseur est égale à 1. Soit θ_0 un de ces points. Il existe un nombre positif η, tel que, dans tout intervalle contenant θ_0 et de longueur inférieure à η, l'ensemble P_1 possède une épaisseur moyenne supérieure à $1/_2$. Donc, dans l'intervalle $\theta_0 + \frac{\eta}{2^{n+1}}$ à $\theta_0 + \frac{\eta}{2^n}$, la mesure de P_1 est positive. Donc P_1 possède des points dans cet intervalle. Soit $\theta + h_n$ l'un d'eux. La suite h_n vérifie la condition $1 < \frac{h_n}{h_{n+1}} < 4$ et $\psi(\theta + h_n)$ est inférieur, quel que soit n, au maximum fini de $\psi(\theta)$ sur P.

Le théorème général s'applique. Donc, contrairement à notre hypothèse, $F(\theta)$ possède une dérivée en θ_0.

Donc, *l'ensemble E des points où $F'(\theta)$ n'existe pas, ensemble coïncidant avec celui où la série* (2) *diverge, cet ensemble est de mesure nulle*, résultat déjà connu et démontré en particulier par M. Fatou, mais que nous établissons sans recours à l'intégration.

Considérons l'ensemble E_1 où $\varphi(\theta)$ existe. Je dis que $\varphi(\theta)$ *possède une dérivée approximative*[2]) *égale à $f(\theta)$ en tout point de E_1 sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle*[3]).

On montre d'abord par un type de raisonnement que j'ai indiqué

---

[1]) Je dis qu'un ensemble E est *épais* si sa mesure est positive; qu'il est *épais dans un intervalle ab*, si les points de E intérieurs à ab forment un ensemble de mesure positive; *épais en un point*, s'il est épais dans tout intervalle contenant ce point; *épais en lui-même*, s'il est épais en chacun de ses points. Si les points de E compris entre a et b $(a < b)$ forment un ensemble de mesure $m(b) - m(a)$, le rapport $\frac{m(b) - m(a)}{b - a}$ s'appelle l'*épaisseur moyenne* de E sur l'intervalle ab. L'*épaisseur* de E *en un point* x_0 est la limite, si elle existe, de l'épaisseur moyenne de E sur un intervalle contenant x_0 et tendant indifféremment vers 0 en longueur (voir ma note de la précédente séance pour les cas où l'épaisseur n'existe pas).

[2]) On dit que $\varphi(\theta)$ possède une *dérivée approximative* λ en un point θ_0 (où φ est définie) si le quotient $\frac{\varphi(\theta) - \varphi(\theta_0)}{\theta - \theta_0}$ tend vers λ, quand θ tend vers θ_0 en se déplaçant indifféremment sur un ensemble (où φ est supposé défini) dont l'épaisseur en θ_0 est égale à 1. (M. Kintchine emploie dans le même sens l'expression de dérivée asymptotique).

[3]) „Sur un ensemble contenu dans E_1 et de même mesure que lui" s'exprime par la locution „presque partout sur E_1" de M. Lebesque ou par celle-ci „sur une pleine épaisseur de E_1" que j'ai proposée.

ailleurs (Bull. de la Soc. Math. de Fr., 1915) que, si $\varphi(\theta)$ n'admet pas en θ_0 la dérivée approximative $f(\theta_0)$, il existe un nombre positif $d(\theta_0)$ ou d_0 tel que l'ensemble $e(d_0)$ des points θ vérifiant

$$\left|\frac{\varphi(\theta)-\varphi(\theta_0)}{\theta-\theta_0}-f(\theta_0)\right|>d(\theta_0)$$

possède en θ_0 une épaisseur supérieure positive, pour un côté au moins.

Si le théorème énoncé était inexact, l'ensemble H des points θ_0 précédents aurait une mesure positive.

Nous pouvons évidemment supposer que la fonction $d(\theta_0)$ de θ_0 est mesurable [il suffit pour cela que $d(\theta_0)$ soit par exemple la moitié de la borne supérieure stricte des nombres d tels que l'épaisseur supérieure en θ_0 de l'ensemble $e(d)$ soit positive]. Soit H_n l'ensemble des θ_0 tels que $nd(\theta_0)>1$.

H est la réunion des H_n. Donc l'un au moins des H_n a une mesure positive. Il existe donc un nombre positif d, tel que l'ensemble H' des θ_0 vérifiant $d(\theta_0)>d$ a une mesure positive.

H' contient un ensemble parfait Q épais en lui-même.

$f(\theta)$ étant limite de fonctions continues est ponctuellement discontinue sur Q (Baire). Si petit que soit d', l'ensemble des points de Q où l'oscillation de $f(\theta)$ sur Q est au moins égale à d', cet ensemble est non dense sur Q. Prenons $d'=\frac{d}{121}$. Il existe une portion Q_1 de Q en tout point de laquelle l'oscillation de f sur Q (donc aussi sur Q_1) est inférieure à d'. Donc, si θ_1 est un point particulier de Q_1, il existe un intervalle i contenant θ_1 et tel qu'en chaque point θ de Q situé sur le segment i,

$$|f(\theta)-f(\theta_1)|<\frac{d}{121}.$$

Soit Q_2 la portion de Q_1 déterminée par l'intervalle i. (Q_2 est l'ensemble parfait situé sur le *segment* i et coïncidant avec Q_1 dans *l'intervalle* i).

Chacun, sauf le dernier, des ensembles E_1, H, H', Q, Q_1, Q_2 contient le suivant. Donc, en tout point de Q_2, $\varphi(\theta)$ existe (puisque Q_2 est dans E_1), $f(\theta)$ est compris entre $f(\theta_1)-\frac{d}{121}$ et $f(\theta_1)+\frac{d}{121}$ (dernière condition de Q_2), et $\varphi(\theta)$ possède, en tout point θ_2 de Q_2, et sur tout ensemble $\omega(\theta_2)$ d'épaisseur 1 en θ_2, un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_2)$ et différant de $f(\theta)$ de plus de d en valeur absolue (puisque Q_2 est dans H').

Considérons $F_1(\theta)=F(\theta)-\frac{\theta^2}{2}f(\theta_1)$. Cette fonction continue possède en tout point de Q_2 la dérivée $\varphi_1(\theta)=\varphi(\theta)-\theta f(\theta_1)$. $F_1(\theta)$ possède

en tout point la dérivée seconde généralisée $f_1(\theta) = f(\theta) - f(\theta_1)$.

$f_1(\theta)$ est compris, sur Q_2, entre $-\frac{d}{121}$ et $\frac{d}{121}$. D'autre part, les nombres dérivés de $\varphi_1(\theta)$ sont ceux de $\varphi(\theta)$ diminués de $f(\theta_1)$. Donc, $\varphi_1(\theta)$ dérivée de $F_1(\theta)$ existe en tout point de Q_2 et possède, quels que soient le point θ_2 de Q_2 et l'ensemble $\omega(\theta_2)$ ayant l'épaisseur 1 en θ_2, au moins un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_2)$ et différant de $f_1(\theta_1)$ d'au moins d en valeur absolue. Ce nombre dérivé vaut donc au moins $\frac{120}{121}\,d$ en valeur absolue.

D'après $|f_1(\theta)| < \frac{d}{121}$ quel que soit θ sur Q_2, il est possible de trouver un nombre $s' > 0$, tel que l'ensemble $\psi_1(\theta, s') < \frac{d}{121}$ contienne une portion K de Q_2. $\psi_1(\theta, s')$ est par définition le maximum de

$$R_1(\theta, u) = \frac{F_1(\theta + u) + F_1(\theta - u) - 2F_1(\theta)}{u^2} \quad \text{pour } 0 < |u| < s'.$$

L'ensemble parfait K jouit en résumé des propriétés suivantes:

1° K a une mesure positive (K étant portion de Q_2, épais en lui-même).

2° Il existe une fonction $F_1(\theta)$ et un nombre positif s' tel que la fonction $\psi_1(\theta, s')$ relative à F_1 est, en tout point de K, inférieure à $\frac{d}{121}$.

3° $F_1(\theta)$ possède en tout point de K une dérivée générale (ordinaire) $\varphi_1(\theta)$.

4° Quel que soit θ_0 sur K, et l'ensemble $\omega(\theta_0)$ d'épaisseur 1 en θ_0, $\varphi_1(\theta_0)$ possède en θ_0 un nombre dérivé spécial à $\omega(\theta_0)$ et dont la valeur absolue surpasse $\frac{120}{121}\,d$.

Nous allons montrer l'incompatibilité de ces conditions simultanées.

L'ensemble des points de K où K a l'épaisseur 1, a même mesure que K, donc une mesure positive. L'ensemble $j(s)$ des points θ_1 de K tels que, dans tout intervalle contenant θ_1 et de longueur inférieure à $s\,(>0)$, l'épaisseur de K soit supérieure à $\frac{5}{6}$, cet ensemble a une mesure positive dès que s est assez petit, et cette mesure tend vers celle de K quand s tend vers 0. Supposons $s < s'$ et $j(s)$ épais.

Soit θ_2 un point où $j(s)$ a lui-même l'épaisseur 1. Je dis que, si θ tend vers θ_2 sans quitter $j(s)$, $\frac{\varphi(\theta) - \varphi(\theta_2)}{\theta - \theta_2}$ a ses limites d'indétermi-

nation comprises entre $-\frac{120}{121}d$ et $\frac{120}{121}d$, ce qui est incompatible avec la 4ᵉ condition ci-dessus; car l'épaisseur de $j(s)$ en θ_2 est 1.

Supposons $|\theta - \theta_2| < s$, θ et θ_2 étant sur $j(s)$. Puisque K a une épaisseur supérieure à $\frac{5}{6}$ dans tout intervalle contenant θ ou θ_2 et de longueur inférieure à s, nous pouvons trouver sur K deux suites de nombres $\theta + h_n$, $\theta_2 + k_n$ de manière que

$$1^\circ.\ h_1 = -k_1 = \theta_2 - \theta,\quad 2^\circ.\ 2 \leq \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| \leq 3 \text{ et } 2 < \left|\frac{k_n}{k_{n+1}}\right| \leq 3.$$

D'après $\psi(\theta', s) < \frac{d}{121}$ quel que soit θ' sur K, on a donc ($\alpha = 3$):

$$Q_1(\theta, \theta_2 - \theta) = \varphi_1(\theta) + 60\delta \frac{d}{121}(\theta_2 - \theta)$$

et de même

$$Q_1(\theta_2, \theta - \theta_2) = \varphi_1(\theta_2) + 60\,\delta' \frac{d}{121}(\theta - \theta_2).$$

D'après l'égalité des premiers membres de ces deux relations

$$\frac{\varphi_1(\theta) - \varphi_1(\theta_2)}{\theta - \theta_2} \quad 120\,\delta'' \frac{d}{121} \qquad (\delta^2, \delta'^2, \delta''^2 < 1).$$

Cette relation est exacte quels que soient θ et θ_2 sur $j(s)$, si $|\theta - \theta_2| < s$. Donc les nombres dérivés de $\varphi_1(\theta)$ au point θ_2, spécialement à $j(s)$, sont inférieurs à $\frac{120}{121}d$ en valeur absolue, ce qui est opposé à l'hypothèse 4.

En résumé, *l'ensemble des points où $F(\theta)$ ne possède pas une dérivée ordinaire $\varphi(\theta)$ est de mesure nulle. Soit E cet ensemble, et E_1 son complémentaire. La fonction $\varphi(\theta)$, définie seulement sur E_1, possède une dérivée approximative égale à $f(\theta)$, sauf éventuellement en des points formant un ensemble de mesure nulle.*

Soit maintenant P un ensemble parfait discontinu quelconque, situé sur l'axe des θ. Soit M un point de P. Ajoutons à P son symétrique par rapport à M. Nous obtenons un ensemble parfait discontinu $P(M)$, symétrique par rapport à M. M est donc un point de seconde espèce (ou limite des deux côtés) de $P(M)$. Pour chacun des intervalles contigus i de $P(M)$ formons le rapport $l(i)$ des distances respectives à M de l'extrémité de i la plus éloignée et de l'extrémité de i la plus rapprochée de M.

$l(i)$ est borné indépendamment de i et de M, si la distance de i

à M surpasse un nombre donné. Quand i tend vers M, $l(i)$ possède une plus grande limite $\lambda(M)$ que nous appellerons *indice* de P en M. L'indice est un nombre au moins égal à 1 et peut être infini, même en tout point de P.

θ étant l'abscisse de M, l'indice $\lambda(M)$ peut encore être ainsi caractérisé (s'il est fini). Si petit que soit ε positif, il existe une suite de points $\theta + h_n$ situés sur P_1 tendant vers M et tels que, pour toute valeur de n, $1 < \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \lambda(M) + \varepsilon$. Il n'existe pas de suite analogue telle que $1 < \left|\frac{h_n}{h_{n+1}}\right| < \lambda(M) - \varepsilon$.

En tout point (sauf peut-être aux points extrêmes) d'une portion P_1 de P, l'indice de P_1 et celui de P coïncident.

Si P est épais, $\lambda(M) = 1$ en tous les points M où l'épaisseur de P est 1. Mais, même si P est épais en lui-même, l'indice $\lambda(M)$ peut être infini en certains points, et même en un ensemble dense de points de P.

On montre, selon un type de raisonnement maintes fois rencontré (voir par exemple, le Premier Théorème des nombres dérivés, Journal de Jordan, 1916) les propositions suivantes:

1. Si l'ensemble des points M où $\lambda(M) = \infty$ est partout dense sur P, cet ensemble est un résiduel de P. De même pour l'ensemble $\lambda(M) \geq \alpha > 1$.

2. Si P possède en chacun de ses points un indice fini, l'ensemble K des points de P au voisinage desquels cet indice est non borné, K est non dense sur P.

3. Si l'indice de P est en tout point inférieur à un nombre fixe $\alpha > 1$, il existe un nombre η positif et une portion P_1 de P, tels que, 1° si θ est quelconque sur P_1, 2° si θ' est quelconque à la fois sur P et dans l'intervalle $\theta - \eta$, $\theta + \eta$, il existe un nombre θ'' situé sur P et vérifiant les inégalités $1 < \left|\frac{\theta' - \theta}{\theta'' - \theta}\right| < \alpha$.

Car l'inexactitude de cette conclusion entraînerait sur un résiduel de P, l'inégalité $\lambda(M) \geq \alpha$.

La proposition précédente peut être appliquée à toute portion ϖ de P. Les portions P_1 pour lesquelles existe un nombre η sont donc partout denses sur P.

L'application de ces remarques à l'étude de $F(\theta)$ est immédiate. Il est évident qu'en tout point de P où l'indice est fini et autour duquel, sur P, $\psi(\theta)$ est borné, $\varphi(\theta)$ existe. Donc:

Si l'ensemble des points de P où l'indice de P est fini, est partout dense sur P, l'ensemble E_1 des points d'existence de $\varphi(\theta)$ est partout dense sur P.

Nous retrouvons comme cas particulier le théorème que l'ensemble E_1 des points d'existence de $\varphi(\theta)$ est partout dense sur tout ensemble épais, et en conséquence, que E, complémentaire de E_1, est de mesure nulle.

Si un ensemble parfait P possède en chacun de ses points un indice fini, l'ensemble des points où $\varphi(\theta)$ n'existe pas, ou est discontinue sur P, ou possède spécialement à P au moins un nombre dérivé infini, cet ensemble est non dense sur P.

De plus, l'ensemble des points où $\varphi(\theta)$ est dérivable spécialement à P et où sa dérivée spéciale à P est égale à $f(\theta)$, cet ensemble est partout dense sur P.

Comme exemple particulièrement simple d'ensemble dont l'indice est partout fini, nous citerons l'ensemble parfait classique de Cantor, obtenu en retranchant d'un segment continu l'intervalle occupant le tiers médian de ce segment, puis en recommençant l'opération sur chacun des deux segments conservés et en la répétant indéfiniment. $\lambda(M)$ est pour cet ensemble P_0 au plus égal à $\frac{5}{2}$ en tout point. Dans le cas le plus général, *il existe sur P_0 un ensemble fermé non dense K_0, tel que sur toute portion de P_0 sans points communs avec K, $F'(\theta) = \varphi(\theta)$ existe, est continue et douée spécialement à P_0 de nombres dérivés finis; de plus, en tous les points d'un ensemble partout dense sur P_0, $\varphi(\theta)$ admet $f(\theta)$ pour dérivée spéciale à P_0.*

Soit P un ensemble parfait quelconque, M un de ses points, θ l'abscisse de M, $P(M)$ l'ensemble parfait obtenu comme il a été dit plus haut.

Pour chaque intervalle i ou $rs (\theta < r < s)$ contigu à $P(M)$ et pour lequel $l(i) > 2$ (on pourrait remplacer 2 par tout autre nombre indépendant supérieur à 1), formons le rapport $\frac{(s-\theta)^2}{r-\theta} = \mu(i)$ du carré de la distance à M de l'extrémité s de i la plus éloignée de M, à la distance à M de l'extrémité r de i la plus proche de M.

Il est aisé de voir que si la série $\mu(i)$ est convergente, il est possible de déterminer une suite $\theta + h_n$ située sur P et telle que la série $\frac{h^2_n}{h_{n+1}}$ soit convergente. La réciproque est évidente. Nous dirons que P est *normal* ou *anormal* en M selon que la série $\mu(i)$ relative à M est convergente ou divergente.

Toute portion de P contenant M entre ses extrémités est, en même temps que P, normale ou anormale en M.

On montre sans peine que, si un ensemble P est normal en chacun de ses points, il existe, si petit que soit le nombre positif donné s, un nombre positif η et une portion P_1 de P, tels que, pour toute valeur de θ située sur P_1 et quelque soit θ' sur P entre $\theta - \eta$ et $\theta + \eta$, il est possible de trouver une suite $\theta + h = \theta', \theta + h_1, \ldots, \theta + h_n \ldots$, de points situés sur P et tels que la série $\frac{h^2}{h_1} + \frac{h_1^2}{h_2} + \ldots + \frac{h_n^2}{h_{n+1}} + \ldots$ ait une somme inférieure à s.

De là résulte que, *si un ensemble parfait P est normal en chacun de ses points, l'ensemble des points de P où $\varphi(\theta)$ est non existante ou discontinue sur P, cet ensemble est non dense sur P.*

Considérons un ensemble parfait P dont la construction satisfait aux conditions suivantes. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ une suite de nombres positifs inférieurs à $1/2$, et σ_0 un segment quelconque A la première opération, nous retranchons de σ_0 un intervalle, de manière qu'il subsiste sur σ_0 deux segments σ_1 ayant chacun une longueur supérieure à $\beta_1 \sigma_0$. A la seconde opération, nous extrayons de chaque segment σ_1 un intervalle, de façon que chacun des deux segments restants surpasse ce même segment σ_1 multiplié par $\beta_2 \ldots$ A la n^e fois, nous opérons sur 2^n segments σ_n conservés à la suite de l'opération précédente. De chacun de ces segments, extrayons un intervalle de manière que chacun des deux segments σ_{n+1} restants surpasse le segment σ_n d'où il est extrait, multiplié par β_n. Et ainsi indéfiniment.

1°. Si la plus petite limite de β_n pour n infini est positive, et égale à μ, P possède en chacun de ses points un indice au plus égal à $a = \frac{1 - \mu - \mu^2}{\mu - \mu^2}$.

2°. Si $\sigma_{n+1} = \sigma_n \beta_n$, P est normal ou anormal en chacun de ses points, selon que la série $\frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}{\beta_{n+1}}$ est convergente ou divergente.

Si donc $\beta_n = 2^{-k^n}$, P est normal ou anormal selon que $k < 2$ ou que $k \leq 2$.

L'ensemble E des points de non existence de $\varphi(\theta)$ est, nous l'avons vu, non dense sur le continu. Il se décompose en un ensemble non dense sur tout ensemble parfait (ou *clairsemé*) G_1 et un ensemble dense en lui-même G. Soit H le dérivé de G. H est parfait et G est partout dense sur H. H est anormal en tous les poins de G, sauf éventuellement en certains points formant un ensemble g non dense sur H.

On peut montrer par des méthodes analogues aux précédentes, le résultat suivant.

Toute fonction $F(\theta)$ *douée d'une dérivée seconde généralisée* $f(\theta)$ (condition A) possède (indépendamment de la condition B) les propriétés ci-après:

L'ensemble E de non existence de la dérivée $F'(\theta) = \varphi(\theta)$ *est non dense sur le continu. E est de mesure nulle. Les points où* $\varphi(\theta)$ *existe, sans posséder* $f(\theta)$ *pour dérivée exacte ou approximative, forment un ensemble de mesure nulle.*

Sur tout ensemble dont P l'indice est en chaque point inférieur à 2, 1° *il existe une portion* P_1 *où* $\varphi(\theta)$ *existe, est continue, douée de nombres dérivés spéciaux à P finis,* 2° $\varphi(\theta)$ *admet en un ensemble de valeurs de* θ *partout dense sur P, la fonction* $f(\theta)$ *pour dérivée spéciale à P.*

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt eene mededeeling aan: *„Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich* (Siebente Mitteilung [1]))".

(Medegedeeld in de vergadering van 26 Juni 1920).

Im folgenden gebe ich die Charakterisierung aller Klassen von eindeutigen stetigen Abbildungen einer beliebig vorgegebenen endlichfach zusammenhängenden Fläche μ auf eine beliebig vorgegebene, endlichfach zusammenhängende Fläche μ'.

Sei O ein Punkt von μ, F die Gruppe der geschlossenen stetigen Kurven von μ durch O (welche in bezug auf F nur dann als verschieden betrachtet werden, wenn sie sich nicht mittels stetiger Modifizierung unter Festhaltung von O ineinander überführen lassen), N eine *„Normalbasis"* von F, welche aus den, falls μ zweiseitig ist, der Fundamentalrelation

$$a_1\, a_2\, a_1^{-1}\, a_2^{-1} \ldots a_{n-1}\, a_n\, a_{n-1}^{-1}\, a_n^{-1}\, a_{n+1} \ldots a_{n+m} = 1$$

und, falls μ einseitig ist, der Fundamentalrelation

$$a_1^2\, a_2^2 \ldots a_{n-1}^2\, a_n^2\, a_{n+1} \ldots a_{n+m} = 1$$

genügenden Kurven $a_1, a_2, \ldots a_{n+m}$ (die wir in dieser Reihenfolge

---

[1]) Vgl. diese Verslagen XVII, S. 741; XVIII, S. 106; XIX, S. 737; XX, S. 24; XXI, S. 300; XXVIII, S. 1186. Hinsichtlich der fünften dieser Mitteilungen kann bemerkt werden, dass der dortige Beweis auch unabhängig vom LÜROTH-CLEBSCH-schen Theorem geführt werden kann, nämlich so: a.a.O. S. 306 Z. 16 wählen wir auf μ' eine solche einfache geschlossene Kurve k, welche ein alle Bildpunkte von Rändern und Verzweigungspunkten der g_ν sowie alle nirgends dichten Bilder von g_ν enthaltendes Gebiet g begrenzt, und ziehen $k+g$ stetig zusammen in einen Punkt P von g. Die durch diese stetige Kontraktion von $k+g$ bestimmte stetige Aenderung von α_e führt zu einer *„primitiven Abbildung* α_l *von* μ *auf* μ'", für welche die ausserhalb voneinander gelegenen Innengebiete G_ν einer endlichen Zahl einander nicht treffender einfacher geschlossener Kurven von μ je eineindeutig mit dem Grade ± 1 auf die punktierte Fläche μ' und der Rest von μ auf den Punkt P abgebildet wird. Sodann führen wir mittels wiederholter stetiger Verschmelzungen, jedesmal von einem durch α_l mit dem Grade 1 und einem durch α_l mit dem Grade -1 abgebildeten G_ν, α_l in eine *„homogen-primitive Abbildung* α_q *von* μ *auf* μ'" über, deren Gebiete G_ν entweder alle mit dem Grade $+1$ oder alle mit dem Grade -1 abgebildet werden. Dass alle homogen-primitiven Abbildungen n-ten Grades von μ auf μ' zur selben Klasse gehören, leuchtet unmittelbar ein

In der sechsten Mitteilung ist S. 1189 Fussnote [2]) *statt* Math. Annalen 81 *zu lesen* Math. Annalen 82.

geordnet denken) besteht, O' ein Punkt von μ', G die Gruppe der geschlossenen Kurven von μ' durch O', M eine Normalbasis von G, welche aus den Kurven $b_1, \ldots b_r$ besteht.

Zu einer eindeutigen stetigen Abbildung σ von μ auf μ', welche O in O', mithin jedes a_ν in ein Kurve a'_ν durch O' überführt, gehört ein „*Transformationsformelsystem*"

$$a'_\nu = \varphi_\nu (b_1 \ldots b_r) \; (\nu = 1, 2, \ldots n + m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo die φ Produkte darstellen.

Ist $\chi (b_1 \ldots b\,)$ ein willkürliches Element von G, so gehört das Formelsystem

$$a'_\nu = \chi \, \varphi_\nu \, \chi^{-1} \; (\nu = 1, 2, \ldots n + m), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welches wir zu (1) *ähnlich* nennen werden, ebenfalls zu O in O' überführenden Abbildungen von μ auf μ' als Transformationsformelsystem und zwar können diese *innerhalb der Klasse von* σ gewählt werden. Andererseits gehört zu jeder O in O' überführenden Abbildung von μ auf μ', welche zur Klasse von σ gehört, ein zu (1) ähnliches Transformationsformelsystem.

Somit bestimmt jede Klasse von Abbildungen von μ auf μ' (zu welcher ja immer O in O' überführende Abbildungen gehören) eine Menge von untereinander ähnlichen Transformationsformelsystemen. Diese Menge werden wir als das *formale Bild* der Klasse bezeichnen, so dass *unsere Aufgabe in der Ermittelung der Bedingungen besteht, unter denen zwei dasselbe formale Bild besitzende Abbildungsklassen von μ auf μ' identisch sind.*

Um die Lösung dieser Aufgabe formulieren zu können, konstruieren wir auf μ ein der Normalbasis N entsprechendes, in O zusammenhängendes *kanonisches Rückkehrschnittsystem* R, durch welches also μ in eine schlichte Fläche F, deren Grenze g in R liegt, dabei übrigens einzelne Segmente von R der Fundamentalrelation entsprechend zweimal durchlaufen kann, und m je von einem Flächenrande r_ν und einer zu R gehörigen, r_ν umschliessenden „Randschlinge" s_ν begrenzten Zylinderflächen ζ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots m)$ zerlegt wird. Weiter wählen wir auf μ', im Falle dass diese Fläche eine projektive Ebene ist, eine gerade Linie l durch O' und auf l einen Umlaufssinn λ. Im Falle dass μ' eine projektive Ebene ist, werden wir sodann eine Abbildung eine *Normalabbildung* nennen, wenn sie jeden zu R gehörigen Rückkehrschnitt entweder in O' oder eineindeutig in l, und zwar das erste Mal, dass er in g auftritt, mit dem Umlaufssinne λ transformiert.

Die Lösung der gestellten Aufgabe gestaltet sich nunmehr folgendermassen:

Zu einem formalen Bilde B gehört nur eine einzige Klasse:

1°. *wenn die universelle Ueberlagerungsfläche von μ' offen ist.*

2°. *wenn die universelle Ueberlagerungsfläche von μ' geschlossen, μ aber offen ist.*

3°. *wenn μ' den Zusammenhang der projektiven Ebene besitzt, μ einseitig und geschlossen ist, wenigstens ein einseitiger Rückkehrschnitt von μ zweiseitig abgebildet wird und eine, mithin alle zu B gehörigen Abbildungen ungerade sind.*

Zu einem formalen Bilde B gehören zwei Klassen:

1°. *wenn μ' den Zusammenhang der Kugel besitzt und μ einseitig und geschlossen ist. Das entsprechende Kriterium besteht in der Parität der zugehörigen Abbildungen.*

2°. *wenn μ' den Zusammenhang der projektiven Ebene besitzt, μ zweiseitig und geschlossen ist und wenigstens ein Rückkehrschnitt von μ einseitig abgebildet wird. Das entsprechende Kriterium besteht in der Parität der auf der zweiseitigen Verdoppelung von μ' gemessenen Grade der zugehörigen Normalabbildungen.*

3°. *wenn μ' den Zusammenhang der projektiven Ebene besitzt, μ einseitig und geschlossen ist, wenigstens ein einseitiger Rückkehrschnitt von μ zweiseitig abgebildet wird und eine, mithin alle zu B gehörigen Abbildungen gerade sind. Das entsprechende Kriterium besteht in der Parität der auf der zweiseitigen Verdoppelung von μ' gemessenen Inhalte der zugehörigen Normalabbildungen.*

Zu einem formalen Bilde B gehören unendlichviele Klassen:

1°. *wenn μ' den Zusammenhang der Kugel besitzt und μ zweiseitig und geschlossen ist. Das entsprechende Kriterium besteht im Grade der zugehörigen Abbildungen.*

2°. *wenn μ' den Zusammenhang der projektiven Ebene besitzt, μ zweiseitig und geschlossen ist und alle Rückkehrschnitte von μ zweiseitig abgebildet werden. Das entsprechende Kriterium besteht im absoluten Werte des zugehörigen auf der zweiseitigen Verdoppelung von μ' gemessenen Abbildungsgrades.*

3°. *wenn μ' den Zusammenhang der projektiven Ebene besitzt, μ einseitig und geschlossen ist und alle einseitigen Rückkehrschnitte von μ einseitig abgebildet werden. Das entsprechende Kriterium besteht im absoluten Werte der Grade der zugehörigen Abbildungen der zweiseitigen Verdoppelung von μ auf die zweiseitige Verdoppelung von μ'.*

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN, biedt mede namens den Heer A. HOUDIJK, eene mededeeling aan: „*De Brownsche beweging over een draad*". I.

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer G. VAN RIJNBERK aangeboden, namens den Heer J. C. GOUDRIAAN, het manuscript van diens verhandeling: „*Over de schatting van het tempo van periodische geluidsprikkels en hare afhankelijkheid van physiologische factoren.*"

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren G. VAN RIJNBERK en E. D. WIERSMA met verzoek om rapport, uit te brengen in een volgende vergadering.

Voor de boekerij der Akademie wordt ten geschenke aangeboden:

1. door den Heer J. W. MOLL, namens de Publicatie-Commissie, een exemplaar van het onlangs verschenen 2^e^ deel van het posthume werk van wijlen het lid der Akademie C. A. J. A. OUDEMANS: „*Enumeratio systematica fungorum*".

2. door den Heer F. M. JAEGER: een exemplaar van zijn „*Lectures on the principle of Symmetry and its applications in all natural sciences*", (2nd augmented edition).

3. door den Heer R. MAGNUS een exemplaar van zijn „*Practische oefeningen in de pharmacologie voor medische studenten*".

4. door den Heer F. A. F. C. WENT een exemplaar van de dissertatie van den Heer H. N. KOOIMAN: „*Over de erfelijkheid van de kleur der zaadhuid van Phaseolus vulgaris*".

De vergadering wordt gesloten.

16 December 1920.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 27 NOVEMBER 1920.

DEEL XXIX.

N°. 5.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Kennisgeving van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, W. H. JULIUS, P. VAN ROMBURGH, L. E. J. BROUWER en HENDRIK DE VRIES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een bij renvooi van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 25 November 1920 N°. 4564 Afd. K. W. aan de Afdeeling, met verzoek om bericht en raad, doorgezonden request van het bestuur der vereeniging „Wis- en Natuurkundige Leeskamer Bosscha" te Leiden, waarin van de Regeering gevraagd wordt eene subsidie voor eenmaal van *f* 2000.— en een jaarlijksche subsidie van *f* 1000.— beide voor het jaar 1921. Ter motiveering van deze aanvraag is eene toelichtende bijlage aan het request toegevoegd.

De Voorzitter stelt het request, ter fine van advies, in handen van de Heeren W. KAPTEYN, H. HAGA en J. P. KUENEN met verzoek hierover in de volgende vergadering de Afdeeling te praeadviseeren.

3°. Een gedrukt rondschrijven namens de „*Royal Society*" te Londen, waaraan toegevoegd is een gedrukt voorloopig verslag van de besluiten, welke, met het oog op eene voortzetting van de publicatie van den „*International Catalogue of scientific literature*", genomen zijn in de conferentie te Londen gehouden op 28 September en volgende dagen.

Afschriften dezer stukken zijn met een begeleidend schrijven namens de Afdeeling den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen ter kennisneming toegezonden.

4°. Een geschreven verslag door Mej. H. C. C. LA RIVIÈRE te Leiden van hare werkzaamheid in de laboratoria van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg tijdens haar verblijf aldaar van December 1919—April 1920, waartoe zij in staat gesteld werd door de haar in 1916 door de Afdeeling verleende subsidie uit het Buitenzorg-fonds, aangevuld met eene Rijkstoelage.

Dit verslag luidt als volgt:

Plantkunde. — Verslag van de werkzaamheden verricht aan het Vreemdelingen-laboratorium ('s Lands Plantentuin) te Buitenzorg.

Van December 1919 tot April 1920 had ik het groote voorrecht vanwege het Buitenzorg-fonds met een subsidie van de Regeering, de schoone Tropen te mogen bezoeken. Reeds was mij dit toegestaan in 1916, maar de oorlogsomstandigheden noodzaakten mij, mijn vertrek uit te stellen tot bovengenoemden datum.

Mijn doel was, buiten het verkrijgen van een algemeenen indruk van den tropischen plantengroei, een verzameling aan te leggen van lianen met een inwendigen bouw, afwijkende van het gewone type om het ontstaan van die abnormaliteit te kunnen bestudeeren, in verband met de resultaten gevonden bij mijn, reeds in de Annales du Jardin Botanique de Buitenzorg gepubliceerd, onderzoek van *Gnetum moluccense*. Bij deze werd geconstateerd, dat een knoop met zijtakken het uitgangspunt is van den afwijkenden bouw; daarom werden nu van alle voorhanden lianen takken met zijtakken ingezameld en in alcohol 70°/₀ geconserveerd. Meestal vertoonden de uiteinden der takken nog geen afwijking, dus lag het voor de hand dikke takken te verzamelen met de uiteinden en de zijtakken er bij, daar hierin het eerste ontstaan en de verdere ontwikkeling van de abnormaliteit opgespoord kon worden.

De gegevens omtrent planten met afwijkenden bouw werden voornamelijk ontleend aan: SCHENCK, Beiträge zur Biologie der Lianen, SOLEREDER, Systematische Anatomie der Dicotyledonen en ZEYLSTRA, Bijdrage tot de kennis der houtige lianen.

Het meeste materiaal, dat ik inzamelde, is afkomstig van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg; wel werden enkele tochten ondernomen o.a. naar het secondaire bosch te Depok, naar den kalkberg Tjampea en naar Tjibodas, maar de oogst aan lianen met afwijkenden inwendigen bouw was aldaar niet groot, omdat vele na doorkapping het gewone type bleken te vertoonen.

Vele van de gewenschte lianen waren aanwezig in 's Lands Plantentuin, maar van de Amerikaansche soorten slechts zeer weinige, wat niet te verwonderen is, daar hier voornamelijk planten uit den Indischen Archipel gekweekt worden.

De gestelde tijd van een verblijf van vier maanden aan 's Lands Plantentuin is dus door mij besteed met het inzamelen van lianen

en verder van allerlei planten met biologische bijzonderheden zoowe gedroogd als op spiritus, voor het Museum in het Botanisch Laboratorium te Leiden bestemd.

Daar ik door omstandigheden in de gelegenheid was nog eenige maanden langer werkzaam te blijven aan het TREUB-Laboratorium, is door mij *Gnetum moluccense* weder ter hand genomen, om nog enkele vraagpunten, die indertijd in Leiden niet uitgewerkt konden worden door gebrek aan materiaal, hier te completeeren. De resultaten daarvan hoop ik later te kunnen mededeelen.

Om een inzicht te krijgen in de cultures op Java, werd door mij bezocht het proefstation te Pasaroean voor suiker, het proefstation voor tabak te Klaten, dat voor kina te Tjinjiroean en het proefstation voor bergcultures te Salatiga, waar koffie, cacao, kapok en rubber te zien waren. De mangrove-vegetatie aan de Noordkust van Noesa Kambangan werd eveneens nauwkeurig nagegaan.

Tenslotte rest mij nog woorden van dank te brengen in de eerste plaats aan Prof. Dr. J. M. JANSE, aan wien ik het te danken heb, dat ik deze nuttige en schitterende reis heb mogen ondernemen, verder aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen, die mijn verzoek om in aanmerking te mogen komen voor de subsidie van het Buitenzorg-fonds, ter inwilliging voordroeg; aan den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, die mij mijn verzoek om verlof uit mijn betrekking als hoofd-assistente aan het Botanisch Laboratorium te Leiden heeft toegestaan en aan al degenen, die er toe hebben bijgedragen mijn verblijf in de Tropen tot een zeer nuttigen en aangenamen tijd te maken.

(get.) HENRIETTE C. C. LA RIVIÈRE.

Physiologie. — De Heer E. D. WIERSMA brengt, mede namens den Heer G. VAN RIJNBERK, het volgende verslag uit:

De ondergeteekenden meenen het werk van den Heer J. C. GOUDRIAAN „Over de schatting van het tempo van periodische geluidsprikkels en hare afhankelijkheid van physische factoren" aldus te moeten beoordeelen.

De schrijver heeft zijn onderzoek in vijf hoofdstukken verdeeld. In het eerste hoofdstuk geeft hij eene beschrijving van het doel van zijn onderzoek en een overzicht over analoge experimenten.

In het tweede hoofdstuk geeft hij een volledige en duidelijke beschrijving van de proefopstelling, van de wijze hoe hij de proeven heeft genomen en van de bewerking der resultaten.

In het derde hoofdstuk behandelt hij de reproductie van het tempo van perodische geluidsprikkels gedurende een voorgeschreven reproductietijd van 30″.

In het vierde de reproductie van het tempo van periodische geluidsprikkels met gelijktijdige schatting van den opgegeven tijd.

En in het vijfde hoofdstuk bespreekt schrijver de vraag of er verband bestaat tusschen deze schatting van het tempo van periodische geluidsprikkels en ons psychisch tempo eenerzijds en onze physiologische rhythmen anderzijds.

De proefopstelling is met zorg geschied. Daardoor was hij in staat op een kymograaf de physiologische rhythmen, die in ademhaling en pols tot uiting komen, het psychisch tempo, waaronder volgens STERN de individueele voorkeur voor een bepaalde snelheid van bewegingen wordt verstaan, en de schatting van de snelheid van pas gehoorde metronoom-slagen op te schrijven.

Hij kon op deze wijze nagaan of de individueele eigenaardigheden van de schatting en van het psychische tempo met typische eigenschappen van het physiologische tempo samengaan en verder of het psychisch tempo ook verandert, wanneer om een of andere reden het physiologisch tempo wordt gewijzigd. Kunstmatige verandering van het physiologisch tempo bracht hij tot stand door den proefpersoon diepe kniebuigingen te laten maken.

Bovendien liet hij een deel der proefpersonen den geheelen tijd, gedurende welken zij het tempo hadden gehoord, schatten.

Zeer uitvoerig worden de resultaten der verschillende proefper-

sonen afzonderlijk besproken. Een overzicht daarvan te geven in kort bestek is niet mogelijk.

Schrijver komt ten slotte op grond der proeven tot de overtuiging, dat er *geen* parallelisme bestaat tusschen het psychisch tempo en de ademhalingsrhythme. Daarentegen blijkt dit in zeer sterke mate het geval te zijn met het psychisch tempo en de hartrhythme.

De uitkomsten der proeven brengen schrijver er toe te veronderstellen dat het psychisch tempo en de rhythme van de hartactie beide in hooge mate afhankelijk zijn van de emotionaliteit.

De ondergeteekenden meenen, dat het werk van den Heer GOUDRIAN wat opzet en uitwerking betreft, verdient in de Verhandelingen te worden opgenomen. De resultaten zijn ook van dien aard, dat zonder twijfel ieder, die zich in het vervolg met de studie van den rhythmus wil bezighouden, rekening zal moeten houden met dit werk.

(get.) E. D. WIERSMA.
(„) G. VAN RIJNBERK.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van het rapport, strekkende tot de opneming der verhandeling in de werken der Akademie.

Aan den Heer GOUDRIAN zal hiervan kennis gegeven worden.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan: *„Over de mogelijkheid van statistisch evenwicht van het heelal.”*

EINSTEIN heeft bij verschillende gelegenheden de meening uitgesproken dat het bestaan van een eindige hoeveelheid materie in het heelal noodzakelijk de eindigheid van de drie-dimensionale ruimte tengevolge moet hebben. In zijn Leidsche inaugurale rede [1]) zegt hij:
„Wir können aber auf Grund der relativistischen Gravitations-„gleichungen behaupten, dass eine Abweichung vom euklidischen „Verhalten bei Räumen von kosmischer Grössenordnung dann vor-„handen sein muss, wenn eine noch so kleine positive mittlere „Dichte der Materie in der Welt existiert. In diesem Falle muss die „Welt notwendig räumlich geschlossen und von endlicher Grösse „sein, wobei ihre Grösse durch den Wert jener mittleren Dichte „bestimmt wird.”

Het komt mij voor dat deze bewering niet zonder reserve kan geaccepteerd worden. De vergelijkingen van het gravitatie-veld zijn:

$$G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\nu} \; (G - 2\lambda) = -\varkappa T_{\mu\nu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Als wij veronderstellen dat alle materie in rust is, en vrij van spanning of andere inwendige krachten, dan heeft de tensor $T_{\mu\nu}$ de waarde

$$T_{44} = g_{44}\,\varrho, \text{ alle andere } T_{\mu\nu} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waar ϱ de dichtheid is in natuurlijke maat. Wij kunnen stellen $\varrho = \varrho_0 + \varrho_1$, waar de gemiddelde waarde van ϱ_1 nul is, zoodat ϱ_0 de gemiddelde dichtheid is. Als wij dan ϱ_1 verwaarloozen, wordt aan de vergelijkingen (1) voldaan door de $g_{\mu\nu}$ behoorende bij het lijnelement:

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2\frac{r}{R}[d\psi^2 + \sin^2\psi \, d\theta^2] + c^2\,dt^2, \quad . \quad . \quad (3A)$$

als men neemt

$$\varkappa\varrho_0 = \frac{2}{R^2}, \quad \lambda = \frac{1}{R^2}, \text{ (EINSTEIN)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4A)$$

en ook door die van het lijnelement:

$$ds^2 = -dr^2 - R^2 \sin^2\frac{r}{R}[d\psi^2 + \sin^2\psi \, d\theta^2] + \cos^2\frac{r}{R}c^2dt^2, \quad . \quad (3B)$$

met

[1]) Aether und Relativitätstheorie. Berlin, Julius Springer, 1920, p. 13.

$$\rho_0 = 0, \qquad \lambda = \frac{3}{R^2} \quad \text{(DE SITTER)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4B)$$

Voor $R = \infty$ ontaardt zoowel (A) als (B) tot:

$$ds^2 = - dr^2 - r^2 [d\psi^2 + sin^2 \psi \, d\theta^2] + c^2 dt^2, \quad . \quad . \quad . \quad (3C)$$

met

$$\rho_0 = 0, \qquad \lambda = 0 \quad \text{(NEWTON)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4C)$$

EINSTEIN's solutie (A), waarin de drie-dimensionale ruimte eindig en gesloten is, schijnt dus de eenige te zijn die een eindige waarde der gemiddelde dichtheid ρ_0 toelaat. Maar dit is alleen waar als de tensor $T_{\mu\nu}$ de waarde (2) heeft, d. i. als de materie in rust en in evenwicht is. Als de materie in beweging is, of onderworpen aan spanningen of druk, dan mag men niet de waarde (2) gebruiken; de vergelijkingen (3) en (4) geven dan niet de juiste oplossing, en er kunnen ook in de systemen (B) en (C) eindige waarden van ρ_0 voorkomen. [1]) EINSTEIN's boven geciteerde bewering kan dus alleen staande gehouden worden, als men bovendien de hypothese maakt, dat voor het heelal, of voor streken van „kosmische" uitgebreidheid, de waarde (2) van den tensor $T_{\mu\nu}$ nog gebruikt mag worden, d.i. als men veronderstelt dat voor zulke streken de materie in statistisch evenwicht is.

Dit kan ook aldus uitgedrukt worden: Als het stelsel (A) het ware is, dan is het mogelijk dat het heelal, of groote gedeelten er van, in statistisch evenwicht zijn. Als hetzij (B), hetzij (C) het ware stelsel is, dan is dit niet mogelijk. Nu schijnt mij deze mogelijkheid van statistisch evenwicht van groote gedeelten van het heelal geenszins vanzelfsprekend, of zelfs maar waarschijnlijk, te zijn. Het denkbeeld van eene evolutie in een bepaalde richting komt mij voor slecht te vereenigen te zijn met het bestaan, zoo niet met de mogelijkheid, van zulk evenwicht.

De stelsels (A) en (B), die de invoering van de constante λ met zich brengen, hebben hun ontstaan te danken aan den wensch de drie-dimensionale wereld eindig te maken [2]). Op dit oogenblik is de

[1]) In het systeem (A) verschilt dan de waarde van ρ_0 van de door ($4A$) bepaalde. Zie ook: DE SITTER, On EINSTEIN's theory of gravitation and its astronomical consequences, Monthly Notices of the R. A. S. Vol. LXXVII, pp. 6—7, 18 en 20—23.

[2]) Als men veronderstelt dat het drie-dimensionale lijnelement den vorm heeft:

$$d\sigma^2 = dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} [d\psi^2 + sin^2 \psi \, d\theta^2], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en dat $g_{i4} = 0$, dan zijn (A) en (B) de eenige mogelijke soluties. Van de twee mogelijke drie-dimensionale ruimten met constante kromming, die het lijnelement (5) hebben, moeten wij de zoogenaamde elliptische ruimte kiezen. De analogie met de twee-dimensionale meetkunde suggereert de spherische ruimte, maar deze

keus tusschen de systemen (A), (B) en (C) uitsluitend een questie van smaak. Er is nog geen physisch kriterium beschikbaar om er tusschen te decideeren. Weliswaar is (A) het eenige der drie systemen dat voldoet aan MACH's eisch dat de traagheid tot een materieele bron moet kunnen teruggebracht worden. Deze eisch is echter zuiver metaphysisch, en heeft geen enkelen physischen grondslag. Hij komt mij voor het laatste overblijfsel te zijn van het streven naar een zuiver mechanische natuurverklaring, dat logisch en historisch gebaseerd is op het geloof aan krachten op een afstand, en waarvan EINSTEIN in zijn Leidsche rede de onhoudbaarheid zoo duidelijk heeft aangetoond.

De drie systemen verschillen echter in hun physische consequenties op groote afstanden, en een experimenteele beslissing is in de toekomst niet onmogelijk. De beslissing tusschen (B) aan den eenen, en (A) en (C) aan den anderen kant kan worden geleverd door de studie van systematische radieele snelheden van spiraal-nevels [1]). De beslissing tusschen (A) en (C) is veel moeilijker daar beide $g_{44} = 1$ hebben, en zij alleen verschillen in de g_{ij} met i en j verschillend van 4, welker waarden op groote afstanden niet zoo gemakkelijk te bepalen zijn. De keuze tusschen (A) en (C) zal, naar ik vrees, nog geruimen tijd op persoonlijke voorkeur moeten berusten.

analogie is misleidend. De elliptische ruimte is in werkelijkheid degene. waarvan onze gewone euclidische ruimte het grensgeval is voor $R = \infty$. In onze gewone meetkunde heeft een vlak een lijn (en niet een punt) in het oneindige; twee rechten hebben maar één snijpunt (en niet twee), dat in het oneindige kan liggen; als wij naar het oneindige gaan langs den eenen tak van een hyperbool, komen wij terug langs den anderen tak, en wel aan den anderen (en niet aan denzelfden) kant van de asymptoot. Al deze eigenschappen komen toe aan de elliptische, in tegenstelling tot de spherische, ruimte. De spherische ruimte is slechts een geheel noodelooze verdubbeling van de elliptische.

[1]) Zie DE SITTER, l. c. pp. 27—28. Toen ter tijde (1917) waren nog slechts van drie spiraal-nevels radieele snelheden bekend, waarvan één negatief was terwijl het gemiddelde was + 600 *km/sec*. Thans zijn de radieele snelheden van 25 spiraal-nevels bekend (zie Mount Wilson Publications, N⁰. 161, p. 19), waarvan slechts 3 negatief zijn, terwijl het gemiddelde is + 560 *km/sec* (of + 677 *km/sec* als men de 4 helderste weglaat). Het stelsel (B) eischt een (schijnbare) positieve radieele snelheid voor ver verwijderde objecten.

Physiologie. De Heer MAGNUS biedt een mededeeling aan van den Heer W. STORM VAN LEEUWEN en den Heer F. VERZÁR: *„Over de gevoeligheid voor vergiften bij dieren lijdende aan avitaminosen"*.

(Mede aangeboden door den Heer PEKELHARING).

EIJKMAN vond in 1893, dat kippen, bij voedering met gepelde rijst, gingen lijden aan polyneuritis en dat het ontstaan dezer aandoening werd belet door de dieren te voederen met halfgepelde rijst, of door aan de gepelde de daarvan losgemaakte „zilvervliesjes" toe te voegen. Bovendien vond hij, dat bij den mensch het ontstaan der beri-beri in de hand werd gewerkt, door het rijkelijk gebruik van gepelde rijst, terwijl die ziekte niet ontstond, of, zoo zij reeds ontstaan was, werd genezen, indien aan het voedsel de zilvervliesjes van de rijst werden toegevoegd. Later is gebleken, dat deze bevindingen betrekking hebben op een bijzonder geval van een algemeenen regel. Niet alleen in ongepelde rijst, maar in voedingsmiddelen van allerlei aard, komen bestanddeelen voor, die voor den normalen groei en voor het gezond blijven van menschen en dieren onontbeerlijk zijn, ook al bevat het voedsel de eigenlijke, lang bekende voedingsmiddelen in voldoende mate. Deze bestanddeelen, welker ware aard nog geheel onbekend is, worden tegenwoordig veelal onder den naam van „vitaminen" samengevat.

Door het werk dat in de laatste jaren, vooral van Amerikaansche zijde hierover is verricht, is onze kennis over deze zaken aanzienlijk vermeerderd. Wij weten thans, dat onder vitaminen niet een enkele stof moet worden verstaan, maar dat verschillende accessorische voedingsstoffen aanwezig zijn, het fat soluble *A*, het water soluble *B* en wellicht nog een derde *C* stof; wij weten ook dat al naarmate verschillende stoffen in de voedingsmiddelen ontbreken, zeer verschillende ziekte-vormen kunnen optreden en dat deze ziekteverschijnselen ook bij verschillende dieren zeer verschillend kunnen zijn. Omtrent het voorkomen van de vitaminen in de onderscheidene voedingsmiddelen is een groote hoeveelheid feiten-materiaal bijeengebracht. Eén zaak ligt echter nog bijna geheel in het duister, n.l. de vraag wat tenslotte de oorzaak van de ziekte-verschijnselen is, die bij dieren, welke aan avitaminosen lijden optreden. Er is een opvatting die aanneemt, dat onder bepaalde omstandigheden het

gebrek aan de vitaminen een praedispositie schept voor infecties met sommige bacteriën, maar deze veronderstelling voldoet niet geheel en zeker niet voor alle gevallen.

De verschijnselen die bij avitaminosen op den voorgrond treden zijn: stoornissen in de innervatie van de dwarsgestreepte spieren, stoornissen in de innervatie van glad spierweefsel (verlamming van oesophagus en maagdarmkanaal bij de kip bijv.) en verder tropische stoornissen. Deze stoornissen zijn ongetwijfeld voor een deel van nerveuzen aard, men vindt bij dieren lijdende aan avitaminosen bijv. bij aan polyneuritis lijdende kippen duidelijke afwijkingen in de periphere zenuwen. Echter deze anatomische afwijkingen kunnen niet de beslissende factor voor het ontstaan der avitaminose zijn, want zeer dikwijls kan bij dieren, welke aan zeer uitgesproken ziekteverschijnselen van avitaminosen lijden door injectie met de betreffende vitaminen in zeer korten tijd een groote verbetering worden tot stand gebracht en het dier practisch gesproken worden genezen. Hieruit moet men de gevolgtrekking maken, dat de bij avitaminosen voorkomende stoornissen zeker voor een groot deel van functioneelen aard zijn, d. w. z. de organen van het dier reageeren niet op de op dat oogenblik aanwezige prikkels, maar kunnen door toevoeging van een bepaalde stof, het vitamine, weer tot (bijna) normale functie worden gebracht.

Er bestaat dus bij de avitaminosen herhaaldelijk een toestand, waarbij verschillende dwarsgestreepte en gladde spieren wel is waar niet reageeren, maar door toedienen van een bepaalde stof tot reactie kunnen worden gebracht.

De vraag doet zich derhalve voor: Waarom reageeren die dwarsgestreepte en gladde spieren niet?

Wij hebben gemeend dat op deze vraag — althans voor wat betreft het gladde spierweefsel — drie antwoorden mogelijk zijn.

Ten eerste: de organen reageeren niet, omdat de stof, die het orgaan prikkelen moet niet in voldoende mate aanwezig is, óf

ten tweede: de organen reageeren niet, omdat hun gevoeligheid voor de — eventueel in normale hoeveelheid aanwezige — stof is verminderd, óf

ten derde: de gevoeligheid der organen is normaal, de prikkelende stoffen zijn in voldoende mate aanwezig, maar er ontbreken in het lichaam der dieren bepaalde (colloide) stoffen, die de inwerking van de prikkelende stoffen op de organen moeten mogelijk maken of vergemakkelijken.

Een aanwijzing, dat invloeden op de gevoeligheid van glad spierweefsel bij de verschijnselen van avitaminosen een rol zouden kunnen

spelen wordt gevonden in een mededeeling van UHLMANN[1]), die aantoonde, dat in een vitamine-praeparaat, het orypan, een stof voorkomt, die op glad spierweefsel een werking uitoefent welke met die van pilocarpine overeenkomt.

VERZÁR en BÖGEL hadden — zonder UHLMANN's onderzoekingen te kennen — den invloed van extracten, die zeker fat soluble *A* of water soluble *B* moesten bevatten, onderzocht op verschillende overlevende organen en hadden slechts een zeer geringen invloed gevonden. Daar zij echter door uitwendige omstandigheden bij het verrichten van dit onderzoek niet in staat waren om de „vitaminen"-eigenschappen van hun extracten tevens te onderzoeken en waar zij bovendien zeker andere extracten hebben onderzocht dan UHLMANN, wordt door hun onderzoekingen het onderzoek van UHLMANN niet te niet gedaan.

Wij meenen dat, alsvorens het mogelijk is een nader inzicht in de werking der vitaminen te krijgen en alvorens het mogelijk is om het belang van de door UHLMANN e.a. gedane waarnemingen te kunnen beoordeelen, het noodig is om tusschen de drie boven genoemde mogelijkheden te beslissen.

Dat was de reden, dat wij een onderzoek hebben verricht, waarin werd nagegaan of de in de tweede vraag geopperde veronderstelling juist was, of dus bij dieren, die lijden aan avitaminosen een verminderde of althans een veranderde reactie op vergiften kon worden aangetoond. Het spreekt vanzelf, dat indien op deze wijze een veranderde reactie was gevonden nog had moeten worden beslist of deze veranderde reactie berust op een verandering in de gevoeligheid der organen (vergelijk sub 2) dan wel afhankelijk zou blijken te zijn van de onder „ten derde" geopperde mogelijkheid.

Wij hebben ons onderzoek verricht bij kippen en bij katten.

De kippen werden gedurende eenige weken gevoerd met gepelde rijst. Zooals bekend is eten deze dieren gepelde rijst in het begin met graagte, langzamerhand vermindert echter hun eetlust en weigeren zij meestal dit voedsel: dan werden de dieren „geslopt". Hun reactie op vergiften werd in deze proeven niet onderzocht voor zij zeer uitgesproken verschijnselen van polyneuritis vertoonden, sommige dieren waren bij het onderzoek reeds moribund. Wij brachten de dieren in lichte narcose, registreerden den bloedsdruk en bepaalden de gevoeligheid voor adrenaline, choline en histamine bij intraveneuze injectie; tevens werd nagegaan bij welke sterkte van den electrischen stroom de vagusprikkeling een duidelijke verlaging van den bloeds-

[1]) FR. UHLMANN. Beiträge zur Pharmakologie der Vitamine. Habilitationsschrift.

druk gaf en daarna werd onderzocht hoeveel atropine noodig was om dezen invloed van den vagus op den bloedsdruk te niet te doen. Wanneer na afloop van het bloedsdruk-experiment het dier kon worden gedood werd de darm en in sommige gevallen ook de oesophagus uit het lichaam verwijderd, in Tyrode-vloeistof gebracht en daarna op denzelfden of op den daarop volgenden dag onderzocht de gevoeligheid van den overlevenden darm voor pilocarpine, voor atropine, later ook voor choline en histamine.

Aangezien wij de gevoeligheid van normale kippen voor de boven genoemde vergiften niet kenden hebben wij eerst vooraf laten gaan een onderzoek bij vier normale kippen.

Bij de katten, die wij in onderzoek namen, (vier) werd een avitaminose te voorschijn geroepen door de dieren weken lang te voeren met vleesch, dat was bereid op een wijze zooals door VOEGTLIN [1]) is beschreven. De dieren werden hiertoe gevoerd uitsluitend met vleesch, dat na van vet te zijn ontdaan en alcalisch te zijn gemaakt gedurende drie uur op 120° in de autoclave was verhit. Dit vleesch werd indien het door toevoeging van zuur geneutraliseerd was door de katten goed gegeten.

Bij de katten was een bizonder onderzoek naar de reactie van normale dieren niet noodig, omdat wij hieromtrent over voldoende eigen laboratorium-ervaring beschikten.

Wij vestigen er echter de aandacht op, dat hoewel de verschijnselen, die zich bij onze dieren voordeden zeker voor een groot deel, althans bij de kippen, afhankelijk waren van een gebrek aan het water soluble *B* in het voedsel niet enkel slechts afwezig was één enkel vitamine, maar dat zeker meerdere vitaminen ontbraken en tevens was er een te kort aan andere voedingsstoffen, maar dat deed voor ons onderzoek niets ter zake, daar het er ons slechts aan gelegen was eerst vast te stellen of „überhaupt" bij gebrek aan vitaminen een onderscheid in gevoeligheid was aan te toonen. Was dit onderzoek positief uitgevallen, dan had alsnog door ons moeten worden onderzocht welk vitamine daarbij een beslissende rol speelt; nu het onderzoek negatief was is een meer nauwkeurig onderzoek niet meer noodig.

De resultaten van ons onderzoek zullen elders uitvoerig worden gepubliceerd. Hier zij alleen vermeld, dat — tegen onze verwachting — de reactie bij de zieke dieren in geen enkel opzicht duidelijk afweek van die van de gezonde. Wel komen vrij groote individueele verschillen in gevoeligheid voor de door ons onderzochte vergiften

---

1) CARL VOEGTLIN and G. C. LAKE. Experimental Mammalian polineuritis produced by a deficient diet.

voor, maar deze waren bij de zieke dieren niet grooter dan bij normale.

Wanneer men aanneemt dat vele der automatische functies der gladde spieren, tot stand komen door chemische prikkels en wanneer men daar nevens waarneemt dat die functie van veel gladde spieren bij het aan avitaminose lijdende dier heeft geleden, dan wordt men door het resultaat onzer onderzoekingen wel gedwongen om aan te nemen, dat vermoedelijk bij deze zieke dieren een tekort aan prikkelende stoffen bestaat en dat de stoornis dus *niet* gezeteld is in het receptieve orgaan en dat evenmin een gebrek aan (colloidale) stoffen, die de werking van vergiften bevorderen, de oorzaak voor de geringe reactie is.

Boven is reeds erop gewezen dat UHLMANN aangetoond heeft, dat een door hem onderzocht vitamine-praeparaat, het orypan, pharmacologisch een werking heeft, die met pilocarpine overeenkomt. Door deze vondst wordt de hypothese mogelijk, dat bij de avitaminosen een verminderde functie van vele organen veroorzaakt wordt door een te kort aan een stof, die een bestanddeel van het „orypan" zou uitmaken. Wij meenen, dat dit vraagstuk nog niet rijp voor oplossing is, er zijn nog te weinig positieve feiten bekend. Wij zouden er alleen op willen wijzen, dat de bovengenoemde hypothese door de resultaten van ons onderzoek zou kunnen worden gesteund.

CONCLUSIE.

Wanneer bij kippen door het voeren met gepelde rijst of bij katten door het voeren met op speciale wijze bereid vleesch een avitaminose is te weeg gebracht is de gevoeligheid der dieren voor adrenaline, histamine, choline en atropine en de gevoeligheid der overlevende organen van die dieren voor histamine, pilocarpine, atropine en choline niet veranderd.

In twee proeven bleek, dat de darm van kippen, welke aan avitaminose lijden op atropine (in dozen van 0,001 tot 1 mg. toegevoegd aan 75 ccm. Tyrode) geen remming vertoonden, zij maakten trouwens ook slechts zwakke spontane bewegingen. Op den darm van normale kippen werd een zeer duidelijke remming door atropine verkregen. Ook dit zou, gezien de ervaringen van LE HEUX, over den invloed van choline op de remmende of prikkelende werking van atropine op den darm, pleiten voor de opvatting, dat bij met gepelde rijst gevoerde kippen een prikkelende stof in den darm ontbreekt.

Geologie. — De Heer MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan van den Heer H. A. BROUWER: „*Samenstelling en insluitsels van de lavaprop van den Galoenggoeng*". (West-Java).

(Mede aangeboden door den Heer WICHMANN).

Tijdens een eruptie van den Galoenggoeng, die begon den 18den Juli 1918 en die slechts een geringen aschval veroorzaakte, werd in den krater een lavaprop gevormd, die op 20 Juli een klein eilandje vormde in het kratermeer [1]) en daarna geleidelijk is gegroeid totdat het geheele kratermeer was verdwenen. Op 11 Aug. was nog slechts de meerboezem aan het N.W. deel van den Warirang-krater voorhanden [2]).

Tijdens een bezoek aan den Galoenggoengkrater in 1919 werd door Dr. W. VAN BEMMELEN op mijn verzoek gezocht naar insluitsels in de gesteenten der propmassa, ten einde na te kunnen gaan of zich hier soortgelijke kristallisaties in het magma onder den krater hadden afgespeeld als reeds door mij bij de prop van den vulkaan Roeang (Sangi-eilanden) waren bestudeerd [3]). De mij door tusschenkomst van het Hoofdbureau van het Mijnwezen toegezonden collectie omvat talrijke monsters lava der propmassa met fijnkristallijne tot grofkorrelige homoeogene insluitsels, welke hieronder nader zullen worden beschreven.

De lava der prop.

Alle onderzochte monsters zijn bruinroode poreuze hypersteenaugietandesieten met phenocristen van sterk zonaire plagioklazen, waarin afwisseling van, doorgaans zeer smalle, basische en zuurdere zones herhaaldelijk voorkomt, zoodat de randzone, ook bij sterk zonairen bouw, dikwijls slechts weinig zuurder is dan de kern; ook de opvolgende schalen verschillen slechts weinig in basiciteit. Karlsbader tweelingen komen voor, bij deze werd in sneden der symmetrische zone bepaald, dat de plagioklazen gemiddeld ongeveer

[1]) R. D. M. VERBEEK en R. FENNEMA. Geologische beschrijving van Java en Madoera. II blz 694 e.v.

[2]) B. G. ESCHER. De uitbarsting van den Goenoeng Galoenggoeng. De Taak 12 Oct. 1918 blz. 126—127 en Mededeeling namens B. G. ESCHER door G. A. F. MOLENGRAAFF. Versl. Geol. Sectie. Geol. Mijnb. Gen. II. Oct. 1919.

[3]) H. A. BROUWER. Kristallisatie en Resorptie in het magma van den vulkaan Roeang. Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Deel XXVIII, 1929. blz. 656 e.v.

de samenstelling hebben van bytowniet Ab_{26} Ah_{74}. Insluitsels, waaronder zulke van erts en van een glasrijke massa komen meestal slechts in geringe hoeveelheid voor; een zonaire rangschikking, waarbij ze in bepaalde zones zijn opgehoopt, is soms aanwezig. De hypersteen- en augietphenocristen zijn dikwijls gezamelijk en soms ook met plagioklaas- en grootere ertskristallen opgehoopt. Waar de pyroxenen aan grondmassa grenzen zijn ze doorgaans door een smalle ertszone omgeven, welke ontbreekt, waar ze met plagioklazen in contact zijn. Dit is blijkbaar een geringe chemische uitwisseling tusschen de phenocristen van pyroxeen en het nog vloeibare gedeelte van het omsluitende magma. In enkele monsters van de prop werd geresorbeerde bruine amphibool aangetroffen, we namen echter aan geen dezer amphibolen eigen kristalvorm waar en we meenen te mogen veronderstellen, dat het geen kristallen zijn, welke in de propmassa zelve zijn gevormd, maar dat het fragmenten zijn, welke door het opstijgende magma zijn meegevoerd. Het kunnen ten deele fragmenten zijn derzelfde kristallisatieproducten, waarvan de amphiboolrijke homoeogene insluitsels afkomstig zijn, die hieronder nader zullen worden beschreven.

De grondmassa van het propgesteente bestaat uit een glasrijke massa met plagioklaaslijstjes en korrels of skeletvormige individuen van erts, terwijl pyroxeen niet of slechts in geringe hoeveelheid in deze grondmassa is uitgekristalliseerd.

De insluitsels van het propgesteente.

Hieronder kunnen de volgende typen worden onderscheiden:

1. middenkorrelige, soms porphyrische insluitsels, bestaande uit plagioklaas en amphibool met, in geringe hoeveelheid tusschengeklemd, een min of meer ontglaasde massa.

2. midden- tot grofkorrelige insluitsels, bestaande uit plagioklaas, amphibool met weinig pyroxeen en soms wat olivyn. Glas komt ook in deze insluitsels voor.

3. midden- tot grofkorrelige soms porphyrische insluitsels met plagioklaas, (weinig olivyn), amphibool en veel augiet en hypersteen. De olivyn werd slechts in sommige insluitsels aangetroffen, erts komt soms in geringe hoeveelheid buiten de resorptieranden der amphibolen voor. De onderlinge hoeveelheid van amphibool, augiet en hypersteen is uiteraard wisselend. Alle insluitsels, waarin pyroxenen niet in zeer geringe hoeveelheid aanwezig zijn, zijn hier samengevat. Glas met mikrolieten werd slechts in enkele insluitsels en in zeer geringe hoeveelheid aangetroffen.

4. porphyrische insluitsels met phenocristen van plagioklaas in een fijnkristallijne grondmassa in twee generaties met plagioklaas,

pyroxeen en erts. Grootere pyroxeenkristallen komen in de insluitsels niet voor, maar zijn in een smalle randzone tegen de grens met het omsluitende gesteente opgehoopt.

5. fijnkorrelige insluitsels, bestaande uit plagioklaas, augiet, hypersteen en weinig erts. Glas met mikrolieten is in sommige monsters rijkelijk tusschen de overige mineralen aanwezig.

6. insluitsels van oudere andesieten, sommige amphiboolhoudend, andere vrij van amphibool.

De sub 1 *vermelde insluitsels* (Pl. fig. 1 en 2) zijn in de eerste plaats gekenmerkt door plagioklazen, welke zich onderscheiden van die der phenocristen van de omsluitende gesteenten, omdat de herhaalde afwisseling van basischer en zuurdere zones zoo goed als geheel ontbreekt. De dikwijls wel zonaire kristallen met een breede basische kern bestaan in hoofdzaak uit basischen bytowniet met zuurdere randzone.

De amphibool is sterk pleochroitisch van bruinrood tot lichtgeel en is steeds omgeven door een resorptierand, die in vele insluitsels slechts smal is en, waar de kristallen aan plagioklaas grenzen, somtijds geheel kan ontbreken, terwijl ze daar, waar de amphibool in contact is met de tusschengeklemde glasrijke massa met mikrolieten, duidelijk is ontwikkeld. Deze smalle resorptiezomen bestaan uit een zwarte ertsmassa. De amphibool is duidelijk ten deele later gekristalliseerd dan de plagioklazen, die er b.v. met idimorphe kristalbegrenzing in binnen dringen en dan het gedeelte van den amphiboolomtrek, waaraan ze grenzen, voor resorptie hebben behoed. In de insluitsels met sterker geresorbeerden amphibool komen totaal geresorbeerde kristallen, die slechts aan de kristalbegrenzing als oorspronkelijke amphibool herkend kunnen worden, voor. In de ten deele gespaarde kristallen bestaat de resorptierand uitsluitend uit een ertsmassa of uit een buitenste zone van erts, die van het onveranderde gedeelte van het kristal wordt gescheiden door een onregelmatig begrensde en soms ontbrekende pyroxeenrijke zone, waarmee soms nog onveranderde amphibool gemengd voorkomt. Buiten de resorptiezomen komt erts in grootere kristallen niet in de insluitsels voor.

Sommige der insluitsels met sterk geresorbeerde amphibolen vertoonen een porphyrische struktuur, doordat groote, min of meer idiomorphe, amphiboolkristallen liggen in een grondmassa, die bestaat uit plagioklaas. Tusschen deze kleinere plagioklaaskristallen ligt dan, evenals in de niet porphyrische insluitsels met grootere plagioklazen, de min of meer glasrijke massa geklemd, die somtijds in vrij aanzienlijke hoeveelheid aanwezig is. Plagioklaas-microlieten en ertsskeletten kunnen in deze laatste massa dikwijls duidelijk, pyroxeen-

mikrolieten slechts in gering aantal, worden herkend, de ontglazing is somtijds volkomen.

De begrenzing der insluitsels ten opzichte van de omsluitende lava is steeds zoodanig, dat de lava zich aan de vormen van het insluitsel heeft aangepast. De kristalvlakken der plagioklazen en amphibolen zijn aan den rand der insluitsels volkomen ontwikkeld en de grens met de lava heeft daardoor een onregelmatig verloop. Ook de tusschengeklemde glashoudende massa bewijst, dat de mineraalcombinatie nog niet volkomen was gekristalliseerd, toen ze in het omsluitende magma werd opgenomen, ze had dus nog een zekere bewegelijkheid en kan dus beschouwd worden als een bijna volledig gekristalliseerde korst op het magma, dat van grootere diepte tot effusie kwam en de propmassa heeft geleverd. De grondmassa van de lava der propmassa en de tusschengeklemde massa der insluitsels zijn dan ongeveer gelijktijdig gekristalliseerd.

De sub 2 *vermelde insluitsels* onderscheiden zich niet sterk van de hierboven beschrevene, alle zijn gekenmerkt door een gering pyroxeengehalte, terwijl olivyn bovendien in geringe hoeveelheid in eenige werd aangetroffen. De amphibolen zijn, door een smallen resorptiezoom omgeven, die zeer ertsrijk is en waarin pyroxeen (in hoofdzaak zeker augiet) bijgemengd voorkomt.

Ook aders met dergelijke samenstelling als de resorptiezoom dringen in de kristallen binnen, die grooter zijn dan die der overige mineralen, een hoekige begrenzing vertoonen en alle overige bestanddeelen geheel of ten deele kunnen omsluiten, ook den olivyn, wanneer die in de insluitsels voorkomt. De olivyn vertoont afgeronde vormen zonder duidelijke kristalbegrenzing en is in geringe mate in een ijzerrijke, bruinroode of zwarte, substantie veranderd. De tusschengeklemde glashoudende massa is rijk aan plagioklaaslijstjes en bevat ook veel pyroxeenmikrolieten. Het glas is zeer donker en het ontglaasde deel is blijkbaar ijzerrijk. erts is weinig in afzonderlijke korrels aanwezig.

De insluitsels met meer pyroxeen, welke sub 3 zijn vermeld (Pl. fig. 3), onderscheiden zich van de vorige in hoofdzaak door de afname van het amphibool- en de toename van het pyroxeengehalte. Verschillende strukturen komen voor. De pyroxeen (augiet en hypersteen beide) komt soms met enkele grootere amphibool- en plagioklaaskristallen voor in een fijner kristallijn mengsel, dat in hoofdzaak bestaat uit plagioklaas met weinig pyroxeen. De pyroxeen (vooral de augiet) vertoont dan soortgelijke skeletachtige strukturen als de amphibool, omsluit dan, evenals het laatstgenoemde mineraal, talrijke plagioklaaskristallen, welke ook met idiomorphe kristalbegren-

zing in de augieten binnendringen, zoodat deze dan een der laatste kristallisatieproducten van het insluitsel zijn. De kleinere plagioklazen zijn in verband daarmede geheel, de grootere nagenoeg geheel, vrij van ingesloten donkere mineralen. Het zijn deze insluitsels, die olivijn bevatten met afgeronde vormen en veelal door den amphibool omsloten. Een weinig ontglaasde, tusschengeklemde massa komt in geringe hoeveelheid voor.

In andere, soms eveneens olivijnhoudende, insluitsels, die overigens niet belangrijk van de overige afwijken, zijn de pyroxenen hoofdzakelijk tot de fijnkristallijne hoofdmassa van het insluitsel beperkt, terwijl slechts enkele grootere kristallen naast enkele van, gedeeltelijk geresorbeerden, amphibool en plagioklaas voorkomen. Een gedeelte der insluitsels van deze groep vertoont de normale middenkorrelige structuur zonder grootere kristallen en hier blijkt de latere kristallisatie van den amphibool, omdat deze in skeletachtige kristallen, welke den pyroxeen somtijds omsluiten, voorkomen. De verschillende resorptiestadien van den amphibool, welke reeds voor de sub 1 beschreven insluitsels zijn vermeld, werden ook hier aangetroffen. Olivijn werd in de onderzochte monsters dezer middenkorrelige insluitsels niet aangetroffen.

De sub 4 *vermelde insluitsels*, welke slechts in enkele exemplaren werden aangetroffen, zijn evenals de sub 3 vermelde vrij van amphibool. Ze zijn gekenmerkt door een eigenaardige struktuur, waarbij n.l. groote plagioklaas-phenocristen liggen in een grondmassa, bestaande uit kleinere plagioklaas-, weinig erts- en zeer weinig augieten hypersteenkristallen, welke zelve op hun beurt liggen in een fijnkristallijn mengsel derzelfde mineralen, waarvan de bestanddeelen — behalve de kleine plagioklazen — in groote hoeveelheid als insluitsels voorkomen in de plagioklazen der eerste en tweede generatie (Pl. fig. 4). Zonaire bouw komt bij deze plagioklazen niet of slechts in geringe mate en zonder afwisseling van basische en zuurdere zones voor, waardoor ze zich onderscheiden van die der omsluitende lava. De fijnkristallijne grondmassa ontbreekt zoo goed als geheel in een smalle randzone van het insluitsel, waar dit aan de omsluitende lava grenst. Hier zien we een mengsel van plagioklaas, zooals ze overal in het insluitsel als phenocristen der kleine soort voorkomen, met de augiet-, hypersteen- en ertskristallen, welke slechts in geringe hoeveelheid in de centrale deelen der insluitsels als kleine phenocristen aanwezig zijn Pyroxeen en erts zijn dus in de randzone opgehoopt. De boven beschreven structuren wijzen er op, dat de kristallisatie der insluitsels *grootendeels nog moest plaats hebben*, toen ze reeds in de omsluitende lava waren opgenomen. In een eerste periode zijn de plagio-

klazen, pyroxenen en ertskristallen der tweede generatie gekristalliseerd, waarvan de beide laatste zich in de randzone van het insluitsel hebben opgehoopt. Dat de kristallisatie der plagioklazen hier het eerste was geeindigd, bewijst de idiomorphe begrenzing der kristallen ten opzichte van de pyroxenen in de randzone en de omsluiting van plagioklaas door pyroxeen, welke hier dikwijls voorkomt. In de centrale deelen zien we dat de kristallisatie van het erts en de pyroxeen der fijnkristallijne grondmassa reeds was begonnen tijdens de kristallisatie der plagioklazen, waarvan er sommige tot grootere phenocristen zijn doorgegroeid. Daarna volgde de slotkristallisatie der fijnkristallijne grondmassa, waarin de plagioklaas in afgeronde vormen voorkomt, hetgeen wijst op een ongeveer gelijktijdige kristallisatie met den pyroxeen. De plagioklazen der randzone zijn arm aan of vrij van insluitsels en schijnen dus eerder te zijn gekristalliseerd, dan die der centrale deelen van het insluitsel of de kristallisatie der fijnkristallijne grondmassa heeft in de randzone minder en later plaats gehad, ze is daar dan ook slechts in geringe hoeveelheid aanwezig. De begrenzing van het insluitsel en de omsluitende lava, waarvan de laatste zich aan de vormen de kristallen in het eerste heeft aangepast, bewijst bovendien, dat het insluitsel niet in vasten toestand in de diepte is losgerukt, maar dat het als een, slechts gedeeltelijk, misschien zeer weinig gekristalliseerde massa in de omsluitende lava is opgenomen. Glas ontbreekt in deze insluitsels geheel.

De insluitsels van de sub 5 *vermelde soort* bestaan uit plagioklaas, augiet en hypersteen met enkele ertskristallen, waartusschen in wisselende hoeveelheid de overgebleven ruimten worden opgevuld door een, ten deele ontglaasde, donkere substantie, waartegen veldspaatmicrolieten duidelijk afsteken. De plagioklazen en pyroxenen vertoonen, vooral de eerste, meestal idiomorphe begrenzing, de plagioklaas vertoont in tegenstelling met die der tot nu toe beschreven insluitsels den zonairen bouw met herhaalde afwisseling van zuurdere en basische zones, zooals die van de phenocristen in de omsluitende lava der propmassa vermeld zijn.

De insluitsels van oudere andesieten, welke sub 6 zijn vermeld, vertoonen verschillen, wat mineralogische samenstelling en struktuur betreft. In sommige komen plagioklaasphenocristen in gering aantal voor in een heldere grondmassa, bestaande uit plagioklaas en pyroxeen met erts.

In andere werd amphibool waargenomen, soms als phenocrist in soortgelijke gesteenten als de bovengenoemde, soms in aureolen om ertskristallen, welke met plagioklaas porphyrisch in een donkere

glashoudende grondmassa voorkomen. Dikwijls wisselt het mikroskopische beeld sterk, o.a. wat het ertsgehalte en wat de kleur der grondmassa betreft en de gesteenten maken den indruk van door contactmetamorphose te zijn veranderd, waarbij omkristallisaties hebben plaats gegrepen. De porphyrische plagioklazen zijn sterk aangevreten door het heldere mengsel waaruit de tegenwoordige grondmassa bestaat en we veronderstellen dat dan de grondmassa geheel, de phenocristen slechts in hun randzone zijn omgekristalliseerd. De aureolen van amphiboolzuiltjes in erstkristallen in een ten deele ontglaasde grondmassa kunnen worden verklaard, indien we aannemen. dat hier juist het omgekeerde heeft plaats gegrepen als bij de resorptie van amphibool. Het omsloten en opnieuw verhitte andesietfragment heeft gedurende eenigen tijd onder temperatuur- en drukverhoudingen verkeerd, waarbij amphibool stabiel is, die zich toen uit dezelfde bestanddeelen, die anders de resorptieranden opbouwen, heeft gevormd.

De verschillende kristallisaties in het Galoenggoeng magma.

De begrenzing der homoeogene insluitsels ten opzichte van de omsluitende lava bewijst dat de eerstgenoemde nog niet volkomen waren gekristalliseerd, toen ze in de lava werden opgenomen. Het restmagna is als een glashoudende massa met mikrolieten gekristalliseerd, evenals de grondmassa der omsluitende gesteenten.

Dat in vele insluitsels de amphibolen een resorptierand vertoonen, waar ze aan de genoemde glashoudende massa grenzen, wijst er op dat de amphibool stabiel bleef tot aan het tijdstip der eruptie van de lavaprop. Toen nam de druk in lava en insluitsels snel af, waardoor de amphibool instabiel werd en augiet ten koste ervan kon kristalliseeren gedurende den tijd, waarin de temperatuur van het restmagma daalde en nog geen volledige stolling had plaats gehad. Voor verschillende gedeelten der propmassa kan deze tijd korter of langer hebben geduurd, vandaar de verschillende sterkte der resorptie bij amphibolen van verschillende insluitsels.

We hebben reeds voor de verklaring der mineralogische verschillen tusschen insluitsels en lava der propmassa van den Roeang [1]) aangenomen, dat tijdens de eruptie van den vulkaan het tot effusie komende magma fragmenten van zijn geheel of grootendeels gestolde dioritische korst omsloot en hetzelfde geldt voor prop en insluitsels van den Galoenggoeng. Ter verklaring van het voorkomen van pyroxeenarme en pyroxeenrijke amphiboolhoudende insluitsels kunnen we aannemen, dat deze afkomstig zijn van zones op verschillende diepte

[1]) H. A. BROUWER. Kristallisatie etc. loc. cit. blz. 665.

in deze korst, waarbij de verschillen in druk en temperatuur dezer zones bewerkt hebben, dat de stolling òf geheel in het stabiliteitsgebied van den amphibool òf eerst in dat van pyroxeen en eerst later bij verdere afkoeling in dat van den amphibool heeft plaats gehad [1]). De pyroxeenhoudende insluitsels zijn dan afkomstig van diepere zones, naarmate ze pyroxeenrijker zijn, terwijl op grootere diepte in het tot effusie komende magma, bij de toen daar heerschende hoogere temperatuur, veel minder kristallijne bestanddeelen en slechts pyroxenen, maar geen amphibool als phenocristen voorkomen.

De hierboven beschreven amphiboolvrije insluitsels met verschillende strukturen kunnen ten deele reeds vóór de eruptie op groote diepte, dus boven temperaturen, waarbij de amphibool stabiel is, zijn gekristalliseerd, terwijl de volledige kristallisatie dan heeft plaats gehad nadat de eruptie was begonnen, toen de amphibool in verband met de plotseling gewijzigde druk- en temperatuurverhoudingen evenmin stabiel was. Een deel dezer insluitsels kan ook geheel bij een druk beneden dien van het stabiliteitsgebied van den amphibool zijn gevormd en b.v. tot langzamer afgekoelde gedeelten van het magma behooren, die langs de wanden der kraterpijp meer volkomen konden kristalliseeren en eerst daarna door het uitvloeiende magma werden meegevoerd.

[1]) F. BECKE. Gesteine des Columbretes. Anhang. Tscherm. Min. u. Petrogr. Mitt. XVI. 1897. blz. 327 e.v.

Plantkunde. De Heer WENT biedt een mededeeling aan van Mejuffrouw A. F. C. VAN DISHOECK: *„Gevoeligheid voor licht van + en — stammen van Phycomyces nitens"*.

(Mede aangeboden door den Heer MOLL).

Bij het herhalen van de proeven van BLAAUW over phototropie bij Phycomyces, kreeg ik te mijner beschikking Phycomyces nitens en wel de + en — stam, afkomstig van het Centraal bureau voor schimmelculturen te Amsterdam. Daar in het werk, waar deze proeven beschreven zijn [1]), niet wordt aangegeven met welken vorm gewerkt werd, besloot ik beide te gebruiken. Ik begon met den + vorm en kweekte dien op broodpap, geheel zooals het door BLAAUW beschreven is. De proeven werden genomen in de donkere kamer in de kas bij een temp. van 20° C. De sporangiëndragers waren 2 dagen oud en 2—3 cM. lang. Als lichtbron diende een electrische draadlamp buiten de donkere kamer van 23 MK sterkte. De potjes kwamen steeds op 1 M. afstand te staan.

Ik begon nu met lage belichtingstijden en klom op tot 2 minuten waarbij nog geen spoor van reactie optrad. Pas bij 3 min. belichting werd na 50 minuten een zwakke positieve kromming zichtbaar. Nu gebruikte ik den — vorm en kreeg bij 35 secunden belichting na 10 minuten al een positieve kromming.

Bij doorbelichting reageerde de + vorm na 48 minuten, de — vorm al na 10 minuten.

Dat er dus een physiologisch verschil bestaat tusschen de beide vormen was duidelijk.

Ik ging nu de reactie na bij verschillende belichtingstijden en geef daarvan de bijgaande tabellen.

Hieruit blijkt, dat er een physiologisch verschil bestaat tusschen den + en — vorm van Phycomyces nitens, wat betreft het reageeren op eenzijdig invallend licht. Zeer duidelijk was dit ook te zien aan een doos, waarin ik den + en — vorm elk aan een kant geënt had om zygosporenvorming te verkrijgen. De doos stond in een lokaal, waar eenzijdig licht inviel. De sporangiëndragers van den — vorm lagen bijna op den bodem naar den lichtkant gestrekt, die van den + vorm waren slechts weinig naar 't licht gebogen.

[1]) BLAAUW 1909. Rec. trav. bot. néerl. 5.

TABEL I.

Phycomyces nitens +

Belichtingstijd in min.	Aantal M. K. S.	Aantal exemplaren.	Kromming na:	Aantal gekromden en aard der kromming.
10	13800	6	20 min.	1 +
			30 „	2 +
			105 „	3 +
9	12420	8	20 „	3 +
			45 „	5 +
			55 „	4 + 1 −
			65 „	3 + 1 recht 1 −
			75 „	4 + 1 recht 2 −
8	11040	8	16 „	1 +
			21 „	2 +
			40 „	2 + 2 −
			60 „	2 + 4 −
			65 „	2 + 5 −
			70 „	1 + 7 −
			180 „	2 recht 6 −
7	9660	6	50 „	1 + 1 −
			70 „	1 + 1 recht 1 −
			80 „	2 recht 1 −
6	8280	7	25 „	2 +
			45 „	1 + 2 recht
			60 „	2 + 3 recht
			70 „	1 + 5 recht
5	6900	4	30 „	1 +
			45 „	1 + 1 −
			60 „	1 recht 2 −
			100 „	3 −
4	5520	10	20 „	1 +
			30 „	2 +
			45 „	4 + 1 −
			90 „	2 + 3 −
3	4140	8	50 „	2 + zwak
			40 „	2 + „
2½	3450	4	geen reactie	
1	1380	5	„ „	
45 sec.	1035	2	„ „	
Doorbelicht		2	48 „	1 +
			85 „	1 +

TABEL II.
Phycomyces nitens —

Belichtingstijd in sec.	Aantal M. K. S.	Aantal exemplaren.	Kromming na:	Aantal gekromden en aard der kromming.
60	1380	3	40 min.	3 +
55	1265	5	20 "	3 +
			30 "	4 +
			35 "	5 +
50	1150	10	10 "	1 +
			20 "	2 +
			30 "	5 +
50	1150	4	10 "	1 +
			17 "	2 +
			22 "	4 +
45	1035	5	16 "	1 +
			35 "	3 +
			60 "	4 +
40	920	8	12 "	2 +
			25 "	3 + 1 recht
			60 "	5 + 1 recht
			75 "	5 + 2 recht
40	920	8	18 "	2 +
			20 "	3 +
			25 "	6 +
			45 "	7 +
40	920	6	15 "	2 +
			21 "	4 +
			25 "	5 +
35	805	2	11 "	1 +
			42 "	1 recht
Doorbelicht		4	10 "	3 +
			14 "	4 +

Waar in de tabellen in kolom 5 recht of — wordt opgegeven, gingen altijd eerst positieve krommingen vooraf.

Wanneer men voor phototropische, of in het algemeen voor belichtingsproeven, Phycomyces nitens wil gebruiken, is het dus niet onverschillig met welken vorm men werkt.

Botanisch Laboratorium.

Utrecht, Nov. 1920.

Natuurkunde. — De Heer WERTHEIM SALOMONSON doet eene mededeeling: *„Het mechanisme van den automatischen stroomonderbreker"*.

De werking van den automatischen stroomverbreker, waartoe de automatische stemvorkonderbreker van HELMHOLTZ, de hamer van NEEFF-WAGNER en de gewone electrische schel behoort, biedt nog enkele vraagpunten aan. Lord RAYLEIGH is wel de eerste geweest die een verklaring van de werking gegeven heeft, zonder daarbij op bijzonderheden in te gaan. Later is door LIPPMANN, DVORAK, GUILLET, BOUASSE e. a. het mechanisme nader besproken, waarbij echter andere gezichtspunten dan die van RAYLEIGH niet naar voren gebracht zijn.

Hieronder mogen enkele beschouwingen over dit onderwerp volgen, welke in hoofdzaak gegrond zijn op een onderzoek van de aantrekking die door den electromagneet op het anker wordt uitgeoefend tijdens de werking van een dusdanig apparaat. Als maatstaf werd daarbij aangenomen het aantal krachtlijnen dat door het anker verloopt. De meting geschiedde door een directe oscillographische registreering van het aantal krachtlijnen op ieder oogenblik. De oscillographische opteekening zou hebben kunnen geschieden met een rheograaf van ABRAHAM, dien ik echter niet tot mijn beschikking had. Ik heb daarom gebruik gemaakt van de methode die door DEGUISNE (Phys. Zeitschr. 1910, p. 513) aangegeven is, waarvan ik echter de resultaten heb gecontroleerd door een nieuwe methode, die als aanhangsel aan mijne mededeeling wordt beschreven.

De onderbreker dien ik onderzocht, bezit een electromagneet met in de lengte doorboorde en opengezaagde poolstukken, van 5 cm. lengte en 1 cm. doorsnede welke op een afstand van 3.2 cm. in een juk van 1.4 cm² doorsnede geschroefd zijn en elk met 200 windingen van 1.2 Ohm weerstand ieder omwikkeld zijn. De windingen zijn in serie geschakeld. Het anker van 1.2 cm. breedte, 0.75 cm. dikte en 4.4 cm. lengte is aan een stalen veer van 1 cm. breedte en 1.2 millimeter dikte geschroefd. Bij een veerlengte van 1.3 cm. maakt het anker, dat aan het vrije einde nog een koperen staafje draagt, waarop desgewenscht een gewichtje kan worden vastgeschroefd, ongeveer 47 trillingen per seconde. Het platina contact is gewoonlijk zoo ingesteld dat juist gedurende een halve periode

de stroom gesloten is. Het anker is nog omwikkeld met 40 windingen koperdraad waarvan de uiteinden door een paar wijde spiraalwindingen met twee vaste klemschroeven in verbinding staan, op zoodanige wijze dat de beweging van het anker daardoor niet belemmerd wordt. Wordt de onderbreker in werking gesteld door twee accumulatoren onder omschakeling van 1 Ohm, dan maakt het anker schommelingen van groote amplitude, waarbij de som der afstanden van de poolstukken tot het anker wisselt van ongeveer 2 millimeter tot 7.6 millimeter. In rust is de som dier afstanden 4.8 millimeter. De zelfinductie-coefficient van den electromagneet is natuurlijk niet constant. De gemiddelde waarde tijdens de stroomsluitingsperiode bedraagt 9.3 millihenry.

Tijdens de werking van den onderbreker werden oscillogrammen gemaakt van den stroom door den electromagneet en tegelijkertijd werd het aantal krachtlijnen in het anker geregistreerd. Het eerste geschiedde met den oscillograaf van DUDDELL, het tweede hetzij met een oscillograaf van SIEMENS en HALSKE hetzij met den snaargalvanometer. Bovendien werd nauwkeurig de tijd geregistreerd. Op deze wijze werd de bijgaande curve verkregen fig. 1 (ongeveer 2 $^1/_2$ malige vergrooting van het oorspronkelijke negatief).

De beschouwing van deze curve geeft tot verschillende opmerkingen aanleiding. Wij kunnen een volledige periode in 4 deelen scheiden (zie fig. 2): de eerste twee kwartperioden beantwoorden aan de sluitingsperiode, de twee laatste aan de openingsperiode. Verder is gedurende de 2de en 3de kwartperiode de beweging van het anker naar de poolstukken toe gericht, terwijl in de 4de en 1ste kwartperiode de beweging van het anker juist in tegengestelden zin plaats heeft.

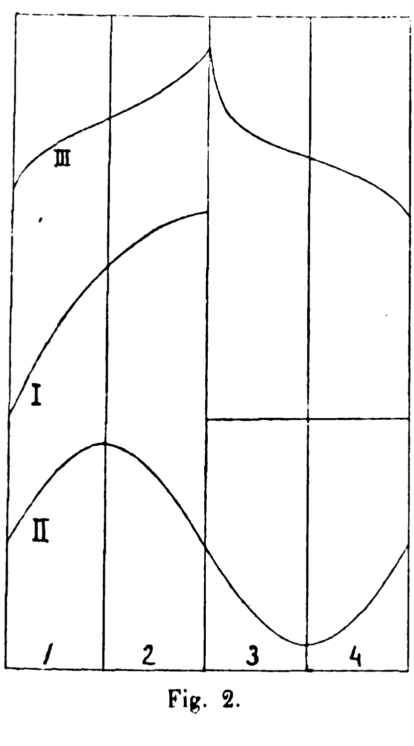


Fig. 2.

Wij mogen nu op den voorgrond stellen dat het aantal krachtlijnen door het anker inderdaad een maatstaf is voor de aantrekkende werking die erop uitgeoefend wordt — dat zelfs deze laatste ten naaste bij evenredig is met het kwadraat van het aantal krachtlijnen.

De curven geven nu met duidelijkheid aan dat de aantrekkende

werking in de tweede kwartperiode belangrijk grooter is dan die welke in de eerste kwartperiode werd uitgeoefend. Dit feit werd reeds door RAYLEIGH op den voorgrond gesteld en vormt de basis van alle mededeelingen over dit onderwerp. Doch tevens blijkt het dat tijdens de 3de kwartperiode, dus na stroomopening nog een krachtige aantrekking wordt uitgeoefend, die belangrijk grooter is dan die welke in de 4de kwartperiode de beweging van het anker tegenhoudt. En laat ik dadelijk hier bijvoegen, dat ook bij gewijzigde verhoudingen van stroomsterkte, slingerduur enz. deze toestand steeds blijft bestaan. Wij mogen dus zeggen dat tijdens de geheele beweging van het anker naar den magneet toe de aantrekking belangrijk grooter is dan gedurende de geheele beweging in omgekeerden zin. Verder volgt hieruit ook onmiddellijk dat het door RAYLEIGH voorgestelde middel om de werking van den onderbreker te verbeteren door een phasevertraging voor de stroomsluiting ten opzichte van de ankerbeweging in te voeren, van twijfelachtig nut zou zijn, ja vermoedelijk zelfs nadeel zou veroorzaken.

De vraag doet zich nu voor of wij het verloop van de curve der krachtlijnen verklaren kunnen. Voor het opstijgende deel der curve kunnen wij dat bevestigen. Hier is het mogelijk om zelfs met een zekere mate van nauwkeurigheid het verloop te berekenen. Wij nemen daartoe aan dat de zelfinductie-coefficient van den stroomkring althans gedurende de sluitingsperiode constant is. Gebruik makende van de bekende formule van HELMHOLTZ $I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ laat zich dan de stroomsterkte op ieder oogenblik berekenen. Kennen wij deze eenmaal, dan kan weder bij benadering het aantal krachtlijnen in het anker berekend worden, althans indien wij aannemen, dat de magnetiseering gelijken tred houdt met de magnetiseerende kracht. Feitelijk toch is de magnetische weerstand in den magnetischen kring gevormd door electromagneet, anker en luchtweg overwegend te zoeken in den luchtweg. Bij de geringe magnetiseerende krachten is de permeabiliteit van het ijzer zoo groot dat deze benadering alleszins geoorloofd is. Nemen wij als toelichting het einde van de sluitingsperiode. Op dat oogenblik bedraagt de stroomsterkte volgens de formule 1.13 ampère, in werkelijkheid 1.17 ampère zoodat de magnetomotorische kracht $0.4\,\pi \times 400 \times 1.17 = 590$ bedraagt. De luchtweg is 0,48 cm. lang, zoodat dus $590 : 0.48 = 1225$ krachtlijnen per cm^2 daar door zouden gaan. Deze lijnen komen uit de polen die 0.7 cm^2 doorsnede hebben. In het ijzer is dus de dichtheid hoogstens 1750 per cm^2. Bij een dergelijke magnetiseering is de permeabiliteit van het ijzer μ van de grootte orde van 3000, waaruit

dus volgt, dat het aantal windingen benoodigd om bij $I = 1.17$ ampère en $\mu = 3000$ door een ijzerweg van 16.4 cm. lengte en 0.7 cm. doorsnede 1225 krachtlijnen te drijven minder dan 5 bedraagt.

Bij de verwaarloozing van den ijzerweg maken wij slechts een fout van ongeveer 1 %.

Wij gebruiken nu deze methode om op ieder oogenblik der sluitingsperiode het aantal krachtlijnen te berekenen. Het anker beweegt zich zoodanig dat de luchtweg periodisch kleiner en grooter wordt en wel ongeveer volgens de formule $a + b \sin 2\pi nt$. Wij krijgen dus als benaderde waarde voor het aantal krachtlijnen op ieder oogenblik

$$B = \frac{0.4\pi N \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}{a + b \sin 2\pi nt} \quad \text{voor } 0 < t < {}^1/_2\,\pi$$

waarin N het aantal windingen, E de batterijspanning, R de weerstand, L de zelfinductie (gemiddeld), n het aantal onderbrekingen per seconde, a de gemiddelde lengte van den luchtweg en b de halve amplitude van het anker voorstelt. Stellen wij nu hierin de hierboven reeds gegeven waarden voor de verschillende constanten, dan geeft fig. 3 een graphische voorstelling van het berekende resultaat

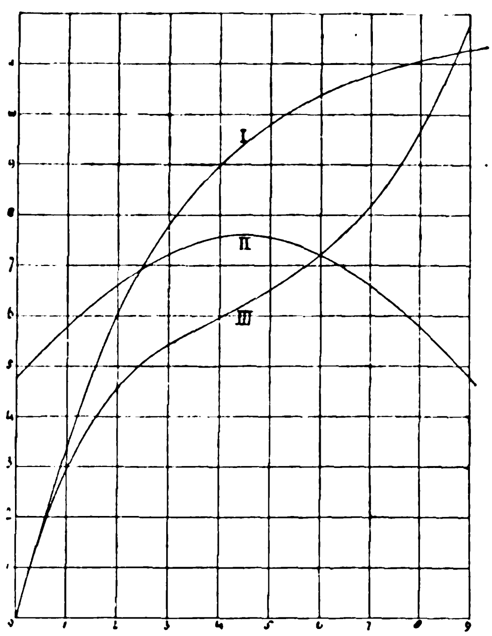


Fig. 3.

nl. curve 1 geeft de stroomsterkte, curve 2 de lengte van den luchtweg, curve 3 het aantal krachtlijnen aan gedurende de sluitingsperiode.

Wij zien dat in het algemeen de berekende curve reeds een vrij goede overeenstemming vertoont met de geregistreerde curve. Intusschen stijgt de eerste in den beginne sneller dan de tweede, terwijl de laatste ook op het einde ietwat afwijkt. Hiervoor bestaat een goede reden. Hadden wij de stroomsterkte berekend terwijl in aanmerking genomen was, dat de zelfinductie eerst groot, vervolgens kleiner en eindelijk weer grooter werd, dan zou hiermede reeds een beter resultaat bereikt zijn, wat de numerische overeenstemming betreft: voor de verklaring van de zaak doet dit echter niets af.

Het afdalende deel van de curve, dat de twee laatste kwartperioden (de 3^de^ en de 4^de^) omvat geeft de verhoudingen tijdens de stroomverbreking weer. Hier schijnt mij een quantitatieve verklaring nog niet mogelijk, alhoewel een qualitatieve wel mogelijk is. Het is namelijk bekend dat een electromagneet des te langer zijn magnetisme behoudt nadat de stroom verbroken is, naarmate de ijzerweg minder magnetische weerstand bezit. In het begin van de periode van stroomverbreking is de luchtweg vrij groot, dus ook de reluctance en de snelheid waarmede het magnetisme vermindert. Bij de nadering van het anker wordt echter de magnetische weerstand voortdurend kleiner, bijgevolg daalt het magnetisme voortdurend langzamer. Op de grens van de 3^de^ en 4^de^ periode is de daling het langzaamst, daar het anker zoo dicht mogelijk tot de poolstukken genaderd is. Daarna gaat het anker zich verwijderen en bijgevolg gaat nu óok het magnetisme sneller dalen, totdat de dalingssnelheid op het einde der 4^de^ periode bijna even groot is als in het begin der 3^de^ periode. Uit den aard der zaak is de daling echter in het begin der derde periode het snelst, omdat op dat oogenblik de directe werking der ampèrewindingen verdwijnt.

Methode om het aantal krachtlijnen oscillographisch te registreeren.

Wenscht men het aantal krachtlijnen in een ijzerweg of een luchtweg oscillographisch te registreeren dan worden om het ijzer eenige geisoleerde koperen windingen gelegd, of wel men hangt een proefspoeltje in den luchtweg. Verandert het aantal krachtlijnen B, dan wordt in de windingen een electromotorische kracht opgewekt die wij gelijk kunnen stellen met $k\frac{dB}{dt}$ waarin k een proportionaliteitsfactor is. De uiteinden van het spoeltje worden in verbinding gebracht met een condensator van een capaciteit C. Deze ontvangt dan een lading $q = VC$ terwijl door den draad, welke een weerstand r heeft, een stroom i vloeit (fig. 4).

Nu is

$$i = -\frac{dq}{dt} \quad \text{en} \quad k\frac{dB}{dt} + ri = V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Substitutie geeft:

$$k\frac{dB}{dt} = rC\frac{dV}{dt} + V$$

en als wij $\frac{rC}{k} = A$ stellen:

$$\frac{dB}{dt} = A\left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{rC}V\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

en na integratie:

$$B = AV + \frac{A}{rC}\int_0 V\,dt + Konst. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

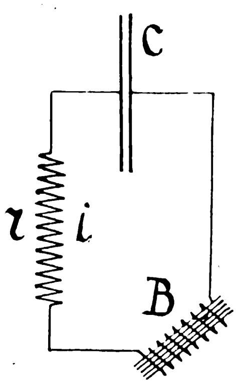


Fig. 4.

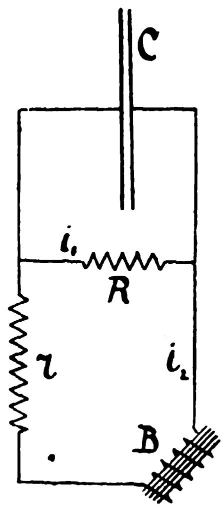


Fig. 5.

Voor het geval dat in (2) de uitdrukking $\frac{1}{rC}V$ mag worden verwaarloosd tegenover $\frac{dV}{dt}$, geeft dus de grootte van V ons een maat van het aantal krachtlijnen. Nu kan in het algemeen de grootte van V op ieder oogenblik moeilijk door genoegzaam snel aanwijzende electrometers gemeten worden. Wij dienen dus een stroomaanwijzend instrument daarvoor te gebruiken dat aan de klemmen van C aangelegd wordt. Wij krijgen nu bovenstaand schema, fig. 5, en de differentiaalvergelijkingen worden:

$$-\frac{dq}{dt} = i_1 + i_2 \quad \text{en} \quad k\frac{dB}{dt} + ri_1 = Ri_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waaruit wij i_1 elimineeren. Wij krijgen dan

$$\frac{dB}{dt} = A \left\{ \frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{rC} \right) V \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

waarin $A = \frac{rC}{k}$.

Integratie geeft:

$$B = AV + A \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{rC} \right) \int V\, dt + Konst. \quad . \; . \; . \; . \; (6)$$

Ook nu bestaat een lineaire betrekking tusschen B en V indien wij het integraal van (6) mogen verwaarloozen. Dit laatste nu zal het geval zijn wanneer RC en rC beide zeer groot zijn, en wanneer het periodenaantal per seconde groot genoeg is.

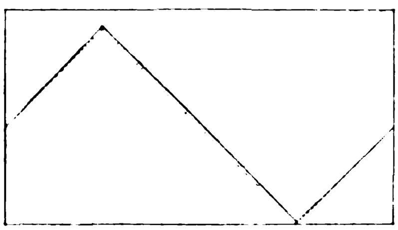


Fig. 6.

Bij een periodische wisseling van B, die eventueel door een reeks van Fourier kan worden voorgesteld, is de waarde van de integraal over één periode $= 0$. Wij hebben dus alleen te onderzoeken of de integraal tijdens elke periode verwaarloosd mag worden.

Bij een periodische snelheid van ongeveer 50 per seconde en tijdconstanten CR en Cr van 0.2 seconde ieder krijgen wij bij een V-curve zooals hiernaast aangegeven is door de stippellijn, op de eindpunten een waarde van nul voor de integraal. Op het hoogste en laagste punt met een ordinaten hoogte a boven het beginpunt of daaronder, bedraagt de correctie door de integraal veroorzaakt:

$$a\,(5 + 5) : 2 \times 200 = {}^1/_{40}\, a, \quad \text{d.w.z.}$$

2.5 % van de ordinaten hoogte en krijgen wij als gecorrigeerde curve de getrokken lijn.

Bij mijn proeven heb ik inderdaad gewerkt met een condensator van 2 mikrofarad, terwijl R en r ieder 10^6 Ohm bedroegen. Als oscillograaf diende een snaargalvanometer. De bijgevoegde figuur geeft een curve weer die met deze methode verkregen is.

Geologie. — De Heer G. A. F. MOLENGRAAFF biedt eene mededeeling aan over: „*Mangaanknollen in mesozoische diepzee-afzettingen van Nederlandsch-Timor*" met een voorloopige mededeeling van den Heer L. F. DE BEAUFORT over: „*Fossielen van cretaceïschen ouderdom in die afzettingen*".

Diepzee-afzettingen, die nagenoeg in alle opzichten met hedendaagsche diepzee-slib overeenkomen, zijn in de laatste dertig jaren op vele eilanden van den Oost-Indischen Archipel [1]), en wel het meest op de eilanden Borneo, Rotti en Timor, aangetroffen [2]). Op Borneo zijn deze van mesozoischen, waarschijnlijk prae-cretaceïschen ouderdom, op Rotti ten deele stellig van jurassischen en op Timor, zooals tot nu toe werd aangenomen, van triadischen en van jurassischen ouderdom. Zoowel roode kleischalie nu en dan met radiolariën, het aequivalent der recente roode diepzeeklei, als kiezellei en hoornsteen met radiolariën, de zoogenaamde radiolariet, het aequivalent van de recente radiolariën-slib, zijn van die eilanden beschreven en nemen een belangrijke plaats in onder de gesteenten, die hun bodem samenstellen. Ook mangaanknollen ontbreken in de mesozoische diepzee-afzettingen niet en het bleek mogelijk aan te toonen, dat deze knollen talrijke radiolariën omsluiten en dan als ophoopingen van mangaan ontstaan zijn in radiolariën-houdende diepzeeslib. In twee punten verschillen deze mangaanknollen, die gevonden werden vóór die, welke in deze mededeeling worden beschreven, van die der recente diepzee-afzettingen. Zij vertoonen namelijk niet, of althans niet duidelijk, een concentrisch-schaligen bouw en zij omsluiten geen fossiele overblijfselen. Recente mangaanknollen uit de diepzee daarentegen zijn in den regel duidelijk concentrisch-schalig gebouwd en bezitten als kern, waarom zij zijn afgezet, dikwijls fossiele overblijfsels en wel het meest tanden van kraakbeenige visschen, vooral van haaien. Haaientanden werden door de Challenger-expeditie in de roode klei ook zonder mangaanomhulsels uit groote diepte her-

[1]) Zie Lit. H. A. BROUWER, **1**, R. D. M. VERBEEK, **12**, en G. A. F. MOLENGRAAFF, **7**, **8**, **9**, **10** en **11**.

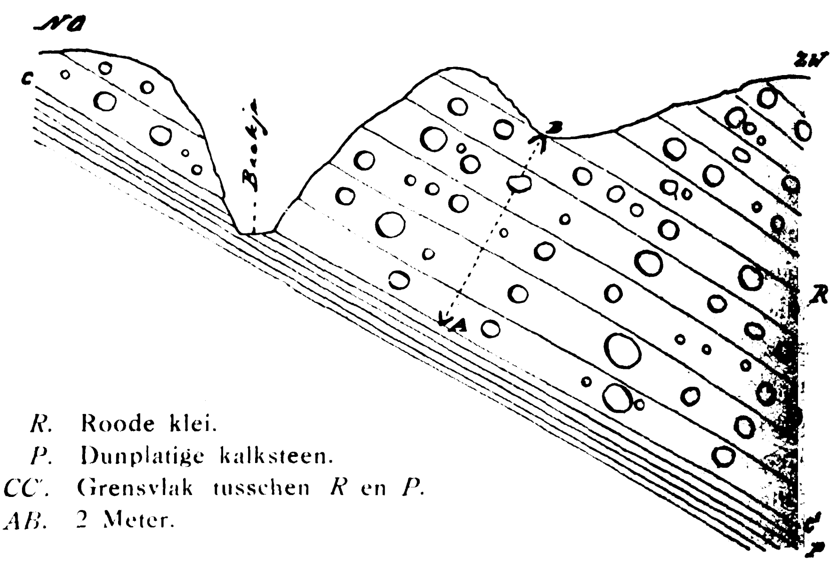
[2]) Deze zijn in de diepste gedeelten der mesozoische Tethys-geosynclinaal bezonken, waarschijnlijk, althans voor diepzee-afzettingen, betrekkelijk dicht bij land.

haaldelijk opgehaald en in zulke gevallen lagen zij klaarblijkelijk los in de diepzee-slib verspreid op den bodem der zee.

Wijlen Prof. Dr. H. G. JONKER [1]), die in het jaar 1916 palaeontologische onderzoekingen op het eiland Timor uitvoerde, deed op 16 Maart 1916 in Midden-Timor een gelukkige vondst, die de kennis van de fossiele diepzee-afzettingen op belangrijke wijze vermeerdert.

In het bed van een klein beekje, dat zich aan den rechteroever in de Noil Tobee, ook Noil Toninoe genoemd, ontlast, vond hij dicht bij den mond van dat beekje een prachtige ontsluiting in een roode diepzeeklei, die naast talrijke mangaanknollen tanden van *Elasmobranchii*, vooral van haaien, bevat. De Noil Tobee is een klein riviertje, dat omstreeks $4^1/_2$ K.M. ten Oost-Noordoosten van Niki-Niki in het landschap Amanoeban in Midden-Timor ontspringt en zich op 3 K.M. afstand noordwaarts van zijn bron even beneden de Fatoe Toninoe met de Noil Boenoe vereenigt. De Noil Boenoe mondt uit in de Noil Noni [2]) en deze in de Noil Benain, welke rivier zich ten slotte niet ver van Besikama in de Timor Zee ontlast. Het punt, waar JONKER in het bed van het reeds genoemde beekje, roode diepzeeklei vond, ligt 480 M. boven den zeespiegel.

Van het profiel, dat door vertikale afgraving geheel vrij werd



R. Roode klei.
P. Dunplatige kalksteen.
CC'. Grensvlak tusschen *R* en *P*.
AB. 2 Meter.

Fig. 1. Profiel in de Noil Tobee.

[1]) Professor JONKER heeft door zijn plotseling overlijden op 19 Januari 1917 niets omtrent de resultaten zijner onderzoekingen voor publicatie kunnen gereedmaken. Het door hem verzamelde materiaal berust thans in de geologische en palaeontologische collecties van de Technische Hoogeschool en eenige aanteekeningen uit zijn dagboek zijn in dit artikel ingevlochten.

[2]) Dit gedeelte van de Noil Noni wordt ook wel bij de Noil Benain gerekend.

gemaakt van materiaal van elders, dat door het beekje was aangevoerd, heeft JONKER een schets vervaardigd, welke in fig. 1 zonder eenige wijziging uit zijn dagboek is overgenomen. Op dunplatigen kalksteen, die onduidelijke schalen van *Aviculidae* (Halobiën) bevat, ligt schijnbaar geheel concordant een gele en roode tot bruine klei met mangaanknollen. De plaatkalken zijn scherp gelaagd, de klei is niet duidelijk gelaagd behalve in een gedeelte van het profiel, waar bruine en geelroode klei met elkaar afwisselen. In het profiel zijn de lagen schijnbaar ongestoord, maar de spiegels met wrijfkrassen die de klei doorzetten, bewijzen dat het toch aan sterken bergdruk is blootgesteld geweest. Het groote aantal dezer spiegels maakt, dat de klei zeer brokkelig is en dat het niet mogelijk is groote, samenhangende stukken te verkrijgen. Het grootste gave stuk, dat JONKER heeft medegebracht, heeft afmetingen 8 × 6 × 2 cM. Dit stuk is afgebeeld op Pl. I, fig 2. De stand van den kalksteen en van de kleibanken is dezelfde, beide hebben een strekking N. 35° W. en een helling 42° naar ZW. In het onderste deel van het profiel heerscht de gele klei, ongeveer 40 cM. dik en daarop volgt ruim 3 M. roode en chocoladebruine klei, waarop het profiel eindigt tegen lossen puingrond nabij de oppervlakte van den bodem. In het bovenste

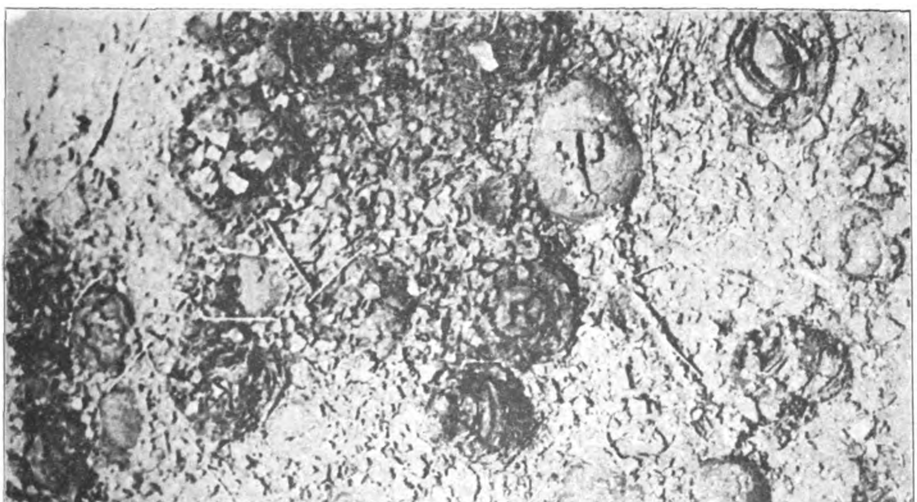


Fig. 2. Mangaanknollen in roode diepzeeklei, Noil Tobee, Midden-Timor.
Foto H. G. JONKER.

deel bevat de bruine klei geelroode banden, waardoor de gelaagdheid daar beter voor den dag komt.

De mangaanknollen komen onregelmatig verspreid en in grooten getale in het geheele profiel voor, zooals in fig. 2 te zien is; in de roode klei zijn zij talrijker dan in de gele. In het profiel is het voorkomen dezer knollen slechts schematisch voorgesteld en, in verband met de aangegeven schaal, zou men omtrent de grootte der knollen een sterk overdreven voorstelling krijgen. De grootste knollen hebben gemiddeld een langste doorsnede van 10 c.M. en daarnaast komen er van allerlei geringere afmetingen voor. Kleine, b.v. met een doorsnede van 1 of 2 centimeter, zijn even talrijk aanwezig als grootere.

Meer stroomop werd door JONKER aan den linkeroever van de Noil Tobee nog een tweede vindplaats van roode diepzeeklei met mangaanknollen ontdekt, die evenwel minder duidelijk is.

Tanden van *Elasmobranchii*, vooral van haaien, komen in de roode klei verspreid voor. JONKER verzamelde de meesten los uit de klei uitgeweerd. In zijn collectie bevinden zich slechts twee stukjes, bij welke een haaientand de kern van een mangaanknol vormt. JONKER's aanteekeningen geven omtrent de verspreiding van de haaientanden geen nadere bijzonderheden.

a. De roode diepzeeklei.

De roode diepzeeklei van Noil Tobee is klaarblijkelijk door diagenese bijzonder weinig veranderd. Zij is vettig of speksteenachtig bij het aanvoelen en kan met den nagel gekrast worden; zij is in drogen toestand eenigszins en na bevochtiging duidelijk plastisch. Als gesteente beschouwd zou men nauwelijks van een kleischalie mogen spreken, de naam vaste klei drukt het karakter van de stof beter uit. Hierdoor onderscheidt zich dit voorkomen van alle andere, die tot nu toe op Timor en andere eilanden van den Oost-Indischen archipel zijn ontdekt. Mesozoische roode diepzeeklei neemt op Timor een zeer belangrijk aandeel aan den bouw van den bodem en het aantal vindplaatsen van dat gesteente is, ook al ten gevolge van de sterke plooiing van alle vóór-plioceene gesteenten, overtalrijk.

Op alle mij bekende vindplaatsen komt de roode diepzeeklei als een niet plastische, middelmatig harde kleischalie voor, niet zelden eenigszins schistens door bergdruk, en steeds vrij sterk door diagenese veranderd, nu eens door verkiezeling, dan weer door verkalking.

Niet zelden bleek bij mikroskopisch onderzoek, dat zulk een kleischalie eerst verkiezeld was, terwijl later een deel van het

kiezelzuur weder werd opgelost en uitgeloogd en een kalkcement in het gesteente was ingevoerd.

De vindplaats Noil Tobee, door JONKER ontdekt, is de eenige op aarde waar roode diepzeeklei van mesozoischen ouderdom nagenoeg onveranderd als een werkelijke klei wordt aangetroffen. Tot nu toe was even weinig diagenetisch veranderde roode diepzeeklei slechts van één plaats, nl. van het eiland Barbados, bekend, maar daar uit veel jongere afzettingen, namelijk uit de zoogenaamde „oceanic beds" van mioceenen ouderdom. HARRISON[1]) beschrijft deze als „clays having a peculiarly greazy feel, ranging in colour from a dark chocolate-red through various shades of red and pink to yellow and greyish white".

Er bestaat eenig verschil tusschen de verschillend gekleurde varieteiten van de klei van Noil Tobee. De bleekroode variëteit vertoont het meest de eigenschappen van een echte klei en is ook het minst door breukvlakken met spiegels verbrokkeld; zij vertegenwoordigt stellig den zuiversten en minst veranderden vorm, waarin de diepzeeklei hier voorkomt. Alleen deze bleekroode soort is daarom gebruikt zoowel als materiaal voor een analyse als voor mikroskopisch onderzoek. De bruine variëteiten zijn sterker veranderd, harder, en in hooge mate verbrokkeld door gepolijste breukvlakken met wrijfkrassen.

Een analyse van een monster van zuivere, bleekroode diepzeeklei, van Noil Tobee, uitgevoerd door Prof. H. TER MEULEN te Delft, gaf de volgende uitkomst:

SiO_2	57.6	
TiO_2	0.6	
Al_2O_3	19.2	
Fe_2O_3	7.1	
MnO_2	spoor	
CaO	1.2	
MgO	1.4	
K_2O	spoor	
Na_2O	2.3	
H_2O beneden 110°	6.2	10.2
H_2O boven 110°	4.0	
	99.6	

Spoor van sulfaat.

Om de samenstelling, door deze analyse aangetoond, met die van recente roode diepzeeklei en die van de miocene roode diepzeeklei van Barbados te kunnen vergelijken, moet men de resultaten der verrichte analysen eerst in een met elkaar vergelijkbaren vorm brengen.

[1]) A. J. JUKES BROWNE and I. B. HARRISON. Lit. **3** p. 189.

Bij de analysen der talrijke monsters van recente roode diepzeeklei, door de Challenger-expeditie verzameld, heeft BRAZIER niet het zout in rekening gebracht, dat in het zeewater, dat aan de klei was blijven kleven, opgelost was. Dit aanhangende zout is in de monsters van fossiele diepzeeklei uit den aard der zaak niet te verwachten. De hoeveelheid van dit aanhangende zout is niet onbelangrijk en bedraagt, zooals HARRISON en WILLIAMS [1]) bij materiaal van de Challenger aantoonden, 3.61 %. Dit zout bestaat uit NaCl, $MgCl_2$, $CaSO_4$ en een spoor fosfaat. Bovendien heeft BRAZIER in de monsters van de Challenger de alkaliën niet bepaald, waardoor de cijfers door hem aan SiO_2 en andere stoffen toegekend, te hoog zijn geworden. Om deze leemten in de kennis omtrent de chemische samenstelling der recente roode diepzeeklei aan te vullen, hebben HARRISON en WILLIAMS een nieuwe analyse [2]) van typische roode diepzeeklei door de Challenger verzameld, gemaakt en daarbij de alkaliën wel bepaald en de hoeveelheid en samenstelling van het aanhangende zeezout afzonderlijk genoemd. Neemt men het aanhangende zeezout niet in de berekening op, dan zou de analyse van het monster van de diepzeeklei, door HARRISON en WILLIAMS onderzocht, aldus luiden:

SiO_2	56.12	
Al_2O_3	16.30	
Fe_2O_3	10.94	
MnO_2	1.62	
CaO	1.65	
MgO	1.43	
K_2O	1.95	
Na_2O	3.34	
H_2O	6.92	bij verhitting na
	100.31	droging op 100°

Een analyse van recente diepzeeklei als de hier bovenstaande zal nu met een van fossiele diepzeeklei vergelijkbaar zijn, indien ook bij beiden de hoeveelheid water, dat beneden en boven 100° wordt losgelaten, op dezelfde wijze is in rekening gebracht. Het is dan wenschelijk, het water dat bij verhitting tot op 100° uitwijkt niet in rekening te brengen, omdat zulks ook niet is geschied bij de analysen van de pliocene diepzeeklei van Barbados en bij de nieuwste analyses van recente roode diepzeeklei, door G. STEIGER uitgevoerd en door CLARKE [3]) besproken.

[1]) I. B. HARRISON and A. J. JUKES BROWNE. Lit. **6** p. 315.
[2]) Lit. **6** p. 315 en 321.
[3]) F. M. CLARKE. Lit. **4**, p. 785.

De reeds genoemde analyse van de cretaceïsche diepzeeklei van Noil Tobee, omgerekend op bij 110° C.[1]) gedroogde stof, luidt:

SiO_2	61.3	
TiO_2	0.7	
Al_2O_3	20.4	
Fe_2O_3	7.6	
MnO	spoor	
CaO	1.3	
MgO	1.5	
K_2O	spoor	
Na_2O	2.5	
H_2O	4.3	Ontwijkt bij verhitting boven 110° C.
	99.6	

Men verkrijgt alsdan de volgende vergelijkende analysen:

	1	2	3	4
SiO_2	56.12	54.48	60.99	61.3
TiO_2	2.01 [1])	0.98	3.63 [1])	0.7
Al_2O_3	16.30	15.94	21.03	20.4
Fe_2O_3	10.94 (Fe₂O₃ + FeO)	8.66	6.95	7.6
FeO		0.84		
MnO_2	1.62	1.21	1.24	spoor
CaO	1.65	1.96	0.—	1.3
MgO	1.43	3.31	2.62	1.5
K_2O	1.95	2.85	0.50	spoor
Ha_2O	3.34	2.05	1.95	2.5
M_2O. na drogen bij 100°	6.92	7.04	4.72	4.3 [2])
	100.27	99.32	100.—	98.6

[1]) Bij de monsters 1 en 3 is TiO_2 uit een afzonderlijke hoeveelheid bepaald, waardoor het cijfer voor Al_2O_3 gegeven te hoog is geworden, omdat daarin TiO_2 is verborgen.

[2]) Bij 110° gedroogd.

1. Recente roode diepzee-klei. Pacifische Oceaan. Challenger station 256. 30° 22′ N. Br. en 154° 56′ W. L. Diepte 5310 M. Anal. HARRISON en WILLIAMS.
2. Gemiddelde samenstelling van 51 monsters van recente diepzee-klei. Anal. G. STEIGER.
3. Mioceene roode diepzee-klei, Mt. Hillaby, Barbados. Anal. J. B. HARRISON.
4. Cretaceïsche roode diepzee-klei, Noil Tobee, Midden-Timor. Anal. H. TER MEULEN.

[1]) Het verschil, dat nog wordt veroorzaakt door drogen bij 100° in het eene geval en 110° in het andere, is hier verwaarloosd.

Vergelijkt men eerst de analyse 3 van de roode klei van Barbados met de analyse 4 van de roode klei van Noil Tobee, dan blijkt dat de eerste 1.24 °/₀ MnO, bevat, tegen de tweede slechts een spoor. Dat kan wellicht hierdoor worden verklaard, dat in de roode klei van Barbados geen mangaanknollen voorkomen en het mangaanerts dus niet geconcentreerd is, wat in de roode klei van Noil Tobee wel het geval is. Overigens gelijken de analyses 3 en 4 zooveel op elkaar, dat men spreken kan van een nagenoeg volkomen chemische overeenstemming tusschen de cretaceïsche diepzeeklei van Noil Tobee van Midden-Timor en de mioceene diepzeeklei van Mt. Hillaby op Barbados. De verschillen tusschen de fossiele en de recente diepzeeklei zijn iets grooter. Dit is zeer begrijpelijk, omdat de diepzeeklei, zoodra zij door diastrophisme tot boven den zeespiegel in een gebergte was opgeheven, al is zij voor water zeer weinig doorlaatbaar, toch aan verandering door diagenetische processen niet geheel en al kan ontsnapt zijn.

Tengevolge daarvan is een deel van het ijzer, van de kalk en van de alkaliën uitgeloogd en is daarentegen het kiezelzuur-gehalte toegenomen. Zoo men dat in aanmerking neemt, blijkt de chemische samenstelling van de roode klei zoowel van Barbados als van Midden-Timor zeer wel overeen te stemmen met die van recente roode diepzeeklei, op verschillende punten door de Challenger opgehaald, zooals uit bovenstaande analyses blijkt. De overeenstemming in samenstelling met de monsters van roode diepzeeklei, door de Gazelle verzameld en door VON GÜMBEL [1]) geanalyseerd, is eveneens groot.

Mikroskopische samenstelling van de roode klei.

Het mikroskopisch onderzoek van vier dunne doorsneden van roode klei van Noil Tobee, dat uitgevoerd werd door Prof. H. A. BROUWER, gaf de volgende resultaten: „Het grootste gedeelte bestaat uit een niet nader definieerbare uiterst fijne kleimassa, waarin enkele grootere fragmenten van mineralen en gesteenten voorkomen en herkend konden worden als:

a. een polysynthetisch vertweelingd plagioklaaskristalletje;

b. een brokstukje van een vulkanisch gesteente met veldspaatlijstjes in de grondmassa;

c. een sterk veranderd fragment van de grondmassa waarschijnlijk van een glasrijk vulkanisch gesteente;

d. een fragment van een glasrijk vulkanisch gesteente met veldspaatlijstjes, ertsvedertjes en veel glas;

---

[1]) W. VON GÜMBEL. Lit. 5, p. 85 en 87.

e. eenige sterk veranderde (geserpentiniseerde) brokstukjes, mogelijk van olivijn of van een vulkanisch gesteente afkomstig;

f. een onregelmatig stukje kwarts.

Onduidelijke overblijfselen van radiolariën waarvan de skeletdeelen grootendeels verdwenen zijn, komen in geringe hoeveelheid in alle praeparaten voor".

In een der praeparaten werd een kleine mangaanknol doorsneden. Het blijkt dat de concentratie van het mangaanerts zeer volkomen is, want buiten die knol worden geen mangaankorrels verspreid in de roode klei in de praeparaten opgemerkt.

Behalve het sub *f* genoemde, onder het mikroskoop aangetoonde stukje kwarts, werden door mij ook met het bloote oog in de roode klei van Noil Tobee enkele witte stipjes opgemerkt, welke uit zeer kleine stukjes kwarts blekon te bestaan. Ik beschouw deze korreltjes kwarts als erratisch in de roode klei, d. w. z. als bestanddeelen van terrigenen oorsprong, die door een of ander toeval in de diepe zee zijn bezonken; zij kunnen bijv. vastgehecht aan drijvende boomstronken buiten het litorale gebied bezonken zijn. Voor Timor en den Oost-Indischen archipel in het algemeen is zulk een verklaring vooral te billijken, omdat ook in het Mesozoium deze streek wel nimmer zeer ver van land zal zijn verwijderd geweest.

b. De mangaanknollen.

Jonker bracht uit de diepzeeklei van Noil Tobee een groot aantal losse mangaanknollen mede. De grootste komen in grootte met citroenen overeen, de kleinste hebben de grootte van hazelnooten; bovendien komen er in de brokjes roode klei nog een groot aantal voor, die niet grooter dan erwten zijn. Het grootste exemplaar meet $10 \times 8\frac{1}{2} \times 6$ cM. Twee verschillende typen zijn in de collectie vertegenwoordigd, het eerste type met 90 exemplaren, het tweede type met 2 exemplaren.

Type 1. Bijna alle knollen zijn spherisch of ellipsoidisch. Een paar zijn cylindrisch van vorm en duidelijk ontstaan door samengroeiing van twee individuen.

De oppervlakte is wrattig en vertoont een fijne korreling, die aan sagrijnleder doet denken (Pl. II fig. 4). De kleur is zwart tot bruinachtig zwart; de streep is donkerbruin. De knollen zijn grootendeels dof maar bezitten op de uitstekende deelen van het relief, dus op de korreltjes en wratten, een zwakken metaalglans. De hardheid is minder dan 2. Het soortgelijk gewicht is ± 1.7 dus gering, wat met de groote porensiteit der knollen in verband staat. In fysische eigenschappen komt de samenstellende stof met Waad overeen.

De mangaanknollen zijn duidelijk concentrisch-schalig gebouwd. Veel minder duidelijk en ook niet bij alle knollen is een radiaal-stralige structuur waarneembaar. In de collectie waren verscheidene middendoor gebroken knollen en deze doen de schaal-struktuur duidelijk zien. (Pl. II fig. 1 en 2). Eenige daarvan zijn stukgeslagen, maar JONKER vermeldt, dat nabij de oppervlakte de knollen dikwijls middendoor gebroken in de klei staken. De knollen bezitten dikwijls, maar niet altijd, een witte of grijze mangaanvrije kern, waaromheen zich het mangaanomhulsel in concentrische, sterk poreuse lagen heeft afgescheiden [1]). De witte kern contrasteert dan sterk met het donkere omhulsel (Textfiguur 3 en Pl. II fig. 3).

Fig. 3. Mangaanknol met witte kern van radiolariën-hoornsteen in amorph kiezelzuur veranderd.

Bij enkele exemplaren is een deel van de kernmassa groenachtig van kleur en half doorschijnend. Deze deelen kunnen met een sterk vergrootglas gemakkelijk als hoornsteen herkend worden.

De kernen zijn altijd broos en laten zeer gemakkelijk los. Bij één der knollen gelukte het een dunne doorsnede te vervaardigen door een geheele knol, kern en omhulsel, zonder dat de samenhang werd verbroken. Dit praeparaat is afgebeeld op Pl. I fig. 1.

[1]) Een enkele maal werd witte mangaanvrije substantie, geheel op die van de kernen gelijkend, waargenomen buiten het centrum van een knol tusschen twee schalen van het mangaan-omhulsel.

Het mikroskopisch onderzoek toonde bij deze kern aan, dat zij uit min of meer ontleede radiolariën-hoornsteen bestaat die grootendeels is overgegaan in wit, amorph kiezelzuur. De radiolariën zijn daarin vrij dicht opgehoopt en gevuld met een kwarts-mozaiek. De concentrische-schalige bouw en het poreuse karakter van het mangaan-omhulsel om deze kern zijn in de afbeelding zeer goed te zien. In eenige andere praeparaten, van deze knollen vervaardigd, gelukte het de aanwezigheid van enkele radiolariën ook in de mangaansubstantie zelve aan te toonen.

De chemische samenstelling is zooals een analyse, verricht door Prof. H. TER MEULEN van een dezer knollen, uitwijst:

SiO_2		24.4	
Fe_2O_3		25.5	
Al_2O_3		9.8	
MnO_2		16.9	
CaO		1.5	
BaO		0.32	
MgO		0.34	
K_2O		0.15	
Na_2O		1.46	
NiO		0.28	
CoO		0.16	
CuO		0.12	
Cl	(zuurst. aeq.)	0.60	
H_2O	ontwijkend beneden 110°	7.9	18.1
	„ boven 110°	10.2	
		99.63	

Sporen lood, sulfaat en fosfaat.

Men zou deze stof een zeer ijzer- en kiezelzuurrijke Waad mogen noemen. Ter vergelijking is in de tabel op de volgende bladzijde de bovenstaande analyse van een knol van Noil Tobee gegeven, nadat zij is omgerekend op bij 110° gedroogde stof, naast de analysen van mangaanknollen uit de recente diepzeeklei door de Challenger op 4 verschillende stations opgehaald.

Uit deze tabel blijkt, dat de samenstelling bij de verschillende knollen [1]) sterk uiteenloopend is. Alle zouden om hun hoog ijzergehalte ijzer-mangaan-knollen mogen genoemd worden. De samen-

[1]) Een analyse van een mangaanknol uit roode diepzeeklei door de Gazelle opgehaald uit den Pacifischen Oceaan, verricht door A. SCHWAGER is medegedeeld door W. VON GÜMBEL, Lit. 5, p. 102.

stelling van de knol van Noil Tobee ligt, behalve wat het gehalte aan aluinaarde betreft, binnen de uiterste waarden, die de analysen van de recente diepzee-knollen aangeven.

Type 2, Onder de mangaanknollen van Noil Tobee bevinden zich twee van een ander type, dat ik het tweede type zal noemen. Van deze twee knollen is er één breed en plat met afmetingen 10 × 9½ × 3½ c.M., de tweede is meer bolvormig en kleiner. Deze knollen hebben een specifiek gewicht van 4.2 en een hardheid 6 en zijn dus veel zwaarder en harder dan die van het eerste type. Zij hebben een gladde oppervlakte en gelijken volmaakt op de

Vergelijkende tabel van analysen van mangaanknollen uit roode diepzeeklei.

Plaats	Challenger Stat. 160	Challenger Stat. 252	Challenger Stat. 276	Challenger Stat. 286.	Noil Tobee	Rotti, knol van 2e type
Diepte in vaam	2600	2740	2350	2335		
SiO_2	21.80	27.62	13.66	20.01	26.5	2.09
Al_2O_3	22.30	6.60	3.10	2.81	10.6	2.3
Fe_2O_3		17.82	46.40	17.88	27.7	
MnO_2	39.32	25.48	14.82	38.15	18.3	57.7
MnO						10.5
CaO	2.21	2.91	3.53	3.58	1.63	5.6
BaO					0.35	11.7
MgO	0.89	1.27	0.74	0.33	0.37	
K_2O					0.16	
Na_2O					1.59	1.1
NiO			spoor	spoor	0.30	
CoO			spoor	spoor	0.17	0.3
CuO	spoor	spoor	spoor	spoor	0.13	
Cl (zuurst. aeq)					0.65	
CO_2						geringe hoeveelheid
H_2 vrijkomend boven 110°	11.—	15.20	14.40	11.35	11.1	± 15.3

mangaanknollen, die bij Soea Lain op het eiland Rotti[1]) in jurassische mergels voorkomen en talrijke radiolariën omsluiten en op die, welke op Timor nabij den berg Somoholle in vermoedelijk triadische diepzeeklei werden verzameld. Doorgebroken zien deze knollen

[1]) Lit.: R. D. M. VERBEEK **12** p. 326 en p. 393, H. A. BROUWER **2** p. 61 en G. A. F. MOLENGRAAFF **9** p. 1064.

er volkomen dicht en homogeen uit en vertoonen geen spoor van concentrisch-schaligen bouw. In de laatste kolom van de bovenstaande tabel is de chemische samenstelling van een knol van het tweede type van Soea Lain op het eiland Rotti aangegeven. Zij verschilt aanzienlijk van die van het eerste type. Deze knollen van het tweede type van Noil Tobee zijn niet nader onderzocht, omdat uit de aanteekeningen van JONKER niet blijkt of zij uit de roode diepzeeklei daar ter plaatse afkomstig zijn dan wel door het beekje van hooger op zijn aangevoerd.

c. *De fossielen in de roode klei en in de mangaanknollen.*

Deze fossielen zijn onderzocht door Dr. L. F. DE BEAUFORT, die de door hem tot nu toe verkregen resultaten als volgt samenvat:

„De fossielen, afkomstig uit de diepzee-afzettingen van Noil Tobee, bestaan voor het grootste deel uit tand-fragmenten van *Elasmobranchii*. Op eenige zeer weinige uitzonderingen na is slechts de kroon van de tanden bewaard gebleven en van deze is veelal ook het dentin opgelost, zoodat slechts een émail-scheede overgebleven is.

Deze conservatie-toestand, die geheel in overeenstemming is met wat men in een diepzee-afzetting zou verwachten, bemoeilijkt de determinatie der voorwerpen in hooge mate. In vele gevallen zal het dan ook niet mogelijk zijn de fragmenten tot een bepaalde species of zelfs tot een bepaald genus te brengen.

Het overgroote deel der tanden heeft toebehoord aan haaien uit de familie der *Lamnidae*. Vertegenwoordigers van deze familie zijn tot nu toe in geen oudere lagen dan het Krijt-tijdperk bekend, tenzij men het genus *Orthacodus* uit de Boven-Jura tot de *Lamnidae* wil rekenen. Dit laatste genus komt echter in de onderhavige verzameling niet voor. Herkenbaar zijn daarin tandstukken van *Carcharodon* (bekend uit Boven-Krijt en Tertiair) *Lamna* (Krijt tot Recent), en *Scapanorhynchus* (alleen bekend uit het Boven-Krijt).

Verder meen ik een enkel fragment te moeten brengen tot het genus *Hemipristis* (Boven-Krijt, Tertiair en één enkele recente soort), uit de familie der *Carcharidae*.

Wanneer men slechts paleontologische overwegingen laat gelden, zou men geneigd zijn reeds uit bovenstaande vondsten te vermoeden met Boven-Cretaceïsche fossielen te doen te hebben. In hooge mate nu wordt deze opvatting versterkt door het voorkomen in de verzameling van eenige goed bewaarde tanden van het zoo gemakkelijk te herkennen genus *Ptychodus*. Tanden van dit geslacht, dat als een voorlooper der *Myliobatidae* wordt opgevat, zijn namelijk tot nog toe

slechts gevonden in het Boven-Krijt van Europa en Noord-Amerika.

In de Timor-collectie komen tanden van 3, wellicht 4 soorten van dit genus voor. Zij zijn te vereenigen met of althans nauw verwant aan de volgende species: *P. decurrens* Ag. *P. dixoni* DIDLEY en *P. rugosus* DIXON. Deze drie soorten, die volgens SMITH WOODWARD (Quart. Journal Geol. Soc. London, vol. 67, 1911 p. 276) een opklimmende reeks vormen, komen volgens DIDLEY (l.c. p. 263 e.v.) in verschillende lagen van het Boven-Krijt van Engeland voor.

Behalve de boven besproken tanden komen in de collectie nog eenige, niet nader bestemde visch-tanden voor en één fragment van een Reptielen tand. Verder eenige vinstekels, vermoedelijk van *Selachii* en ten slotte eenige beenscherven, die tot nog toe niet nader konden gedetermineerd worden.

Het is mogelijk, dat een nader onderzoek van deze nog niet bestemde stukken uit de merkwaardige collectie aan het licht zal brengen, dat daaronder ook oudere vormen schuilen. Voor het oogenblik durf ik niet verder gaan dan vast te stellen — maar zulks dan ook met zekerheid — d a t i n d e d i e p z e e a f z e t t i n g e n v a n T i m o r v o r m e n v o o r k o m e n, d i e t o t n o g t o e ò f u i t s l u i t e n d u i t h e t B o v e n - K r i j t, ò f u i t g e e n o u d e r e l a g e n d a n h e t B o v e n - K r i j t b e k e n d z i j n."

Uit het bovenstaande onderzoek blijkt, dat de fossielen, in de roode diepzeeklei en ook in enkele der mangaanknollen gevonden, van boven-cretaceïschen ouderdom zijn. Het is logisch daaruit de gevolgtrekking te maken, dat de diepzeeklei, waarin de tanden van *Elasmobranchii* zijn bezonken, hoogstwaarschijnlijk eveneens van boven-cretaceïschen ouderdom zijn. Dit resultaat is afwijkend van wat men uit de stratigraphie van het complex van lagen, waartoe de diepzeeklei behoort, zooals dat door JONKER is waargenomen (fig. 1) zou meenen te mogen opmaken. De roode diepzeeklei rust, zooals uit de teekening en de beschrijving blijkt, onmiddellijk en volkomen concordant op een scherpgelaagden plaatkalksteen, waarin niet zeer duidelijke, maar toch ontwijfelbare overblijfselen van *Aviculidae* (Halobiën) door JONKER zijn gevonden. Deze zijn alleen uit midden- en boven-triadische afzettingen bekend en JONKER aarzelde dan ook niet, de roode diepzeeklei met mangaanknollen te beschouwen als triadisch.

Waar ik meen het palaeontologisch onderzoek als beslissend te moeten aanzien, is het noodzakelijk naar de oplossing te zoeken voor de stratigraphische tegenstrijdigheid, die daaruit volgt.

Twee verklaringen van het profiel komen m. i. in aanmerking om de schijnbare tegenstrijdigheid op te lossen.

In de eerste plaats is het mogelijk dat de cretaceïsche diepzeeklei, die concordant en onmiddellijk op de triadische plaatkalk ligt, daarop niet oorspronkelijk is afgezet maar later door orogenetische bewegingen daarop is gebracht. Het vlak *cc'* (fig. 1) zou dan niet een scheidingsvlak tusschen twee zonder onderbreking op elkaar volgende formaties zijn, maar het zou het tektonische contact aangeven van twee formaties van zeer verschillenden ouderdom. Een groote onderbreking en een aanzienlijk stratigraphisch hiaat zou dus de beide concordant op elkaar volgende complexen van lagen van elkaar scheiden. Dergelijke stratigraphische hiaten tusschen concordant op elkaar liggende formaties komen op Timor met zijn chaotische tektoniek veelvuldig voor en zijn eigen aan streken, die sterk gestoord zijn door orogenetische bewegingen met aanzienlijke horizontale componenten, zooals BERTRAND reeds in het jaar 1890 heeft uiteengezet.

Meestal is echter het ouderdomsverschil tusschen de concordant op elkaar liggende vormingen niet zoo aanzienlijk, als men in dit geval bij Noil Tobee moet aannemen. Herhaaldelijk vond ik boven-triadische afzettingen concordant liggen op permische; in het geval van Noil Tobee zou een boven-cretaceïsche afzetting concordant op een boven-triadische liggen. Dikwijls is in zulk een geval uit de eigenschappen van het contactvlak tusschen de twee formaties op te maken, dat het een tektonisch vlak is. Het is dan veelal min of meer gepolijst, van wrijfkrassen voorzien of bepleisterd met een dun laagje van wrijvingsklei. Dit is evenwel ook dikwijls niet het geval. Bij Noil Tobee maakt JONKER hiervan geen melding en hij heeft klaarblijkelijk het vlak *cc'* tusschen de roode klei en de plaatkalk opgevat als een normaal scheidingsvlak tusschen twee opeenvolgende afzettingen.

In de tweede plaats is het mogelijk, dat het profiel een ononderbroken stratigraphische volgorde doet zien; in dat geval zou de roode klei met mangaanknollen het totaal voorstellen van al wat ter plaatse zonder onderbreking in de diepzee is afgezet van boven-triadischen tot boven-cretaceïschen tijd. Men zou dan mogen verwachten, dat de boven beschreven vischtanden niet in het onderste deel van het profiel zouden voorkomen. De voorhanden aanteekeningen geven hieromtrent geen uitsluitsel. Ook deze oplossing mag niet a priori verworpen worden. Wel is de dikte der roode klei, in het profiel ruim 3 M., zeer gering in verhouding tot de geweldige tijdruimte, die voor haar afzetting zou moeten worden aangenomen, maar daar tegenover staat, dat in de diepste deelen der oceanen ver van land verwijderd, dus in de gebieden der roode diepzee-klei, het proces van sedimentatie uiterst langzaam moet geweest zijn.

VERKLARING DER PLATEN.

PLAAT I.

Fig. 1. Doorsnede door een mangaanknol uit de cretaceïsche diepzee-klei van Noil Tobee.

K. Kern, die uit veranderden radiolariën-hoornsteen bestaat.

CC Concentrische schalen van mangaan-erts.

B.O. Buiten-oppervlakte van de knol.

Fig. 2. Stuk roode diepzee-klei van Noil Tobee, waarin een mangaanknolletje met zeer groote, witte kern. Natuurlijke grootte.

PLAAT II.

Fig. 1 en Fig. 2. Doorgebroken mangaanknollen van Noil Tobee, den schaalbouw duidelijk vertoonend.

Fig. 3. Mangaanknol met schaalbouw en witte kern.

Fig. 4. Mangaanknol, van buiten gezien. De oppervlakte is sagrijnachtig en is wrattfg door talrijke verhevenheden.

LITERATUUR.

1. H. A. BROUWER. Geologisch overzicht van het oostelijk gedeelte van den Oost-Indischen archipel. Jaarboek van het Mijnwezen, 46e Jaargang, 1917, vooral pp. 52, 61 en 63. Batavia 1919.

2. H. A. BROUWER. Voorloopig overzicht der geologie van het eiland Rotti. T. K. Ned. Aardr. Gen. 2. XXXI p. 611, 1914.

3. A. J. JUKES BROWNE and J. B. HARRISON. On the geology of Barbados Part II. The oceanic deposits. Quart Journ. Geol. Soc. Vol. XLVIII p. 170, 1892.

4. F. W. CLARKE. The composition of the red clay. Journal of Geology XV. p. 783, 1907.

5. W. VON GÜMBEL. Die min. geol. Beschaffenheit der auf der Forschungsreise S. M. S. Gazelle gesammelten Meeresgrund-Ablagerungen. Forschungsreise S. M. S. Gazelle II. p. 69. Berlin 1888.

6. J. B. HARRISON and A. J. JUKES BROWNE. Notes on the chemical composition of some oceanic deposits. Quart Journ. Geol. Soc. Vol. LI p. 313, 1895.

7. G. A. F. MOLENGRAAFF. Geologische verkenningstochten in Centraal Borneo p. 95 en p. 439—42 en Appendix door E. J. HINDE, Leiden 1900.

8. G. A. F. MOLENGRAAFF. Over oceanische diepzeeafzettingen van Centraal-Borneo. Deze Verslagen XVIII p. 78, 1909.

9. G. A. F. MOLENGRAAFF. Over mangaanknollen in mesozoische diepzeeafzettingen van Borneo, Timor en Rotti, hun beteekenis en hun wijze van ontstaan. Deze Verslagen XXIII p. 1058, 1915.

10. G. A. F. MOLENGRAAFF. L'expédition néerlandaise à Timor en 1910—1912. Archives Néerl. des Sciences exactes et naturelles III B, Tome II, p. 395, 1915.

11. G. A. F. MOLENGRAAFF. Folded mountain chains, overthrust sheets and block-faulted mountains in the East Indian Archipelago. Compte Rendu XIIe Congrès géologique international Toronto 1913, p. 690, Ottawa 1915.

12. R. D. M. VERBEEK. Molukken-verslag. Jaarboek van het Mijnwezen, 37e Jaargang, vooral pp. 694 en volg. Batavia 1908.

G. A. F. MOLENGRAAFF: „Mangaanknollen in mesozoische diepzee-afzettingen van Nederlandsch-Timor".

Plaat I.

G. A. F. MOLENGRAAFF: „Mangaanknollen in mesozoische diepzee-afzettingen van Nederlandsch-Timor".

Plaat II.

Fig. 1.

Fig. 2.

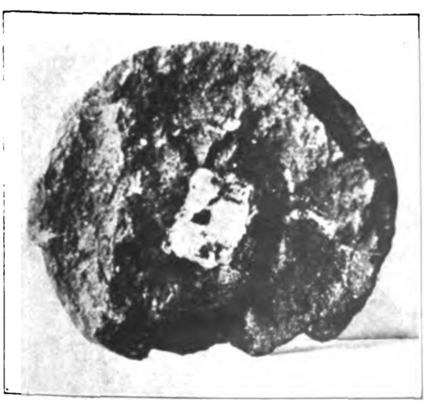


Fig. 3.

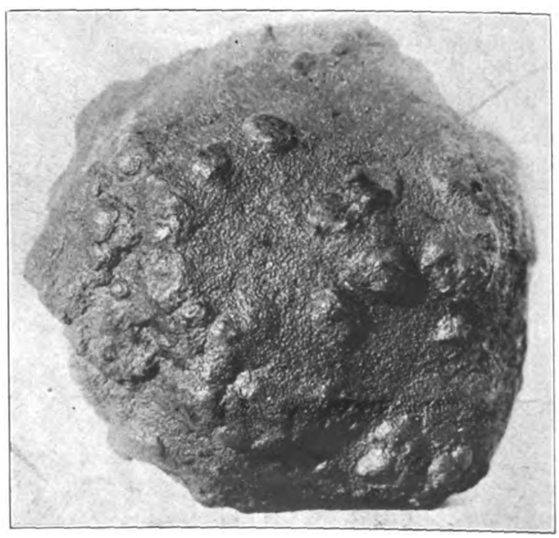


Fig. 4.

Natuurkunde. — De Heer P. EHRENFEST biedt eene mededeeling aan van den Heer G. KRUTKOW: *„Over de bepaling van quanta-voorwaarden met behulp van adiabatische invarianten"*.

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

(Aangeboden in de vergadering van 25 September 1920).

Zooals bekend is, heeft EHRENFEST in een reeks verhandelingen aangetoond, dat men slechts zulke functies van den bewegingstoestand van een mechanisch stelsel mag quantiseeren, die *adiabatische invarianten* zijn. [1]) Nu kunnen de laatste steeds gevonden worden [2]); ook wordt door de theorie de vraag naar het aantal *essentieele* adiabatische invarianten, die juist tengevolge van de hypothese der quanta slechts discontinue waarden moeten aannemen, beantwoord. Wordt er namelijk verondersteld, dat de waarschijnlijkheidsdichtheid voor de van adiabatische beïnvloeding vrije beweging van het stelsel niet explicite van den tijd afhangt, en wordt verder met behulp van een hypothese of een stelling, die uit de eigenschappen van het stelsel volgt, *het tijdgemiddelde* van een phase-functie door een *getalgemiddelde* vervangen, dan volgt onmiddellijk: *het aantal essentieele adiabatische invarianten is gelijk aan het aantal bepalende grootheden van het stelsel, die na afloop van de bepaling van het getalgemiddelde overblijven* (verg. (12) en verder). Wanneer wij de adiabatische invarianten gevonden hebben, en *de essentieele* ervan hebben afgezonderd, dan is daardoor de willekeur in de keuze van de bewegingsvormen, die volgens de hypothese der quanta toelaatbaar zijn, reeds sterk verminderd. Nu mogen wij echter niet verwachten, dat de door ons gevonden adiabatische invarianten juist die zijn, welke gequantiseerd moeten worden. Willekeurige functies van deze grootheden zijn eveneens adiabatische invarianten en kunnen daarom evenveel aanspraak op quantawetten laten gelden. Intusschen kunnen wij deze vrijheid nog iets beperken. Wij kunnen de quanta-grootheden nog aan een voorwaarde onderwerpen. Deze voorwaarde is van hypothetischen aard, maar wij kunnen er een eenvoudige statistische interpretatie van geven. In alle gevallen, waarin de

[1]) P. EHRENFEST. Akad. Amst. XXV (1916) p. 412 Ann. de Phys. 51 (1916) p. 327.
[2]) G. KRUTKOW. Akad. Amsterdam XXVII 1919. p. 908.

theorie der quanta met goed gevolg werd toegepast [1]), is aan deze voorwaarde voldaan. Ook werd zij als *„grondstelling"* door PLANCK gebruikt ter volledige bepaling van de grootheden, die gequantiseerd moeten worden [2]). Wij vinden voor deze grondstelling een nieuw bewijs, doordat wij de adiabatische invarianten en de phasenruimte met elkaar in verband brengen. (18").

Deze verbinding met begrippen ontleend aan de statistische mechanica, die hier geheel ongedwongen plaats heeft, vernieuwt den samenhang van de hypothese der quanta met de laatste, d. w. z. een samenhang, die, naar het mij schijnt, bij de nieuwste ontwikkeling van deze theorie een weinig minder is geworden of in elk geval niet met voldoende scherpte naar voren werd gebracht, en die toch, naar mijn meening, van blijvende waarde is. Tengevolge van deze verbinding geloof ik, dat het woord „werkingsquantum" slechts daarom reden van bestaan heeft, omdat het ons de dimensies van de phase-ruimte in het geheugen roept. Ook zal het voor de theorie der quanta zoo belangrijke begrip van de *„coherentie der vrijheidsgraden"* van PLANCK [3]) in ons schema een plaats vinden. Dit begrip schijnt mij van fundamenteele beteekenis te zijn. Het tegenover elkaar stellen van de eigenschappen van een voorwaardelijk-periodiek stelsel en een ergode van BOLTZMANN doet zijn beteekenis bijzonder duidelijk voor den dag komen.

Van de coherentie der vrijheidsgraden moet het begrip der *ontaarding* [4]) scherp worden onderscheiden. Van ons standpunt bezien is b.v. een *ergodisch stelsel* in den hoogsten graad coherent, maar kan in geen geval voor ontaard doorgaan. Voor een ontaard stelsel wordt het aantal der *essentieele* adiabatische invarianten *grooter* dan het aantal vrijheidsgraden, voor een coherent stelsel *kleiner*.

Moeten voor een ontaard stelsel ook deze *overtollige* adiabatische invarianten gequantiseerd worden? Of wordt, zooals door SCHWARZSCHILD werd vermoed [5]), het aantal der quanta-grootheden voor zulk een stelsel kleiner dan voor het normale geval (wanneer er geen ontaarding plaats heeft)?

Voor de mogelijkheid van een oplossing van deze vraagstukken zijn de gedane stappen: 1° opstelling van de adiabatische invarian-

---

[1]) Mijn kennis van de literatuur op dit gebied strekt zich intusschen slechts uit tot begin 1917.

[2]) M. PLANCK. Ann. d. Phys. 50 (1916) p. 392.

[3]) M. PLANCK, l.c.

[4]) K. SCHWARZSCHILD. Sitzungsber. Berlin 1916. P. EPSTEIN Ann. d. Phys. 51 (1916). p. 168.

[5]) K. SCHWARZSCHILD, l.c.

ten; 2° het daarvan afzonderen van de *essentieele* adiabatische invarianten en 3° „normeering" van de laatstgenoemde onvoldoende. Om dichter bij de oplossing te komen, moet men, naar ik geloof, in aanmerking nemen, *dat de quanta-grootheden een van het coördinatenstelsel onafhankelijke beteekenis moeten hebben.* Wij hebben het recht, dezen nieuwen eisch te stellen. Zijn de quanta-wetten werkelijk physische wetten, dan moeten zij natuurlijk aan deze voorwaarde voldoen. Hoe kunnen wij deze nieuwe invariantie van de quanta-grootheden algemeen formuleeren? Ik wil deze vraag in haar volledigen vorm hier niet behandelen. Laat ons volstaan met de volgende opmerking: van de voor de theorie der quanta zoo gemakkelijke kanonische bewegingsvergelijkingen kunnen wij teruggaan naar de bewegingsvergelijkingen in rechthoekige cartesische coördinaten; hiervoor beteekent echter de bedoelde invariantie: invariantie met betrekking tot de groep der rotaties en translaties. De vectoranalyse levert ons dus het middel hypothetische quanta-grootheden aan den laatstgenoemden eisch te toetsen [1]).

Alle bovengenoemde middelen stellen ons in staat bij heel bepaalde voorbeelden dikwijls de quanta-grootheden éénduidig af te zonderen, zoo b.v. bij de mechanische stelsels, die in de geciteerde verhandeling van PLANCK worden beschouwd. Intusschen blijft er in enkele gevallen een dubbelzinnigheid bestaan, waarvan wij ons echter op de volgende wijze kunnen ontdoen: door alle quanta-grootheden op één na gelijk aan nul te stellen zal er een *„singuliere beweging"* worden verkregen.

Wij hebben hier dus een brug geslagen tusschen de hierboven geschetste methoden en de theorie van PLANCK over de physische structuur van de phase-ruimte. De singuliere bewegingen van PLANCK vormen hier enkel den laatsten stap in de rij:

de quanta-grootheden zijn α. functies van de integralen van de bewegingsvergelijkingen; β. adiabatische invarianten, die γ. *„genormeerd* moeten worden en δ. een van het coördinatenstelsel onafhankelijke beteekenis moeten hebben; en eindelijk ε. in de door PLANCK vastgestelde beteekenis singuliere bewegingen afzonderen.

§ 1. *De grondvergelijking.*

Laat een mechanisch stelsel van n vrijheidsgraden gegeven zijn door zijn kanonische bewegingsvergelijkingen:

[1]) In de theorie van het ZEEMAN-effect, gegeven door SOMMERFELD en DEBIJE (Phys. Zschr. 17. (1916)) stuit men hier op een moeilijkheid. Deze kan, voor zoover ik zien kan, op verschillende manieren omgaan worden; ik ben echter niet in staat een *éénduidige* oplossing aan te geven.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ ;\ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ (i = 1,2,\ldots n)\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

Laten wij meerdere stelsels beschouwen en een functie $\varrho(p_i,q_i,t)$ invoeren, die wij de *waarschijnlijkheidsdichtheid* zullen noemen, dan moet ϱ voldoen aan de „grondvergelijking van de statistische mechanica" [1]):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varrho \dot{p}_i}{\partial p_i} + \frac{\partial \varrho \dot{q}_i}{\partial q_i}\right) = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

of, wanneer wij gebruik maken van (1):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \varrho}{\partial q_i}\dot{q}_i\right) = \frac{d\varrho}{dt} = 0\ .\ .\ .\ .\ (2')$$

ϱ is dus een functie van de integralen der bewegingsvergelijkingen (1).

Veronderstellen wij, dat de toestand stationnair is:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$

dan volgt hieruit: ϱ is een functie van die integralen, die den tijd t niet explicite bevatten, dus van $(2n-1)$ integralen, wanneer slechts, zooals wij steeds zullen veronderstellen, H niet explicite van t afhangt.

Het staat ons vrij onder ϱ zoowel de waarschijnlijkheidsdichtheid a posteriori als ook de waarschijnlijkheidsdichtheid a priori te verstaan. Voor de theorie der quanta luidt ons resultaat: *de quanta-grootheden zijn functies van de* $(2n-1)$ *van* t *onafhankelijke integralen van de vergelijkingen* (1).

Vervangen wij de $2n$-dimensionale phase-ruimte (p_i, q_i) door de overeenkomstige integraalruimte (c_i, t_i) [2]) dan is de „baan" van het stelsel een rechte evenwijdige aan de t_1-as. Wij doorloopen deze rechten, hetzij doordat wij t laten aangroeien, d.w.z. doordat wij een bepaald stelsel op zijn weg volgen, hetzij doordat wij t constant houden en τ varieeren, d.w.z. ons tegelijkertijd alle stelsels voorstellen met bepaalde $c_1, \ldots, c_n, t_2, \ldots, t_n$ en alle mogelijke t_1.

[1]) J. W. GIBBS. Scientific papers. II p. 16; Statistical Mechanics. Chapter I.

[2]) De integralen van de vergelijkingen (1) schrijven wij in den vorm:

$$H = c_1, H_2 = c_2\ ; \ldots, H_n = c_n.$$

en:

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = t + \tau = t_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial c_2} = t_2, \ldots, \frac{\partial V}{\partial c_n} = t_n,$$

waarbij $c_1, \ldots, c_n\ \tau, t_2, \ldots, t_n$ de $2n$ integratieconstanten voorstellen en V de karakteristieke functie van JACOBI voorstelt. Zie mijn verhandeling Akad. Amsterdam. XXVII 1919 p. 908.

§ 2. *H bevat een veranderlijken parameter.*

Bevat H een parameter a, die òf een constante waarde kan bezitten, zooals in het zooeven beschouwde geval, òf langzaam kan veranderen[1]), dan zijn de grootheden c en t_x niet meer constant, maar veranderlijk; de „bewegingsvergelijkingen", waaraan zij moeten voldoen, luiden[2]):

$$\dot{c}_i = -\frac{\partial K}{\partial t_i} \quad ; \quad \dot{t}_i = \frac{\partial K}{\partial c_i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin:

$$K = c_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\dot{a}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

of, wanneer wij bij benadering stellen $\dot{a}$ = const., en door accenten de afgeleiden naar a voorstellen:

$$\left.\begin{aligned} c'_i &= -\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \quad ; \quad t'_x = \frac{\partial}{\partial c_x}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \\ t'_1 &= \frac{1}{\dot{a}} + \frac{\partial}{\partial c_1}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ x = 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix} \quad . \quad (3')$$

Daar de vergelijkingen weder den kanonischen vorm hebben, luidt de „grondvergelijking":

$$\frac{\partial \varrho}{\partial a} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \varrho}{\partial c_i} c'_i + \frac{\partial \varrho}{\partial_i} t'_i\right) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Hier mogen wij niet meer veronderstellen, dat $\frac{\partial \varrho}{\partial a}$ gelijk aan nul is. Wij hebben hier verder de volgende moeilijkheid. Gaan wij uit van een bepaalde rechte evenwijdig aan de t_1-as in de (c_i, t_i) ruimte — een bepaalde „stroomlijn" — en laten wij nu a varieeren, dan wordt, zooals de vergelijkingen (3) resp. (3') doen zien, de stroomlijn verbroken. Laten wij nu a weder een constante waarde behouden en nemen wij de punten bij elkaar, die op een rechte liggen, dan is ϱ langs deze stroomlijn veranderlijk, daar zij punten van verschillenden oorsprong bevat. Op de nieuwe rechte is dus ϱ niet meer stationnair maar van t_1 explicite afhankelijk.

Wij vormen[3]) het tijdgemiddelde van ϱ, en noemen dit $\bar{\varrho}$, en het

[1]) Deze langzaamheid wordt reeds daardoor uitgedrukt, dat H slechts a maar niet het overeenkomstige moment bevat.

[2]) Akad. Amsterdam. l.c.

[3]) Voor de volgende beschouwing zie J. W. GIBBS. Statistical Mechanics. Chapter XIII.

verschil $\bar{\varrho}-\varrho$. Daar $\int d\,t_1\,(\varrho-\bar{\varrho})=0$ is, vertoont de grootheid $\varrho-\bar{\varrho}$ in haar afhankelijkheid van t_1 heuvels en dalen rondom $\bar{\varrho}$, waarbij de som van de heuveloppervlakten gelijk is aan de som der dalen. Ieder punt voert zijn $\varrho-\bar{\varrho}$-waarde met zich mede, dus verschuift de kromme gelijkmatig met den tijd t_1. Een vaststaande kromme vertoont het streven naar verdichting (in een heuvel) of verdunning (in een dal) voor de punten van de stroomlijn, in de veronderstelling dat de verandering van a klein genoeg was. Laten wij onze loopende kromme over de vaststaande glijden, dan komen in den loop van den tijd de heuvels over de dalen en omgekeerd. Een nieuwe kleine verandering van a kan dus tot een vermindering van het verschil $\varrho-\bar{\varrho}$ leiden. Door deze beschouwing kan men ook begrijpen, dat een *voldoende langzame* verandering van a in overeenkomstige benadering (uitgaande van eene stationnaire dichtheid) tot eene stationnaire dichtheid voert. [1]) Wij willen dus veronderstellen, dat a langzaam verandert in den zin zooals in de theorie der adiabatische invarianten vastgesteld. Stellen wij door Da de totale verandering van a voor, dus

$$Da=\dot{a}\int dt$$

en door Dc_i en Dt_i de overeenkomstige veranderingen van c_i en t_i, dan vinden wij (wanneer wij nog in aanmerking nemen, dat

$$\dot{a}=const.,$$

en wij dus kunnen schrijven:

$$\dot{a}=\frac{Da}{Dt} \quad \text{met} \quad (Dt=\int dt):$$

$$\frac{Dc_i}{Da}=-\frac{\partial}{\partial t_i}\overline{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)} \quad ; \quad \frac{Dt_x}{Da}=\frac{\partial}{\partial c_x}\overline{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}, \quad \ldots \quad (6)$$

waarin de streep het tijdgemiddelde aangeeft. Wanneer wij onder c'_i en t'_i in vergelijking (5) deze tijdgemiddelden verstaan, dan vinden wij:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial a}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial c_i}\frac{Dc_i}{Da}+\frac{\partial\varrho}{\partial t_i}\frac{Dt_i}{Da}\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

ϱ is van t_1 onafhankelijk, dus moet in (7) het overeenkomstige lid onder het somteeken weggelaten worden.

[1]) Zie J. M. BURGERS. Akad. Amst. XXV (1916) 849, Ann. d. Phys. 1917 N°. 2 en mijn verhandeling. Akad. Amsterdam. l.c.

§ 3. *Phasenruimte en adiabatische invarianten.*

De stationnaire dichtheid ϱ behoeft niet van alle veranderlijken:

$$c_1, \ldots, c_n \; ; \; t_2, \ldots, t_n$$

af te hangen. Zoo is b.v. ϱ voor een *voorwaardelijk-periodiek stelsel* zonder commensurabele betrekkingen tusschen de periodiciteitsmoduli slechts van de grootheden c_i afhankelijk. Dit volgt uit het *theorema*, dat ons in staat stelt, het tijdgemiddelde door een middeling over een Ω-cel te vervangen [1]). Voor een *ergodisch* (of quasiergodisch) stelsel is ϱ tengevolge van de *ergoden hypothese* slechts van de energie c_1 afhankelijk. Wij willen hier veronderstellen, dat ϱ van k $(k \leq n)$ grootheden afhangt, die wij door

$$c_1, c_2, \ldots, c_k$$

zullen aanduiden. Deze integralen zullen wij *essentieele* integralen noemen. Onze veronderstelling omtrent ϱ komt daarop neer, dat het tijdgemiddelde voor ons systeem door een bepaald getalgemiddelde kan worden vervangen. Om dit getal-gemiddelde te berekenen, gaan wij als volgt te werk:

Laat het stelsel vergelijkingen:

$$H_1 = c_1, H_2 = c_2, \ldots, H_k = c_k \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

naar de grootheden $p_1, p_2, \ldots, p_k$ opgelost kunnen worden:

$$p_\lambda = k_\lambda (q_1, \ldots, q_n, p_{k+1}, p_n ; c_1, \ldots c_k) \; (\lambda = 1,2, \ldots, k) \quad . \quad (8')$$

In de phasen-integraal:

$$I = \iint \ldots \iint dp_1 \ldots dp_n \, dq_1 \ldots dq_n \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

voeren wij in plaats van de differentialen $dp_1 \ldots dp_k$ de differentialen $dc_1 \ldots dc_k$ in en wij vinden:

$$I = \int \ldots \int dc_1 \ldots dc_k \int \ldots \int dp_{k+1} \ldots dp_n \, dq_1 \ldots dq_n \frac{\partial(p_1, \ldots p_k)}{\partial(c_1, \ldots c_k)} \quad (10)$$

of:

$$I = \int \ldots \int dc_1 \ldots dc_k \, \omega(c_1, \ldots c_k) \quad \ldots \ldots \quad (10')$$

waarin:

$$\omega(c_1, \ldots, c_k) = \int \ldots \int dp_{k+1} \ldots dq_n \frac{\partial(p_1, \ldots, p_k)}{\partial(c_1, \ldots, c_k)} \quad . \quad . \quad (11)$$

In deze integraal (11) moet de integratie worden uitgevoerd,

---

[1]) J. M. BURGERS. l.c. en mijn verhandeling l.c.

waarbij de grenzen door (8) bepaald zijn. Wij kunnen van de (p_i,q_i)-ruimte, resp. (c_i,t_i) ruimte tot de k-dimensionale $(c_i, \ldots c_k)$-ruimte overgaan. Een stroomlijn van de eerste ruimte wordt in de laatste in een vast punt afgebeeld. De dichtheid ϱ wordt in de c-ruimte door $\varrho\omega$ vervangen. De elementen van de c-ruimte hebben het *gewicht* ω. De c-ruimte is voor de isoparametrische beweging ($a =$ const.) *statisch*, d. w. z. ieder punt is vast. De integraal (11) geeft ons het gezochte getal-gemiddelde, d. w. z., wanneer f een phase-functie is, dan is:

$$F = \int \ldots \int f \frac{\partial (p_1 \ldots p_k)}{\partial (c_1 \ldots c_k)} dp_{k+1} \ldots dq_n / \omega . \quad . \quad . \quad (11')$$

Keeren wij nu terug tot vergelijking (7); zij luidt nu:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial a} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varrho}{\partial c_i} \frac{Dc_i}{Da} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

want ϱ is slechts een functie van $c_1, \ldots, c_k$. De grootheden $Dc_i/_{Da}$ hangen ook alleen van $c_1, \ldots, c_k$ af, wat uit de vergelijkingen (6) gemakkelijk te zien is, wanneer wij daarin op de rechterzijde het tijd-gemiddelde door het getal-gemiddelde (11') vervangen. Daarom behoudt ϱ zijn eigenschap $\varrho = \varrho (c_1, \ldots, c_k)$ ook bij verandering van a. Vergelijking (12) drukt uit, dat ϱ een functie van die k integralen van de differentiaal-vergelijkingen (6) is, die slechts de grootheden $c_1, \ldots, c_k$ bevatten. Deze integralen worden verkregen door integratie van het stelsel van k differentiaal-vergelijkingen, die links de grootheden $Dc_i/_{Da}$ ($i = 1,2, \ldots, k$) bevatten. Zij zijn de *essentieele adiabatische invarianten*. Wij vinden dus het resultaat: *ϱ is een functie van de essentieele adiabatische invarianten.*

Laten wij ons nu met de beschouwing van de c-ruimte bezighouden. Als a langzaam veranderlijk is, dan komen de vaste punten van deze ruimte in beweging. Daar bij deze beweging de punten noch verdwijnen noch nieuw worden gevormd, moet de dichtheid $\varrho\omega$ voldoen aan de continuiteits-vergelijking, d. w. z. onze grondvergelijking. Daar $\varrho =$ const. in elk geval een mogelijke oplossing is, moet ω op zich zelf aan deze vergelijking voldoen:

$$\frac{\partial \omega}{\partial a} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \omega \bar{c}'_i}{\partial c_i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

waarin

$$\bar{c}'_i = \frac{Dc_i}{Da}$$

Of met de schrijfwijze:

$$\frac{D\omega}{Da} = \frac{\partial\omega}{\partial a} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial\omega}{\partial c_i}\frac{Dc_i}{Da},$$

$$\frac{D\omega}{Da} + \omega \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial c'_i}{\partial c_i} = 0, \qquad \qquad (13')$$

of:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial c'_i}{\partial c_i} = -\frac{1}{\omega}\frac{D\omega}{Da} \qquad \qquad (13'')$$

Wij zullen nu voor de aan de linkerzijde staande grootheid — „de divergentie" — een andere uitdrukking afleiden.

De essentieele adiabatische invarianten — hun aantal bedraagt k — voldoen aan de vergelijkingen:

$$\frac{Dv_i}{Da_i} = \frac{\partial v_i}{\partial a} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial v_i}{\partial c_i} c'_i \quad (i = 1,2,\ldots,k). \qquad (14)$$

Wij willen veronderstellen, dat de grootheden v_i in de grootheden $c_\lambda (\lambda = 1, 2, \ldots, k)$ kunnen worden uitgedrukt:

$$\frac{\partial (v_1, \ldots, v_k)}{\partial (c_1, \ldots, c_k)} = \Upsilon \neq 0 \qquad \qquad (15)$$

Het gedrag van ons systeem kan even goed door de grootheden v_i als door de grootheden c_i worden beschreven. De $(v_1, \ldots, v_k)$-ruimte heeft boven de c-ruimte het voordeel ook met betrekking tot de werking van adiabatische invloeden *statisch* te zijn. Hoe verhouden zich deze beide ruimten tot elkaar?

Wij beschouwen de D-afgeleide van de determinante Υ:

$$\frac{D\Upsilon}{Da} = \sum_{i\mu} V_{i\mu} \frac{Dv_{i\mu}}{Da}, \qquad \qquad (16)$$

waarin $v_{i\mu} = \dfrac{\partial v_i}{\partial c_\mu}$ en $V_{i\mu}$ de overeenkomstige onder-determinante voorstelt. Nu geldt identiek:

$$\frac{Dv_i}{Da} = \frac{\partial v_i}{\partial a} + \sum_\lambda \frac{\partial v_i}{\partial c_\lambda} c'_\lambda = 0,$$

dus

$$\frac{\partial}{\partial c_\mu}\frac{Dv_i}{Da} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial a\, \partial c_\mu} + \sum_\lambda \frac{\partial^2 v_i}{\partial c_\lambda \partial c_\mu} c'_\lambda + \sum_\lambda \frac{\partial v_i}{\partial c_\lambda}\frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\mu} = 0 \qquad (a)$$

en anderzijds

$$\frac{D}{Da}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial a\, \partial c_\mu} + \sum_\lambda \frac{\partial^2 v_i}{\partial c_\mu \partial c_\lambda} c'_\lambda \qquad \qquad (b)$$

Uit (a) en (b) volgt:

$$\frac{D}{Da}\frac{\partial v_i}{\partial c_\mu} = \frac{Dv_{i\mu}}{Da} = -\sum_\lambda \frac{\partial v_i}{\partial c_\lambda}\frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

of:

$$\frac{Dv_{i\mu}}{Da} = -\sum_{\lambda=1}^{k} v_{i\lambda}\frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17')$$

Substitueeren wij dit in (16), dan vinden wij:

$$\frac{D\Upsilon}{Da} = -\Sigma\, v_{i\lambda}\, V_{i\mu}\,\frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\mu} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16')$$

Nu is $\sum\limits_i v_{i\lambda} V_{i\mu}$ gelijk aan nul voor $\lambda \neq \mu$ en gelijk aan Υ voor $\lambda = \mu$:

$$\frac{D\Upsilon}{Da} = -\Upsilon\Sigma\frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\lambda} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16'')$$

Dus:

$$\sum_\lambda \frac{\partial c'_\lambda}{\partial c_\lambda} = -\frac{1}{\Upsilon}\frac{D\Upsilon}{Da} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16''')$$

Vergelijken wij deze uitdrukking met (13''), dan volgt hieruit:

$$\frac{1}{\Upsilon}\frac{D\Upsilon}{Da} = \frac{1}{\omega}\frac{D\omega}{Da} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

of:

$$\frac{D}{Da}\log\frac{\Upsilon}{\omega} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18')$$

Wij hebben dus de stelling: Υ/ω *is een adiabatische invariante*, d. w. z.

$$\Upsilon = \omega f(v_1, \ldots, v_k), \qquad \omega = \Upsilon F(v_1, \ldots, v_k) \quad . \; . \; . \quad (18'')$$

Substitueeren wij de waarde van ω in de integraal (10'), dan vinden wij:

$$I = \int\!\!\ldots\!\!\int dc_1 \ldots dc_k\, \Upsilon F(v_1, \ldots, v_k) = \int\!\!\ldots\!\!\int dc_1, \ldots, dc_k \frac{\partial(v_1 \ldots v_k)}{\partial(c_1 \ldots c_k)} F. \quad (19)$$

of:

$$I = \int\!\!\ldots\!\!\int dv_1 \ldots dv_k\, F(v_1, \ldots, v_k) \quad . \; . \; . \; . \quad (19')$$

Nu kunnen wij altijd maken, dat F gelijk aan 1 wordt. Tot dit doel behoeven wij slechts in plaats van één v_i, b.v. v_1, de adiabatische invariante

$$r_1 = \text{funct.}\,(v_1, \ldots, v_k)$$

in te voeren en deze te onderwerpen aan de voorwaarde:

$$\frac{\partial v_1}{\partial v_1} = F(v_1, \ldots, v_k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wij vinden dan:

$$\frac{\partial v_1}{\partial c_\lambda} = \sum_x \frac{\partial v_1}{\partial v_x}\frac{\partial v_x}{\partial c_\lambda} = \sum_x \frac{\partial v_1}{\partial v_x} v_{x\lambda}$$

$$\Upsilon^* = \frac{\partial(v_1, v_2, \ldots, v_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)} = \sum_\lambda \frac{\partial v_1}{\partial c_\lambda} V_{1\lambda} = \sum \frac{\partial v_1}{\partial v_x} V_{1\lambda} v_{x\lambda} = \frac{\partial v_1}{\partial v_1} \Upsilon,$$

of, wanneer wij voor Υ zijn waarde ω/F substitueeren:

$$\Upsilon^* = \omega \frac{\partial v_1}{\partial v_1} \frac{F}{1} = \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Verstaan wij onder $v_1, \ldots, v_k$ het op deze wijze *genormeerde stelsel van de essentieele adiabatische invarianten*, dan wordt:

$$I = \int \ldots \int dv_1 \ldots dv_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

De ten opzichte van adiabatische inwerking statische v-*ruimte* is „*gewichtsvrij*". De dichtheid ϱ ervan is eenvoudig gelijk aan $\varrho(v_1, \ldots, v_k)$. De grootheden $v_1, \ldots, v_k$ *mogen* gequantiseerd worden. Haar eigenschap, die door formule (22) wordt uitgedrukt, is de door PLANCK opgestelde grondstelling, waaraan de quanta-grootheden moeten gehoorzamen [1]). Door onze stelling (18″) is deze hypothese met de adiabatische invarianten in verband gebracht en wordt daardoor opnieuw bevestigd. De eigenschap van de v-ruimte „gewichtsvrij" te zijn doet deze grondstelling als een natuurlijke generalizeering van de oude hypothese der quanta uitkomen.

§ 4. *Over coherentie der vrijheidsgraden.*

Van het nu verkregen standpunt uit vertoont zich dit belangrijke begrip als een heel natuurlijk gevolg van onze veronderstellingen. Is het getal k — het aantal der essentieele integralen en adiabatische invarianten — kleiner dan het aantal der vrijheidsgraden n, dan moeten noodzakelijk, zooals uit (22) blijkt, eenige van de grootheden v_i van de dimensie h^p ($p > 1$) zijn, want de dimensie van I is h^n. Om dit en het voorafgaande te illustreeren, willen wij de eigenschappen van een ergode van BOLTZMANN en van een *voorwaardelijk periodiek* stelsel (zonder commensurable betrekkingen) tegenover elkaar stellen:

---

[1]) M. PLANCK. l.c.

ergode	*voorwaardelijk periodiek systeem*
essentieele integralen	
$H = c_1$	$H_1 = c_1,\ H_2 = c_2, \dots, H_n = c_n.$
het getalgemiddelde	
$\int\dots\int dp_1\dots dp_n\,dq_1\dots dq_n\,\frac{\partial p_1}{\partial c_1}$. (23)	$\int\dots\int dq_1\dots dq_n\,\frac{\partial(p_1,\dots,p_n)}{\partial(c_1,\dots,c_n)}$ (23')
de dichtheid	
$\varrho = \varrho(c_1, a)$	$\varrho = \varrho(c_1,\dots,c_n; a)$
essentieele adiabatische invarianten	
$V = \underset{H<c_1}{\int\dots\int} dp_1\dots dq_n$	$v_i = \int_0 p_i\,dq_i\ (i = 1, 2, \dots, n).$
de dichtheid	
$\varrho = \varrho(V)$	$\varrho = \varrho(v_1, v_2, \dots, v_n)$

Het voorwaardelijk periodieke stelsel is een *subergode* in den zin van BOLTZMANN. Anderzijds komt de ergode te voorschijn als een *coherent* stelsel met een minimum waarde voor k, $k = 1$. Met deze kleine aanwijzingen wil ik hier volstaan.

§ 5. *Ontaarding.*

Een voorwaardelijk periodiek stelsel wordt ontaard genoemd wanneer tusschen de periodiciteits-moduli er van commensurabele betrekkingen bestaan. Het is duidelijk, dat in dit geval door ons stelsel een *lagere* puntverzameling met zijn baankromme overal dicht overdekt wordt, dan in het geval, dat de commensurabele betrekkingen ontbreken. In overeenstemming hiermede zal het getal-gemiddelde een lagere dimensie bezitten en er zullen dus na het middelingsproces meer grootheden vrij blijven. Daarom zullen behalve de grootheden c ook de grootheden t van beteekenis zijn; het aantal der essentieele adiabatische invarianten wordt grooter dan het aantal der vrijheidsgraden. Of deze overtollige grootheden gequantiseerd moeten worden, zullen wij hier niet nagaan. Een goed voorbeeld voor de kwesties, die zich hierbij kunnen voordoen, wordt geleverd door de quanta-grootheden in de theorie van EPSTEIN[1]) van het Stark-effect voor een oneindig zwak uitwendig electrisch veld: „parabolische" quanta-grootheden, die hierbij gevonden worden, kunnen niet worden voorgesteld als functies van de „sferische" quanta-grootheden van SOMMERFELD alleen; hier zijn juist nog andere adiabatische invarianten, die de grootheden t_1 en t_2 bevatten essentieel.

[1]) P. EPSTEIN. Ann. d. Phys. 50. p. 490.

Ik ben mij er wel van bewust, dat door het hierboven behandelde de moeilijkheden, die de theorie der quanta nog in den weg staan, in 't geheel niet opgeheven maar slechts verschoven worden. Intusschen schijnt het mij, dat reeds de mogelijkheid van zulk eene verschuiving eenige aandacht verdient. Ook denk ik, dat in *speciale* gevallen de hier bij wijze van proef geschetste algemeene stellingen en beschouwingen van nut kunnen zijn.

Petrograd, 1 April 1920. *Universiteit Natuurk. Labor.*

Dierkunde. De Heer J. F. VAN BEMMELEN doet eene mededeeling over: *„De kleurenteekening der mimetische vlinders".*

In mijne mededeeling „On the phylogenetic significance of the wing-markings of Rhopalocera" op het tweede Internationale Entomologen-congres te Oxford in 1912, maakte ik in 't voorbijgaan de opmerking dat „bij het nagaan der reeksen van dagvlinders met het oog op soorten, die het oorspronkelijke kleurenpatroon vertoonden, ik zeer getroffen werd door het aanmerkelijk percentage van mimetische vormen onder mijn oogst. Hierdoor kwam ik op de gedachte, dat mimetisme, tenminste tot zekere hoogte en voor een beperkt aantal gevallen, zou kunnen verklaard worden door de veronderstelling, dat de gelijkenis tusschen twee of meer niet naderverwante vormen reeds van een zeer vroeg stadium dateerde, toen de voorouderlijke vormen der verschillende dagvlinder-families nog meer met elkaar overeenkwamen dan thans, tengevolge van het oorspronkelijke kleurenpatroon, dat aan alle gemeenschappelijk was".

Sinds die dagen heb ik getracht mijne voorstellingen omtrent den waren aard van oorspronkelijkheid in kleurenteekening te verduidelijken en uit te breiden, bepaaldelijk door een tot in bijzonderheden afdalende analyse van het vleugelpatroon bij primitieve vormen zooals de Hepialiden, en door de vergelijking van dat patroon met de teekening van het lichaam der vlinders. Door deze onderzoekingen ben ik tot een gewijzigde opvatting omtrent primitiviteit in teekening gekomen: ik beschouw thans de aanwezigheid van in rijen gerangschikte eenvormige vlekken, die regelmatig tusschen de vleugeladeren geplaatst en over de geheele oppervlakte verdeeld zijn, als een nog oorspronkelijker toestand dan de samentrekking der teekening tot een streep over de middellijn der tusschenadercellen.

Maar dit doet in 't minst geen afbreuk aan mijn overtuiging, dat ook dit laatste patroon een hoogen graad van oorspronkelijkheid heeft behouden, en dat zijn oorsprong veel verder terug ligt dan de aanvangsstadien der genera en families van de Lepidoptera, ja zelfs dan die der geheele Vlinderklasse zelf.

Sedert dien tijd is het Groningsche Zoologische Laboratorium in het bezit gekomen van de prachtige vlinderverzameling van wijlen den Heidelberger Anatoom MAX FÜRBRINGER, en daardoor was ik beter in de gelegenheid om voorbeelden van mimetische vlinders in

natura te bestudeeren. Dit deed bij mij den wensch opkomen om mij met het vraagstuk van 't Mimetisme in 't algemeen bezig te houden, maar dan uitsluitend beschouwd uit een zuiver morphologisch oogpunt. Ik wensch mij dus zorgvuldig ver te houden van de biologische zijde der quaestie, ofschoon ik misschien wel zou mogen verklaren, dat ik mij niet goed kan voorstellen hoe de vaak zoo treffende uitwendige gelijkenis tusschen samenlevende vormen uit ver van elkaar afstaande groepen, in den strijd om 't bestaan geen voordeelen zou meebrengen, 't zij voor één hunner of voor allebei, of tenminste dat dit in vroeger tijdperken van hun bestaan niet het geval zou geweest zijn. Ik wensch mij dus te beperken tot een zorgvuldige vergelijkende analyse van het kleurenpatroon, maar voordat ik mij daarin begeef, zij opgemerkt, dat m.i. het verschijnsel der mimetische gelijkenis nooit kan toegeschreven worden aan de werking eener algemeene wet, en dat derhalve de verschillende gevallen van Mimicry elk voor zich, onafhankelijk van elkaar, beschouwd moeten worden. Dat b.v. een Sesia op een wesp gelijkt, kan onmogelijk in eenig genetisch verband staan met de mimetische overeenkomst tusschen een Dismorphia en een Ithomiïde of Heliconide, of tusschen een reeks van soorten van een der laatstgenoemde families onderling.

Zelfs laat zich dit voorkomen van wesp-achtige Sphingiden bezwaarlijk in verband brengen met het bestaan van andere leden dier zelfde familie, die de gedaante van hommels schijnen aangenomen te hebben.

Mimetische gelijkenissen moeten derhalve beschouwd worden als toevalligheden, en uit dat oogpunt beschouwd is gemakkelijk in te zien, dat juist wegens het groot aantal voorwaarden waaraan voldaan moest zijn, voordat een geval van echte bedriegelijke nabootsing tot stand kon komen, hun aantal zoo betrekkelijk gering is, en zij oogenschijnlijk zoo wispelturig over het dierenrijk verspreid zijn, (zooals Rebel zoo treffend heeft in 't licht gesteld).

Hoezeer ik zooals gezegd, geneigd ben te erkennen, dat een bedriegelijke oppervlakkige gelijkenis tusschen mimic en model hoogstwaarschijnlijk wel een belangrijk voordeel zal meebrengen, hetzij voor den eerste alleen, of voor al de leden van een z.g. mimetische groep gezamenlijk, zoo ben ik toch aan den anderen kant overtuigd, dat het onmogelijk is zich een onpartijdig oordeel te vormen, wanneer men niet begint met zich zorgvuldig te onthouden van alle overwegingen over dit hypothetische en problematische voordeel, en zich te beperken tot de beschouwing der mimetische vormen uit een zuiver morphologisch oogpunt, 't geen zeggen wil dat men op hen juist dezelfde methoden en regels van onderzoek moet toepassen, die

bruikbaar gebleken zijn bij het nagaan der kleurenpatronen van de Insecten in 't algemeen, en dat men ze moet toetsen aan de wetten, die men uit die algemeene studie heeft afgeleid.

Tot dit besluit worden wij ook logisch gebracht door de waarneming, dat mimetische patronen in geen enkel opzicht verschillen van kleurenteekeningen in 't algemeen, maar integendeel met de niet-mimetische patronen in alle opzichten overeenstemmen, wanneer men tenminste deze laatste uit een algemeen oogpunt beziet. Alleen wanneer men de mimicristen uitsluitend vergelijkt met hunne naaste niet-mimetische verwanten, leden van hetzelfde genus of zelfs van dezelfde soort (b.v. in 't geval van polygynomorphe soorten met mimetische wijfjes) stuit men op zekere gevallen, waar de eerste ver schijnen af te wijken van het gemeenschappelijke generieke type, ofschoon zelfs daarbij geen sprake kan zijn van een algemeenen regel. Nu wordt door de aanhangers der Mimicry-hypothese deze schijnbare afwijking van het oorspronkelijke patroon toegeschreven aan de voortdurende ophooping van variaties in de gewenschte richting, onder den invloed van natuurkeuze, waardoor een steeds meer volmaakte, ofschoon geheel oppervlakkige en schijnbare gelijkenis met het model zou worden teweeggebracht.

Om deze hypothese te kunnen aanvaarden, is het klaarblijkelijk noodig eerst te bewijzen, dat werkelijk de mimicristen van het oorspronkelijke gemeenschappelijke genustype zijn afgeweken. Wij mogen derhalve deze afwijking niet a priori als een vaststaand feit aannemen, maar moeten trachten het oorspronkelijke gemeenschappelijke type van genus of familie te reconstrueeren, door een volkomen onpartijdig vergelijkend onderzoek van al de bestaande leden van zulk een groep, mimetische zoowel als niet-mimetische, waarbij ze uitsluitend te beoordeelen zijn naar de kenmerken hunner kleurenteekening, zonder acht te slaan op vermoedelijke biologische voordeelen die uit het bezit dier teekening mogelijkerwijze konden voortspruiten.

De waarde dezer opvatting laat zich het best aan bepaalde voorbeelden aantoonen. In de vermaarde verhandeling van Bates over de mimetische gelijkenis tusschen leden van het Pieriden-geslacht Dismorphia (Bates gebruikt den naam Leptalis) en zekere Zuid-Amerikaansche Ithomiïden en Heliconiden, geeft de schrijver naast de afbeeldingen der mimetische vormen ook een van een volslagen witte soort van dit genus, en merkt in de plaatverklaring met zoovele woorden op, dat wij in deze laatste het oorspronkelijke type der Pieriden-familie te zien hebben. Daaruit blijkt dus afdoende, dat hij de mimetische vormen als ver afgeweken van dit type beschouwt.

In het voortreffelijke kritische overzicht over het vraagstuk der

Mimicry, dat PUNNETT in zijn boek Mimicry in Butterflies geeft. bevestigt hij deze opvatting, waar hij zegt: „Wij komen terug op onze Pierine, waarvan wij" (d.w.z. de aanhangers der Mimicry-hypothese) „moeten aannemen, dat zij de algemeene karakteristieke kenmerken en de kleuring der familie van de W i t j e s, waartoe zij behoort, vertoont"... en verder: „Als zij echter deze hun n o r m a l e uniform konden verwisselen voor eene die geleek op die der Ithomiïden". (Ik spatieer).

Nu heeft BATES zeker geen oogenblik gedacht aan de mogelijkheid, dat het geval ook juist omgekeerd kon wezen, n.l. dat de mimics juist de meer oorspronkelijke, minst veranderde vormen konden vertoonen, terwijl de witte Pieriden, onder den overheerschenden invloed van albinistische verkleuring, aanmerkelijk daarvan afgeweken konden zijn.

Om tot een keuze tusschen deze twee opvattingen te komen, moeten wij dus in de eerste plaats een zorgvuldig en volledig onderzoek instellen naar de verschillende kleurenpatronen van al de leden van het genus Dismorphia en van verschillende andere Pieriden-geslachten. Daarna moeten wij trachten een goed inzicht te krijgen in den waren aard der verschillen tusschen de mimetische en niet-mimetische leden van dit geslacht. Die verschillen kunnen wij samenvatten onder drie hoofden: onderscheid in patroon, in kleurentinten en in gedaante.

Als wij met de eerste beginnen, mogen wij uitgaan van de bewering, dat voor een werkelijk objectieve analyse der kleurenpatronen als eisch mag gesteld worden, dat het geheele samenstel der teekeningen met al zijn bijzonderheden in acht wordt genomen. Wij hebben dus evengoed te letten op de onder- als op de bovenzijde, en evenveel gewicht te hechten aan die kenmerken, waarin de mimics van hunne modellen verschillen, als aan diegene, waarin zij met hen overeenstemmen. Beschouwd vanuit dit standpunt, dat tot nu toe slechts zelden is ingenomen, komen wij gemakkelijk tot het besluit, dat al de elementen, die samenwerken tot de vorming der patronen in de mimetische vlinders, terug te vinden zijn in die hunner niet-mimetische verwanten, en dat zij dus moeten gerekend worden onder de kenmerkende eigenaardigheden van het genus of de familie waartoe die mimics behooren.

Dezelfde opmerking is eveneens toepasselijk op de bijzondere kleurentinten welke de mimics vertoonen, en zelfs op hun somtijds schijnbaar afwijkenden habitus.

Als b.v. de mimetische Dismorphia's er heel anders uitzien dan de meerderheid der tot dit genus behoorende soorten, omdat hun

lichaam veel slanker is en hunne vleugels langer en smaller zijn, dan mogen wij wel ernstig de vraag stellen, of zulk een vorm van vlinder te beschouwen is als een afwijking van het normale, instede van als vanzelf sprekend aan te nemen, dat die vraag al in bevestigenden zin is opgelost. Dat een zoodanige vorm afwijkt van het meest voorkomende type, valt niet te ontkennen, maar sedert wanneer mag bloote „gewoonheid" aangezien worden voor een bewijs van primitiviteit? Stellen soms de Monotremen een ver-afdwalend en diep-gewijzigd type van Zoogdieren voor, op grond dat hun aantal (op 't oogenblik) tot twee families is beperkt? De breede, eenigszins vierkante gedaante van de meerderheid der Rhopalocera, met hunne afgeronde achter- en driehoekige voorvleugels, waartusschen een kort lichaam verborgen zit, mag veel eerder zelf als een wijziging opgevat worden van den slanken smalvleugeligen vorm met uittredend achterlijf, zooals wij dien aantreffen bij zoovele Sphingiden en Heterocera, in 't bijzonder zulke bij uitstek primitieve vormen als de Hepialiden. Zelfs onder de Rhopalocera is deze laatste gedaante geen zeldzame uitzondering: zij overheerscht integendeel in meerdere families, b.v. de Ithomiïden en Heliconiden. Wat de gedaante der dieren aangaat, zou dus de gelijkenis tusschen de laatstgenoemde modellen en hunne nabootsers uit het genus Dismorphia veilig kunnen toegeschreven worden aan het feit, dat beide getrouw gebleven waren aan den oorspronkelijken vorm der Lepidoptera. De ouderdom van deze gedaante zou zelfs ver over de grenzen van die orde kunnen terugreiken, want diergelijke omtreklijnen hebben ook de overhand in meerdere andere orden van Insecten, juist in diegene die minder gespecialiseerd zijn, b.v. Odonata, Neuroptera, Trichoptera.

Als wij nog eens op het punt der kleurteekening terugkomen, is gemakkelijk in te zien, dat wit allerminst als de meest oorspronkelijke kleur in de familie der Pieridae behoeft beschouwd te worden. Meerdere andere kleuren, bepaaldelijk rood, geel, bruin en zwart, komen even veelvuldig voor, vooral op de onderzijde. Alleen haar overmachtige neiging om zich over groote gebieden der vleugeloppervlakte te verbreiden, en daarbij de oorspronkelijke teekening door albinistische verkleuring uit te wisschen, geeft in dit genus aan de witte tint zulk een vooraanstaande plaats in de kleurenschaal. Maar diezelfde rol wordt in meerdere gevallen door alle overige tinten evengoed gespeeld. In dit opzicht verdient het zeker onze aandacht, dat DIXEY, de voortreffelijke Pieriden specialiteit, in zijne verhandeling over de phylogenie van het kleurenpatroon dezer familie, niet uitgaat van een eenvormig witten grondvorm, maar van donkerkleurige, regelmatig gevlekte soorten zooals *Eucheira* en *Archonias*.

Van al de talrijke voorbeelden van Mimicry schijnt mij het verbazingwekkende geval van *Papilio dardanus*, „met zijn harem van onderling verschillende gemalinnen, alle zonder staarten, alle ongelijk aan het mannetje, en vaak wonderlijk gelijkend op oneetbare vormen, die in dezelfde streken worden aangetroffen" (PUNNETT, Mimicry), bijzonder geschikt om de deugdelijkheid mijner opvatting te toetsen. Zooals PUNNETT vooropstelt: „Uit (een) lange reeks van feiten wordt afgeleid, dat het mannetje van *P. dardanus* den oorspronkelijken vorm van beide sexen vertegenwoordigt".

Naar mijne opvatting mag zulk een gevolgtrekking uitsluitend berusten op zoodanige „feiten", als betrekking hebben op het kleurenpatroon van het mannetje en van de onderscheidene wijfjes, vergeleken zoowel met elkaar als met die hunner mede-Papilioniden. Maar de bovenbedoelde „feiten" zijn van een geheel anderen aard, en wel van een zoodanigen als op zulke beschouwingen in 't geheel niet van toepassing is Immers zij houden verband met de mimetische gelijkenis der wijfjes op Danaiden-modellen, en hare oogenschijnlijke afwijking van de groote meerderheid der Papilionidae, terwijl bij een onpartijdig onderzoek van de betrekkingen tusschen de kleurenteekening van het mannetje en die zijner veelvormige wijfjes de quaestie der beschermende nabootsing m.i. geheel buiten beschouwing behoort gelaten te worden. Als men zich nauwgezet aan dit beginsel houdt, en uitsluitend op de algemeene regels voor de beoordeeling van het kleurenpatroon let, komt men noodwendigerwijze tot het besluit, dat het mannetje, instede van den oorspronkelijken vorm te vertegenwoordigen, integendeel de meest gewijzigde is.

De tegenovergestelde meening schijnt voornamelijk te berusten op de onbewuste vatbaarheid van den menschelijken geest voor eerste indrukken. Wij zijn zoozeer gewoon om het type van een Papilionide te vereenzelvigen met dat van den ons van ouds bekenden Zwaluwstaart (Page de la Reine), dat wij onwillekeurig geneigd zijn die leden der familie, welke door 't bezit van staarten, door de karakteristieke teekening van den binnenhoek der achtervleugels, door hun gele en zwarte tinten, kortom door hun typisch pageachtig uiterlijk, het dichtst bij den oogenschijnlijken grondvorm komen, ook als de oorspronkelijke vertegenwoordigers der familie te beschouwen. Maar als wij een algemeenen blik over het geheel werpen, ontmoeten wij een groot aantal vormen, bij welke de staarten ontbreken, 't zij in beide sexen of in één harer, en in 't laatste geval behoeven het niet uitsluitend de vrouwtjes te zijn die deze achtervleugelaanhangsels missen; bij *P. memnon* b.v. zien wij

het tegenovergestelde. Daarbij behoort ook niet over 't hoofd te worden gezien, dat in nauw verwante groepen zooals de Ornithoptera, Zalmoxis en Druryia, die om goede redenen beschouwd worden als in velerlei opzichten zeer primitief, er geen de minste aanduiding is van staarten. En als wij denken aan den oorspronkelijken grondvorm der Rhopalocera in 't algemeen, kunnen wij moeilijk aannemen, dat deze reeds zulke op den voorgrond tredende aanhangsels aan de achtervleugels zou bezeten hebben.

Ofschoon alle mannetjes van *P. dardanus*, evenals een deel der (niet-mimetische) wijfjesvormen, kunnen beschouwd worden als te beantwoorden aan een en hetzelfde type, zoo is er toch geen twijfel aan, dat dit type in hooge mate variabel is, en dat de aard dier variabiliteit in de richting ligt van het patroon der mimetische wijfjes. Wij mogen derhalve die mannetjes, wier teekening wat uitbreiding en rangschikking aangaat het meest tot die der genoemde wijfjes nadert, als de minst veranderde beschouwen. Deze bewering blijkt nu overeen te stemmen met de algemeene opvatting, dat afwezigheid of beperktheid van teekening een gevolg is van uitwissching, doordien bepaalde tinten van hun oorspronkelijke centra uit zich over naburige gebieden verspreiden. Bij het mannetje van *P. dardanus* is het de gele tint die de overmacht krijgt, en die de zwarte merken, soms tot algeheele uitwissching toe, wegvaagt. Dienovereenkomstig mag men aannemen dat rassen als *meriones*, *tibullus* en *trimeni*, bij welke het zwart een grootere uitbreiding bezit, den meer oorspronkelijken vorm der mannelijke sexe vertoonen. Vergelijkt men nu deze varieteiten met mimetische wijfjes, dan blijkt dat zij met deze meer punten van overeenkomst bezitten dan de meer éénkleurig gele mannetjes, en dat de bepaalde eigenaardigheden, waarin zich deze nadere overeenkomst verraadt, juist die bijzonderheden van het kleurenpatroon betreft, waarin de wijfjes van het z.g. specifieke *dardanus*-type afwijken, en waardoor hare schijngelijkenis met Danaiden wordt teweeggebracht.

Beschouwen wij, om deze bewering toe te lichten, den smallen zwarten zoom langs den voorrand der voorvleugels bij het mannetje en bij die wijfjes, welke in type daarmee overeenstemmen. Bij enkele exemplaren van het z.g. typische *Dardanus*-patroon vindt men ongeveer op het midden van dezen zoom, proximaal van de discoidale dwarsader, een nauwelijks waarneembare verdikking. Bij *tibullus* daarentegen valt deze aanzwelling veel meer in 't oog, bij *meriones* en *antinorii* kan ze de achtergrens van de discoidale cel bereiken, bij *trimeni* neemt ze de gestalte aan van een zwarten dwarsbalk, die schuin in buiten- en achterwaartsche richting doorloopt tot aan den

breeden donkeren zoom langs den vleugelbuitenrand, en zoodoende het gele veld in twee deelen snijdt, een voorste kleiner en een achterste grooter stuk.

In Fig. 4 p. 13 van HAASE's „Untersuchungen über die Mimicry auf Grundlage eines Natürlichen Systems der Papilioniden" (Bibl. Zool. III 1893) wordt deze dwarsbalk met de cijfers IV—V aangegeven.

Vergelijkt men nu den *trimeni*vorm met de vrouwelijke varieteiten *cenea*, *acene*, *niavina*, *ruspinae*, *trophonius*, *trophonissa*, *hippocoon*, *hippoconoides*, dan blijkt duidelijk, dat bij alle deze dwarsbalk evengoed aanwezig is, maar dat hij, in zijn distaal gedeelte buiten het gebied der discoidale cel, zich verbreedt door versmelting met den aangrenzenden meer distaal gelegen zwarten band, die de discoidale dwarsader markeert, (HAASE's Terminalband). Tengevolge dier versmelting beslaat de balk het proximale gedeelte van vier opvolgende tusschen-adercellen (R_5, M_1, M_2, M_3 = HAASE's VR 1 + 2 + 3+4).

Door zijn aanwezigheid wordt het licht gekleurde middelveld in twee deelen gesplitst, een kleiner topveld en een grooter, meer of minder driehoekig gebied langs den achter- of binnenrand van den voorvleugel, welk laatste zonder afscheiding overgaat in de lichte streek, die het proximale deel van den achtervleugel beslaat. Deze verdeeling is een der meest in 't oogloopende trekken, waardoor de gelijkenis met de Danaiden wordt teweeggebracht, maar het zou in het geheel niet aangaan om het voorkomen van den dwarsbalk toe te schrijven aan secundaire afwijking van het origineele soorts-type onder den invloed van natuurkeuze in verband met Protective Mimicry. Want deze balk komt eveneens voor bij de wijfjes van een aanzienlijk aantal naverwante soorten, o. a. *cynorta*, *homeyeri*, *jacksoni*, *ucalegon*, *auriger*, *agamedes*, wier mannetjes, tenminste voor een gedeelte, een onafgebroken keten van lichte tusschenadervlekken vertoonen, welke van voor naar achter in afmeting toenemen, en op den achtervleugel bij sommige met elkaar versmelten tot één lichtkleurig veld.

Deze vlekken worden van elkaar gescheiden door longitudinale donkere strepen: de meer of minder sterk gepigmenteerde vleugeladeren.

De lichte vlek in het donkere apicale veld van den voorvleugel bij *P. dardanus* is niets anders dan de voorste van bovengenoemde reeks, zij beslaat de tusschenruimte tusschen de wortels van den 4den en 5den radialis-tak (de z.g. vorkader), en het maakt den indruk alsof deze plaatsing iets te maken zou kunnen hebben met de

grootere bestendigheid dier vlek, waardoor zij zichtbaar blijft, ook als al de andere zijn weggevaagd, hetzij door lichte of door donkere verkleuring. Toch is ook deze apicale vlek niet voor verkleining of algeheele uitwissching gevrijwaard: in sommige exemplaren van alle vormen van *dardanus*, mannelijke zoowel als vrouwelijke, kan zij tot een stipje zijn teruggebracht of geheel ontbreken. (verg. b.v. de afbeelding van het *trophonius*-wijfje op PUNNETT's Pl. VIII).

Verder is de bovenbeschreven dwarsbalk in zijn voorkomen niet beperkt tot *dardanus* en zijn naaste verwanten: hij komt evenzeer voor bij een aantal andere Papilionidae, b.v. *hesperus*, *pelodurus* e.a.

In tal van andere gevallen is de aanleg tot de vorming van zulk een donkeren dwarsbalk evengoed voorhanden, maar leidt hij niet tot zulk een scherp omschreven afscheiding tusschen een voorst en een achterst licht gekleurd veld. In *epiphorbas* b.v. is de voorvleugel bijna geheel zwart, op één centraal gelegen, haaks geknikt veldje na, dat groen gekleurd is. Het voorste been van dezen hoek wordt gevormd door de lichte tusschenruimte tusschen den terminaalband en de 3^de^ discoidale vlek, het achterste door de overschotten van drie leden der bovenvermelde keten van lichte tusschenadervlekken.

Zoo kan men ook sporen van den dwarsbalk opmerken in vormen als *theorinis*, *latreillanus*, *ansorgii*, *phorcas*, *oribazus*, *choropus*, en komt men tenslotte tot het inzicht, dat een neiging tot onderbreking der keten van lichte tusschenadervelden zich openbaart in een groot aantal verschillende leden der Papilioniden-familie. Ook blijkt, dat deze neiging zich niet beperkt tot diegene, wier kleurenteekening beantwoordt aan het driedeelig type (lichte middenbaan, donkere randzoom en wortelveld), maar evengoed aanwezig is in rijkgevlekte vormen zooals *cyrnus*, *demodocus*, *rex*, *mimeticus*, *ridleyanus*, ja zelfs in regelmatig gechrevroneerde, zooals *antimachus*.

In de meerderheid der laatstgenoemde vlinders beperkt zich de neiging tot onderbreking der keten van lichte tusschenadervlekken tot een reductie in grootte van één of twee dezer, ter hoogte van de plaats waar de dwarsbalk moest loopen: één bij *antimachus* en *mimeticus*, twee bij *rex*.

Wanneer wij de bovenontwikkelde beschouwingen toepassen op andere bijzonderheden van het patroon, komen wij steeds weer tot hetzelfde besluit. Bij uitstek overtuigend is b.v. de zorgvuldige analyse der kleurenteekening op den onderkant der verschillende *dardanus*-vormen, en hare vergelijking met die op de bovenzijde. Wij zien eruit, dat de donkere mediaanstrepen in de tusschenadercellen zich aan den onderkant veel beter hebben gehandhaafd, maar dat hare

overblijfselen toch ook aan de bovenzijde in meerdere of mindere mate terug te vinden zijn, bepaaldelijk op de achtervleugels.

Derhalve mag, zooals ik reeds vroeger opmerkte, een zoodanige toestand van dit patroon, als wordt aangetroffen op beide oppervlakten der achtervleugels van de *hippocoon-* en *trophonissa*-vorm, waarbij de bedoelde strepen zich scherp afteekenen en ononderbroken over de geheele uitgestrektheid van al de internervurale tusschenruimten loopen (en die dus overeenkomt met *zalmoxis* en dergelijke vormen) als oorspronkelijk beschouwd worden. Met betrekking tot deze strepen zijn nog twee opmerkingen te maken. De eene betreft het patroon aan de bovenzijde der achtervleugels van het mannetje, waar de submarginale merken reeds alle mogelijke graden van variatie vertoonen, van een breeden, volledigen, onafgebroken band af tot een paar ver uiteenliggende kleine onregelmatige zwarte vlekken toe. In dit laatste geval kan de reductie geleid hebben hetzij tot het overschieten van drie zwarte plekjes: een vóór-buitenst, een middelst en een achter-binnenst, of nog verder gegaan zijn en alleen de twee uiterste overgelaten hebben. Is het middelste vlekje nog gespaard, dan vertoont zich dit vaak in de gedaante van een tusschenaderstreepje, en verraadt zoodoende zijn verband met de teekening der onderzijde.

De tweede opmerking staat in verband met het kleurenpatroon van een na met *dardanus* verwanten vorm, n.l. *P. cynorta* (waaromheen zich weder een kring van nevenvormen schaart, zooals *norcyta*, *jacksoni*, *fülleborni*, *echerioides*, *cypraeofila* enz.).

Ook hier bestaat een treffende tegenstelling tusschen mannetje en wijfje, welk laatste echter slechts in één vorm bestaat, die een mimetische gelijkenis vertoont met *Planema epaea*. De overeenkomst met *dardanus*-wijfjes berust voornamelijk op de aanwezigheid van den meergemelden schuinen dwarsbalk in de voorspits van den voorvleugel, en op de reeks van donkere mediane tusschenaderstrepen in de cellen van den achtervleugel. Het mannetje verschilt van het wijfje in de afwezigheid van den dwarsbalk, waardoor over het midden van den voorvleugel een onafgebroken keten van lichte tusschenadervakken zich kan uitstrekken, welke naar de vleugelspits toe in omvang afnemen. In tegenstelling met *dardanus* is bij *cynorta* de wortel der achtervleugels donker gekleurd, waardoor de lichte middenpartij dier vleugels zich nauwkeuriger aansluit bij de gezegde reeks op de voorvleugels. Als wij nu deze donkere wortelvelden vergelijken met de correspondeerende plaatsen op den onderkant, vinden wij ze ook hier door een kleurplek afgeteekend, maar deze is sterk oranjebruin, en wordt doorsneden door een stel don-

kere lijnen, welke de aderen en de tusschenaderstrepen markeeren. Daar deze zelfde lijnen ook weer in het distale vleugelgedeelte zichtbaar zijn, ligt het voor de hand aan te nemen dat zij in het middenveld zijn weggevallen door het optreden van de witte verkleuring. Zoodoende schijnt het veroorloofd aan te nemen dat bij den oorspronkelijken toestand zoowel de ader- als de tusschenaderstrepen zich onafgebroken over de geheele oppervlakte der achtervleugels (aan boven- en onderzijde beide) hebben uitgestrekt. Voor deze onderstelling vinden wij steun in de teekening van een groot aantal vlindervormen, uit verschillende groepen, waaronder zoowel modellen als mimics voorkomen (b.v. *Planema tellus* en *Pseudacraea terra*, vergl. PUNNETT, Pl. IX, fig. 3 en 8). Zoo vertoont in de *Nireus*- en *Oribazus*groep de bovenvlakte een verdeeling in drie velden: een lichtblauw veld in 't midden en twee zwarte aan binnen- en buitenzij, maar slechts uiterst geringe sporen van ader- en tusschenaderstrepen, terwijl deze laatste zich bij het meerendeel der hiertoe behoorende vormen op de onderzijde duidelijk en volledig afteekenen.

Als dus voor ieder detail van het patroon van mimetische vormen kan aangetoond worden, dat het behoort tot het geheel hunner generieke, familiaire of ordinale erfelijke karaktertrekken, waardoor het uiterlijk der verschillende leden van zulk een groep wordt teweeggebracht, bestaat er verder geen aanleiding om het totaaleffect van de samenvoeging dezer verschillende kenmerken toe te schrijven aan den invloed van beschermende nabootsing.

Evenmin kan het verschijnsel der Polygynomorphie op zichzelf tot deze oorzaak worden teruggebracht, het behoort integendeel te worden beschouwd als een bijzondere complicatie van geslachtelijke verscheidenheid in 't algemeen, welke eigen is aan bepaalde groepen van vlinders, o. a. de Papilionidae. Dat voor enkele der polygynomorphe wijfjes uit hare toevallige gelijkenis met oneetbare vormen voordeel zou kunnen voortvloeien, is voorzeker zeer waarschijnlijk, maar dit kan nooit anders zijn dan een bijkomstig gevolg dier gelijkenis, en mag dus nimmer als oorzaak daarvan beschouwd worden. Het verschijnsel der veelvormigheid van de wijfjes op zichzelf moet gerangschikt worden naast andere gevallen van polymorphie, zoowel die welke verband houden met sexualiteit als die welke daarvan onafhankelijk zijn, zooals het seizoen-dimorphisme, de geographische en andere rassen. Het is tenslotte van nature niets anders dan een bijzonder uitvloeisel van specifieke differentiatie.

Om een voorbeeld te geven: bij *Hepialus humuli* is het eenkleurig witte mannetje blijkbaar de oorspronkelijke kenteekenen der soort

kwijtgeraakt, terwijl deze bij de wijfjes en bij de geteekende mannetjes der Shetland's-eilanden behouden zijn gebleven.

Ofschoon ik in 't algemeen niet in kan stemmen met de opvattingen van HAASE, is het mij een groote voldoening om uit zijn „Samenvatting" het volgende te kunnen aanhalen:

„In de meeste gevallen werd de mimetische vervorming voorafgegaan door atavistische verschijnselen van de zijde der wijfjes, die in den aanvang slechts terugreikten tot de patronen der naaste verwanten, maar naarmate het proces voortschreed, overgingen tot die van verder verwijderde voorgangers en op deze wijze het materiaal voor de mimetische adaptatie leverden".

Ook HAASE derhalve schrijft de uitmonsteringen der mimetische wijfjes aan erfelijke invloeden toe, instede van ze te beschouwen als de gevolgen van secundaire afwijkingen van het oorspronkelijke specifieke type.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan: Mededeeling N°. 6*a* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: W. H. KEESOM: „*De quadrupoolmomenten der Zuurstof- en der Stikstofmoleculen.*"

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

§ 1. *Inleiding.* In Suppl. N°. 39*a* bij de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden [1]) werd aangetoond dat van de toestandsvergelijking van waterstof, voorzoover de term met den tweeden viriaalcoefficient betreft, in het temperatuurgebied tusschen + 100° C. en — 100° C. (volgens Suppl. N°. 39*c* nog tot lagere temperaturen), rekenschap kan gegeven worden door aan te nemen dat de moleculen als electrische quadrupolen met constant quadrupoolmoment [2]) op elkander werken, wanneer men de afstootingen die bij kleineren afstand overheerschend worden, mag vervangen denken door de botsingskrachten die optreden als de moleculen als harde bollen met bepaalden straal tegen elkaar zouden botsen. Daarbij werd tevens het quadrupoolmoment der waterstofmoleculen bepaald, en aangetoond dat eene plaatsing van de twee termen en de twee electronen, waaruit een H_2-molecuul is opgebouwd, zoodanig dat dit het vereischte quadrupoolmoment zou hebben, zeer wel mogelijk is. Daarmede was waarschijnlijk gemaakt, en dit was voorloopig het hoofddoel dier beschouwingen, dat de moleculaire attractie, althans in het beschouwde gebied van dichtheden, ook voor homopolaire moleculen kan verklaard worden uit de electrische krachten die uitgaan van de kernen en de electronen, waaruit het molecuul is opgebouwd.

Hoewel het voor de hand lag, verder het door de toestandsvergelijking vereischte quadrupoolmoment te vergelijken met het quadrupoolmoment van het door BOHR en DEBIJE opgestelde model voor het waterstofmolecuul, werd dit nagelaten met het oog op de bezwaren.

[1]) Deze Verslagen. Sept. 1915, p. 614.

[2]) In de volgende mededeeling zal nagegaan worden in hoeverre de beweegelijkheid der electronen in het molecuul, die in de waarde van de dielectrische constante tot uitdrukking komt, van invloed is op den tweeden viriaal-coefficient.

in het bijzonder wat de magnetische eigenschappen betreft [1]), die zich tegen dit model doen gelden. Intusschen is door BURGERS [2]) het quadrupoolmoment van het waterstofmolecuul volgens BOHR-DEBIJE berekend, en vond hij eene merkwaardige overeenstemming met de in Leiden Meded. Suppl. N°. 39*a* uit den tweeden viriaalcoefficient afgeleide waarde:

uit de toestandsvergelijking [3]) $2{,}03 \times 10^{-26}$ (e. st. e. cm^2)
volgens BOHR-DEBIJE $2{,}05 \times 10^{-26}$ „

Hoezeer deze uitkomst ook gunstig voor het model van BOHR-DEBIJE zou mogen stemmen, toch schijnt het waarschijnlijk, dat de zich voortdurend vermeerderende bezwaren daartegen [4]) ons zullen dwingen naar een ander model uit te zien. Niettemin blijft de berekening van het quadrupoolmoment uit de toestandsvergelijking haar belang behouden, wijl zij, behoudens de onzekerheid die de vereenvoudigende aanname betreffende de botsingskrachten met zich brengt, een belangrijk gegeven levert waarmede met de constructie van het definitieve molecuulmodel zal zijn rekening te houden. In dien zin scheen het ook van belang de quadrupoolmomenten van andere gassen te berekenen. In § 2 is dit voor zuurstof en stikstof geschied.

§ 2. Voor de tweede viriaalcoefficienten van zuurstof en stikstof beschikken we in het temperatuurgebied, waarvoor de tweede viriaalcoefficient voor quadrupoolmoleculen berekend is, over de in Tabel I verzamelde gegevens [5]).

Hierin duidt de index Θ aan, dat het volume v in de toestandsvergelijking

$$pv = RT \left\{ 1 + \frac{B}{v} + \ldots \right\}$$

[1]) Vergel. Leiden Meded. N°. 39*a*, p. 15, noot 1.

[2]) J. M. BURGERS. Diss. Leiden 1918. p. 186.

[3]) Door rekening te houden met de omstandigheid, dat de moleculen in elkanders electrisch veld gepolariseerd worden, zal deze waarde nog eene kleine wijziging ondergaan (vergel. Meded. N°. 6*b*, in het bijzonder § 4).

[4]) Vergel. Mej. H. J. VAN LEEUWEN, Deze Verslagen 24 (1616), p. 1047. J. M. BURGERS, Deze Verslagen 25 (1916), p. 404. A. SOMMERFELD, Atombau und Spektrallinien. Braunschweig 1919. p. 288 en 533. Frl. G. LASKI, Physik. Z S. 20 (1919), p. 550. W. LENZ, Verh. D. physik. Ges. 21 (1919), p. 632.

[5]) Ik ontleen deze getallen aan berekeningen uitgevoerd door den Heer M. DANIELS, phil. nat. docts. Daarbij is voor de waarnemingen van AMAGAT uitgegaan van de door KAMERLINGH ONNES in Meded. Leiden N°. 71 gepubliceerde viriaalcoefficienten.

TABEL I.

Zuurstof.			Stikstof.		
T	$B_{(\cdot)} \times 10^3$		T	$B_{(\cdot)} \times 10^3$	
472.6	+ 0.273	AMAGAT	472.5	+ 0.690	AMAGAT
372.6	— 0.088	„	372.45	+ 0.324	„
293.1	— 0.848	ONNES & HYNDMAN	290.6	— 0.298	LEDUC 1910
288.7	— 0.694	„	289.1	— 0.234	AMAGAT
288.7	— 0.739	AMAGAT	288.0	— 0.316	RAYLEIGH
288.1	— 0.645	LEDUC 1910	273.1	— 0.372	AMAGAT
284.3	— 0.791	RAYLEIGH			
273.1	— 0.812	ONNES & HYNDMAN			
273.1	— 0.928	AMAGAT			

is uitgedrukt gedacht in het theoretisch normaalvolume als eenheid [1]).

Deze gegevens laten niet toe te controleeren of het verloop van B met de temperatuur voor deze gassen overeenstemt met dat voor bolvormige quadrupool-moleculen. Daarvoor zouden meer waarden van B, in het bijzonder ook bij hoogere temperatuur, noodig zijn. Nemen we voorloopig aan dat dit voor het beschouwde temperatuurgebied voldoende nauwkeurig het geval is [2]), dan zijn zij voldoende om het quadrupoolmoment, benevens den diameter der bolvormig gedachte moleculen te bepalen.

We ontleenen daartoe de waarden van B/B_∞ voor verschillende waarden van $T/T_{inv(\varsigma=0)}$ voor bolvormige quadrupoolmoleculen aan Leiden Meded. Suppl. N°. 39*a* en *c*.

Door toepassing van de methode van de logarithmische diagrammen (verg. Leiden Meded. Suppl. N.° 25) werd achtereenvolgens afgeleid:

Voor *zuurstof*:

voor de inversietemperatuur van het Joule-Kelvin-effect bij kleine dichtheden :

$$T_{inv(\varsigma=0)} = 723 \ (450^\circ \mathrm{C}),$$

voor de potentieele energie der moleculen bij aanraking (met de quadrupoolassen onderling loodrecht en loodrecht op de verbindingslijn der middelpunten):

[1]) Vergel. H. KAMERLINGH ONNES und W. H. KEESOM, Die Zustandsgleichung. Math Enz. V. 10, Leiden Suppl. N°. 23, Einheiten *b*.

[2]) Bij waterstof treden in dit gebied reeds afwijkingen op, vergel. W. H. KEESOM en Mej. C. VAN LEEUWEN, Leiden Meded. Suppl. N°. 39*c*.

$$v = 5{,}71 \times 10^{-14},$$

voor den diameter van het molecuul:

$$\sigma = 2{,}65 \times 10^{-8}$$

en voor het quadrupoolmoment:

$$\mu_2 = 3{,}55 \times 10^{-26} \quad [\text{e. st. e.} \times \text{cm}^2].$$

Voor *stikstof*:

$$T_{inv(\zeta=0)} = 604, \quad (331^\circ \text{C.})$$

$$v = 4{,}77 \times 10^{-14},$$

$$\sigma = 2{,}98 \times 10^{-8},$$

$$\mu_2 = 3{,}86 \times 10^{-26} \quad [\text{e. st. e.} \times \text{cm}^2].$$

§ 3. Ter nadere beoordeeling van de beteekenis der voor zuurstof verkregen waarde voor het quadrupoolmoment hebben we ons nog af te vragen of misschien de magnetische aantrekking tusschen de paramagnetische zuurstofmoleculen eene in aanmerking komende bijdrage voor B levert. In dit geval toch zou het quadrupoolmoment kleiner moeten zijn dan boven met niet inachtneming daarvan verkregen werd. Eene nadere berekening leert intusschen dat dat niet het geval is.

Volgens WEISS en PICCARD [1]) zou zuurstof n.l. 14 magnetonen per molecuul bezitten, waaruit voor het magnetisch moment van een O_2-molecuul volgt

$$\mu = 2{,}6 \times 10^{-20}.$$

Volgens Leiden Suppl. N°. 25 § 4 zou $\mu = 9{,}47 \times 10^{-19}$ moeten zijn om daaruit de moleculaire attractie te verklaren. Het werkelijk magnetisch moment bedraagt slechts $\frac{1}{39}$ daarvan. In aanmerking nemende dat de statistisch overblijvende moleculaire attractie evenredig is met μ^4, blijkt dus dat het magnetisch moment geen hier in aanmerking komende bijdrage voor de moleculaire attractie geeft.

§ 4. Uitdrukkelijk zij hier nog naar voren gebracht dat bij de berekeningen in deze Meded. (evenals bij die voor H_2 in Leiden Suppl. N°. 39) is uitgegaan van de onderstelling dat de moleculen tegen elkander botsen als waren zij harde bollen met constanten diameter. Wanneer dit niet het geval is en het gedrag bij de botsing zou beantwoorden aan een waarde van σ, die van de temperatuur afhankelijk is, dan zou dit zich in B doen gevoelen in den vorm van termen die eveneens van T afhankelijk zijn en zou dus de afhankelijkheid van B van T niet meer als in deze Meded. geheel op rekening van de moleculaire attractie mogen gesteld worden. De waarden van de quadrupoolmomenten zouden op grond daarvan niet onbelangrijk gewijzigd kunnen moeten worden.

[1]) P. WEISS en A. PICCARD. C. R. 155 (1912), p. 1234.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N°. 6*b* uit het Laboratorium voor Natuurkunde en Physische Scheikunde der Veeartsenijkundige Hoogeschool: W. H. KEESOM: „*Over de Cohaesiekrachten volgens* VAN DER WAALS."

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

§ 1. *Inleiding*. DEBIJE[1]) heeft onlangs in eene belangrijke verhandeling over de cohaesiekrachten volgens VAN DER WAALS er op gewezen, dat deze daardoor zouden kunnen worden verklaard dat een molecuul in het veld van een naburig molecuul een geinduceerd bipoolmoment verkrijgt en dan op grond van dit bipoolmoment door het induceerende molecuul aangetrokken wordt. In het bijzonder beschouwde DEBIJE daarbij gassen, wier moleculen geen eigen bipoolmoment bezitten, en nam hij aan dat het veld dezer moleculen in eerste benadering als dat van een quadrupool kan beschouwd worden. Voor eene eerste orienteerende berekening werd daarbij afgezien van de gemiddelde aantrekking, die die moleculen op grond van hun eigen quadrupoolmoment reeds op elkander uitoefenen in aanmerking nemende dat naburige moleculen elkander zoodanig zullen trachten te richten dat de gevallen waarin zij elkaar zullen aantrekken meer voorkomen dan die waarin zij elkaar zullen afstooten. Inderdaad zal dit, gelijk DEBIJE ook reeds opmerkt, geoorloofd zijn bij voldoend hooge temperatuur, daar dan deze gemiddelde aantrekking wegvalt omdat de warmtebeweging zich dan tegen het onderling richten der moleculen verzet.

Daarentegen werd in Suppl. N°. 39*a* van de Mededeelingen uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden[2]) aangetoond dat de moleculaire attractie in waterstof, althans voor zoover den tweeden viriaalcoefficient betreft, kan worden verklaard uit de omstandigheid dat die moleculen een quadrupoolmoment bezitten, en werd daar van een bijdrage tot de attractie, die het gevolg zou zijn van de beweegelijkheid van de electronen in het molecuul afgezien.

In werkelijkheid zal men, gelijk DEBIJE zeer juist opmerkt, ter berekening van de moleculaire attractie zoowel in het oog moeten

[1]) P. DEBIJE, Physik. Z.S. 21 (1920), p. 178.

[2]) Deze Verslagen, Sept. 1915, p. 614. Zie ook W. H. KEESOM en Mej. C. VAN LEEUWEN, deze Verslagen Maart 1916, p. 1699.

vatten de aantrekking die de beschouwde moleculen wegens hunne eigen quadrupoolmomenten op elkaar uitoefenen, als die welke in het bijzonder door DEBIJE beschouwd is en die een gevolg is van de polariseerbaarheid der moleculen in een electrisch veld.

Wij zullen ons in deze mededeeling meer bepaaldelijk bezighouden met den invloed van de moleculaire attractie op de toestandsvergelijking, en ons daarbij beperken tot den tweeden viriaalcoefficient B.

Men kan zich nu de vraag stellen welke van beide genoemde bijdragen tot de attractie bij de temperaturen, waarbij metingen omtrent de toestandsvergelijking gedaan zijn, den grootsten invloed op den tweeden viriaalcoefficient heeft. Doel van deze mededeeling is aan te toonen, dat bij de bedoelde temperaturen de bijdrage van de moleculaire attractie in B voornamelijk te danken is aan de eigen quadrupool-momenten der moleculen.

§ 2. *Voorloopige orienteering.* Kortheidshalve zullen we de bijdrage in de attractie, die te danken is aan de eigen quadrupoolmomenten, aanduiden met den naam „quadrupoolattractie", die welke te danken is aan de krachten, die de quadrupolen op de in de moleculen geïnduceerde bipolen uitoefenen met den naam „geïnduceerde attractie". Evenzoo de termen in den tweeden viriaalcoefficient die aan de quadrupoolattractie te danken zijn „quadrupooltermen", die welke van de geïnduceerde attractie afkomstig zijn de „geïnduceerde termen".

Tusschen beide bestaat dit belangrijke verschil dat de quadrupooltermen bij hooge temperaturen evenredig aan T^{-2} worden, terwijl daarentegen de geïnduceerde termen daar evenredig aan T^{-1} worden. Men kan dit ook zoo uitdrukken dat de attractiekrachten volgens VAN DER WAALS in geval van quadrupoolattractie bij hooge temperaturen evenredig aan T^{-1}, in geval van geïnduceerde attractie daarentegen constant worden. Nu is reeds in Leiden Suppl. N°. 39*a* (zie Fig. 2 aldaar, en vergel. ook Leiden Suppl. N°. 39*c* § 3) gebleken, dat voor waterstof de tweede viriaalcoefficient veeleer een gedrag volgt dat aan de aanname van quadrupoolattractie beantwoordt, en niet overeenstemt met de aanname $a_w =$ const., zooals voor hooge temperaturen door de geïnduceerde attractie zou verlangd worden. Dit wijst reeds aan, dat verwacht moet worden dat de quadrupooltermen, althans bij waterstof, de overhand hebben.

Gesteund wordt deze conclusie wanneer men de waarden, die DEBIJE voor het quadrupoolmoment afleidt bij uitsluitende aanname van geïnduceerde attractie, vergelijkt met het in Leiden Suppl. N°. 39*a* voor waterstof gevonden quadrupoolmoment. DEBIJE vindt

(tabel I l. c.) voor waterstof $3{,}20 \times 10^{-26}$, terwijl volgens Leiden, Suppl. N°. 39a een quadrupoolmoment van $2{,}03 \times 10^{-26}$ reeds eene quadrupoolattractie geeft, die voldoende is om de experimenteel gevonden toestandsvergelijking te verklaren. Aangezien de eerste der quadrupooltermen evenredig is met de vierde macht van het quadrupoolmoment, zouden dus de quadrupolen van Debije eene veel te groote quadrupoolattractie leveren.

Tot hetzelfde besluit komt men voor zuurstof en stikstof, voor welke de quadrupoolmomenten bij verwaarloozing van de geïnduceerde attractie zijn berekend in de vorige mededeeling (Meded. N°. 6a):

O_2: Debije: $11{,}2 \times 10^{-26}$, Meded. N°. 6a: $3{,}55 \times 10^{-26}$
N_2: $13{,}3 \times$ „ $3{,}86$ „

Bevestigd wordt de conclusie, dat de quadrupoolattractie voor de genoemde gassen de overhand heeft boven de geïnduceerde attractie, wanneer men bij de berekening van den tweeden viriaalcoefficient ook met de geïnduceerde attractie rekening houdt. Dit geschiedt in § 3.

§ 3. *De tweede viriaalcoefficient voor bolvormige polariseerbare quadrupoolmoleculen.* We onderstellen, dat de polarisatietoestand der moleculen (verschuiving van de electronen uit hun evenwichtsstanden of -banen) op elk oogenblik geheel in overeenstemming is met het veld waarin het molecuul zich dan bevindt. Verder dat het molecuul isotroop polariseerbaar is, dus dat het geïnduceerde bipoolmoment de richting heeft van het electrische veld E, en dat het gelijk is aan

$$\mu_1 = \alpha E. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Hierin wijst de index 1 aan dat we met een bipoolmoment te doen hebben, terwijl de index i hier en in het vervolg steeds zal aanduiden dat de betreffende grootheid van de electrostatische inductie afkomstig is.

Het arbeidsvermogen van den geïnduceerden bipool in het veld E bedraagt (vergelijk Debije, l.c.):

$$-\frac{1}{2}\alpha E^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Bevindt zich de geïnduceerde bipool in een punt P van het veld van een zonalen quadrupool A met quadrupoolmoment μ_2 (Fig. 1), zoodanig dat PA een hoek θ maakt met de as van den quadrupool, dan vindt men voor het arbeidsvermogen van den geïnduceerden bipool

$$-\frac{9}{2}\frac{\alpha\mu_2^2}{r^8}\{\sin^4\theta + 4\cos^4\theta\}. \quad \ldots \quad (3)$$

De berekening van den tweeden viriaalcoefficient kan zich nu geheel aansluiten bij die van Leiden Suppl. N°. 39*a* § 2. We karakteri-

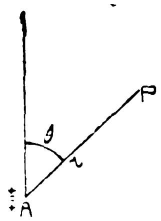


Fig. 1.

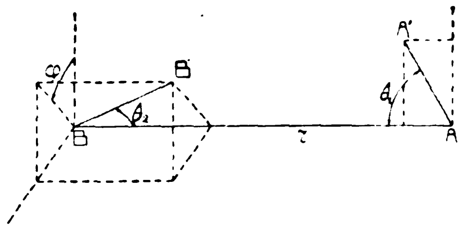


Fig. 2.

seeren een paar van moleculen dat kan geacht worden zich in elkaars werkingssfeer te bevinden, wederom door den afstand r hunner middelpunten, de hoeken θ_1 en θ_2 van de quadrupoolassen met de verbindingslijn der middelpunten en door den hoek φ (zie Fig. 2).

Het arbeidsvermogen van dit paar zal dan nu verkregen worden door aan den aldaar gegeven quadrupoolterm

$$_q u_{b1} = \frac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{r^5}\left\{1 - 5\cos^2\theta_1 - 5\cos^2\theta_2 - 15\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \right.$$

$$\left. + 2\,(4\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi)^2\right\} \quad . \quad (4)$$

toe te voegen den geïnduceerden term:

$$_i u_{b1} = -\frac{9}{8}\frac{a\mu_2^2}{r^8}\left\{\sin^4\theta_1 + \sin^4\theta_2 + 4\cos^4\theta_1 + 4\cos^4\theta_2\right\} \quad . \quad (5)$$

Hieraan ware nog toe te voegen een term afkomstig van de krachten die de beide geïnduceerde bipolen op elkander uitoefenen. Deze term zou a^2 bevatten. We zullen intusschen voorloopig termen met a^2 weglaten.

We ontleenen aan Leiden Suppl. N°. 39*a* de notaties

$$v = \frac{3}{4}\frac{\mu_2^2}{\sigma^5}\,,\quad \sigma = \text{diameter van het molecuul}, \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin we kortheidshalve v schrijven in plaats van $_q v$, zijnde de potentieele energie van het molecuulpaar bij aanraking, met l.c. genoemde richtingen der quadrupoolassen, wanneer alleen op de quadrupoolattractie gelet wordt.

Verder

$$_q u_{b1} = v\frac{\sigma^5}{r^5}\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waarin

$$\psi = A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\,(1-3\cos^2\theta_1)\,(1-3\cos^2\theta_2) \\ B &= 16\sin\theta_1\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ C &= \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

We voeren nu in

$$\chi = sin^4\,\theta_1 + sin^4\,\theta_2 + 4\cos^4\,\theta_1 + 4\cos^4\,\theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dan is

$${}_iu_{b1} = -\frac{3}{2}\,v\,\frac{a\sigma^6}{r^8}\,\chi . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

De tweede viriaalcoefficient wordt nu

$$B = \frac{1}{2}\,n\left(\frac{4}{3}\,\pi\,\sigma^3 - P'\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

met

$$P' = \int\limits_\sigma^\infty\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\left(e^{-h\,{}_qu_{b_1} - h\,{}_iu_{b_1}} - 1\right) r^2\,sin\,\theta_1\,sin\,\theta_2\,dr\,d\theta_1\,d\theta_2\,d\varphi \;.\; (13)$$

Ontwikkelen we naar opklimmende machten van h, waarbij we termen met a^2 enz. weglaten, dan valt P' uiteen in

$$P' = {}_qP' + {}_iP', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

waarin ${}_qP'$ aan Leiden Suppl. N°. 39a kan ontleend worden, en na integratie naar r:

$${}_iP' = \frac{3}{20}\,ahv\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\chi\left\{1 - \frac{1}{2!}\,hv\psi + \frac{1}{3!}(hv)^2\psi^2 \ldots\right\} sin\theta_1\,.\,sin\theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi . (15)$$

De integratie verder uitvoerende verkrijgt men

$${}_iP' = \frac{16}{5}\,\pi\sigma^3\,.\,\frac{a}{\sigma^3}\,.\,hv\left\{1 + \frac{16}{15}(hv)^2 \ldots\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

waarna [1])

$${}_iB = -\frac{1}{2}\,n\,.\,\frac{4}{3}\,\pi\sigma^3\,.\,\frac{12}{5}\,\frac{a}{\sigma^3}\,.\,hv\left\{1 + \frac{16}{15}(hv)^2 \ldots\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Deze termen gevoegd bij ${}_qB$ volgens Leiden Suppl. N°. 39a geven ten slotte:

$$B = \frac{1}{2}\,n\,\frac{4}{3}\,\pi\sigma^3\left\{1 - 1{,}0667\,(hv)^2 + 0{,}1741\,(hv)^4 \ldots - \right.$$

$$\left. - 2{,}4\,\frac{a}{\sigma^3}\,hv\,[1 + 1{,}067\,(hv)^2 \ldots]\right\} \quad (18)$$

§ 4. *Conclusies.* In de eerste plaats merken we op, dat voor de strenge geldigheid van de wet van de overeenstemmende toestanden zou vereischt worden dat $\frac{a}{\sigma^3}$ dezelfde waarde heeft voor verschillende gassen.

[1]) De eerste term in deze uitkomst beantwoordt aan eene waarde voor de attractieconstante a van VAN DER WAALS, die geheel overeenstemt met de door DEBIJE l. c. in verg. (18) gegevene.

De waarde van α ontleenen we, DEBIJE volgend, aan de moleculaire refractie (P_0) voor $\lambda = \infty$, terwijl we voor H_2 de waarde van σ ontleenen aan Leiden Suppl. N°. 39*a*, voor O_2 en N_2 aan de vorige Mededeeling (N°. 6*a*). We krijgen dan het volgende:

	P_0	σ	$\frac{\alpha}{\sigma^3}$
wateistof	2,03	$2,32 \times 10^{-8}$	0,0640
zuurstof	3,98	2,65 „	0,0842
stikstof	4,34	2,98 „	0,0646

Voor waterstof wordt dan

$$B = \frac{1}{2} n \cdot \frac{4}{3} \pi\sigma^3 \left\{ 1 - 1,0667\,(hv)^2 + 0,1741\,(hv)^4 \ldots - \right.$$

$$\left. - 0,1536\,hv - 0,1638\,(hv)^2 \ldots \right\}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

terwijl de laatste rij van termen voor stikstof slechts onbeteekenend, voor zuurstof iets meer afwijkt.

Aangezien de waarden van σ, die hier gebruikt zijn, ontleend zijn aan berekeningen, waarbij niet op de geïnduceerde attractie gelet is, is deze uitdrukking voor B slechts als een eerste stap in de rij van opvolgende benaderingen aan te zien. Wij zouden nu als in Leiden Suppl. N°. 39*a* op grond van vergel. (19) de waarde van hv in het JOULE-KELVIN-inversiepunt bij kleine dichtheden moeten berekenen (waarvoor nog eenige termen voor het „geïnduceerde deel" van B zouden moeten afgeleid worden), waarna dan uit de experimenteele waarden van $T_{inv(\rho=0)}$ en B_{inv} verbeterde waarden voor v en σ zouden verkregen worden. Verwacht mag worden dat de wijziging, die σ daarbij zal ondergaan, betrekkelijk klein zal zijn, zoodat ook de wijziging die verg. (19) daardoor zal ondergaan, niet zeer belangrijk zal zijn.

We zullen ons in deze mededeeling echter ertoe bepalen te constateeren dat ook hier (door vergelijking van de betreffende termen in (19)) blijkt, dat althans voor de genoemde gassen de „quadrupoolattractie", tenzij de temperatuur zeer hoog is, belangrijk meer invloed in B heeft dan de „geïnduceerde attractie". De door VAN DER WAALS in de toestandsvergelijking ingevoerde cohaesiekrachten kunnen dus voor gassen als de genoemde in hoofdzaak toegeschreven worden aan de krachten die de moleculen op grond van hun quadrupoolmoment op elkaar uitoefenen.

Wiskunde. — De Heer HENDRIK DE VRIES biedt een mededeeling aan van den Heer B. P. HAALMEIJER: *„Over elementair-oppervlakken der derde orde”*. (5de mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer JAN DE VRIES).

Eenige opmerkingen welke ik van professor FELIX KLEIN mocht ontvangen gaven mij aanleiding mijne vroegere mededeelingen over dit onderwerp [1]) nog eens door te gaan, waarbij mij bleek dat op verschillende plaatsen aanvulling en verbetering noodig zijn.

§ 1. Bij oppervlakken van den derden *graad* met 3 of 7 reeële rechten, komen systemen platte vlakken voor, welke, wat betreft het bestaanbare deel der doorsnede, slechts één enkele rechte met het oppervlak gemeen hebben. Slechts bij een zeer gekunstelde interpretatie worden deze oppervlakken omvat door onze definitie van F^3 (p. 59 en 60, med. 1). Dit bezwaar vervalt als punt 2 dier definitie vervangen wordt door de volgende, ook op anderen grond betere conditie: Alle vlakke doorsneden, voor zoover aanwezig, zijn elementairkrommen, waarbij de derde orde voorkomt, maar geen hoogere.

Wat betreft de telling van rechten bepalen we het volgende:

Een rechte a wordt in een vlak α *drievoudig* (resp. *dubbel*) geteld, wanneer elke rechte b ($\neq a$) van α grenselement is van een reeks rechten, alle gelegen in eenzelfde plat vlak en waarvan elk 3 (resp. 2, maar bij geen enkele keuze der reeks 3) punten van F^3 draagt, welke convergeeren tot het snijpunt van a en b.

In alle andere gevallen wordt a in α enkel geteld.

Het aantal malen dat a geteld wordt als *rechte van* F^3 bepalen we op 1 vermeerderd met 1 voor elk vlak waarin a dubbel telt, vermeerderd met 2 voor elk vlak waarin a drievoudig telt.

Stelling: Geen vlakke doorsnede van F^3 *is van de tweede orde.*

Bewijs: Een dergelijke doorsnede zou een der 4 volgende vormen vertoonen:

1. Geïsoleerd punt.
2. Ovaal.
3. Twee verschillende enkeltellende rechten.
4. Eén dubbeltellende rechte.

[1]) Deze *verslagen* deel XXVI p. 58—74, 320—337, 755—767 en 1274—1281.

Geval 1. Zij A dit punt en α het bijbehoorende vlak. Er is een vlak β waarin de doorsnede van de derde orde is en dit vlak gaat door A daar een elementairkromme der derde orde met elke rechte van haar vlak minstens 1 punt gemeen heeft. De kromme in β gaat door A, maar kan niet in A aan α raken (daar A het eenige punt van F^3 in α is) en gaat dus in A door α heen. De omgeving van A op F^3 wordt dan echter door α in twee deelen verdeeld (waarbij A zelf aan een dier deelen is toe te voegen), welke slechts 1 gemeenschappelijk grenspunt hebben, wat in strijd is met punt 1 der definitie van F^3. [1])

Geval 2. Zij α het vlak van het ovaal, a een rechte die twee verschillende punten A en B van dit ovaal draagt en β een vlak door a. Stel de kromme in β is van de derde orde, dan telt een der punten A en B, b.v. A dubbel als snijpunt met a. Dit is op drie wijzen mogelijk:

De kromme in β raakt a in A.

A is keerpunt in β, zóó dat beide takken van dezelfde zijde van samenkomen.

A is gewoon dubbelpunt in β, zóó dat van elke zijde van α twee takken samenkomen. [2])

De twee eerste mogelijkheden zijn in strijd met stelling 1 van p. 327, med. 2, [3]) want in α is A gewoon snijpunt van het ovaal met a, terwijl men in β rechten tot a kan laten convergeeren, welke geen tot A convergeerende punten van F^3 dragen.

Beschouwen we de derde mogelijkheid. De twee takken welke in α van A uitgaan, hangen zoowel boven als beneden α samen. De sector die de verbinding boven α vormt, kan niet langs een tak aan β raken, want dan zijn direct oneindig veel rechten in β aan te geven die 4 punten van F^3 dragen en zou β dus geheel tot F^3 behooren. [4]) Genoemde sector gaat dus tweemaal door β heen, n.l. langs de takken die van A boven α in β uitgaan, en dit is onmogelijk daar de sector twee takken verbindt, gelegen aan verschillende zijden van β.

Samenvattende zien we dat de kromme in β niet van de derde

---

[1]) Uitvoerig is een analoog geval beschouwd op p. 61 en 62, med. 1.

[2]) Bestond de doorsnede in β uit een dubbeltellende rechte door A en een enkeltellende door B, dan is direct een ander vlak door a aan te geven met een doorsnede der derde orde en waarin geen dubbeltellende rechte optreedt.

[3]) Het daar gegeven bewijs maakt slechts in zooverre gebruik van de tweede conditie welke aan F^3 gesteld was, als daarbij doorsneden van hoogere dan de derde orde worden uitgesloten.

[4]) Dit blijft juist als de kromme in β gedegenereerd is.

orde kan zijn en ze is dus blijkbaar van de tweede. De eenige conditie aan β gesteld was dat dit vlak twee verschillende punten met het ovaal in α gemeen heeft. Er bestaat echter zeker een rechte welke drie verschillende punten van F^2 draagt. Brengen we door deze een vlak dat twee verschillende punten gemeen heeft met het ovaal in α dan moet de doornede daarin van de tweede orde zijn en toch 3 verschillende punten met een rechte gemeen hebben, wat onmogelijk is.

Geval 3. Zij α het vlak, b en c de rechten en A hun snijpunt. Sluiten we het punt A uit dan komen langs het overige deel van b de sectoren van F^2 samen òf steeds van dezelfde zijde, òf steeds van verschillende zijden van α [1]). Voor c geldt hetzelfde. Het geval dat langs beide rechten het eerste geschiedt is uit te sluiten, daar dan oneindig veel rechten en ook het geheele vlak α in F^2 bevat zouden zijn. Kwamen langs b de sectoren samen van dezelfde zijde van α en langs c van verschillende zijden, dan is volgens onze bepalingen b in α dubbel te tellen en de doorsnede wordt van de derde orde. Blijft over de mogelijkheid dat zoowel langs b als c de sectoren samenkomen van verschillende zijden van α. Zij nu σ een willekeurig vlak dat niet door A gaat, a de snijlijn van σ met α en B en C de snijpunten van a met c resp. b. De kromme in σ passeert a in B en C en heeft geen verdere punten met a gemeen. Voor een kromme der derde orde zou dit nog mogelijk zijn, zoo B of C dubbelpunt was, maar de bij geval 2 gebruikte redeneering laat zien dat dit is uitgesloten. De kromme in σ is dus blijkbaar van de tweede orde. Er zijn echter lijnen welke drie verschillende punten van F^2 dragen en niet door A gaan. Brengt men door een dergelijke lijn een vlak dat niet A bevat, dan verkrijgt men weer een contradictie.

Geval 4. Zij α het vlak en a de dubbeltellende rechte. Langs de geheele rechte a komen nu de sectoren F^2 samen òf steeds van dezelfde òf steeds van verschillende zijden van α. Het eerste is onmogelijk daar we in de projectieve ruimte werken. In het tweede geval zou door elke lijn ($\neq a$) van α een vlak β gaan dat een dub-

[1]) Elk punt van b ($\neq A$) is n.l. inwendig punt van een interval waarlangs de sectoren van dezelfde of verschillende zijden van α samenkomen. Sluit men een willekeurig klein open segment van b om A uit, dan bestaat een eindig aantal dergelijke intervallen, zóó dat elk punt van het overige deel van b, inwendig punt van minstens een dezer is (volgens het BOREL'sche theorema), waaruit genoemde eigenschap voor de geheele rechte b (uitgezonderd punt A) onmiddellijk volgt.

belpunt vertoont in het snijpunt met a en wel twee snijdende rechten, daar de snijlijn met α slechts het op a gelegen punt, en dat dubbeltellend, met de doorsnede in β gemeen heeft. F^3 zou dan oneindig veel rechten bevatten, wat uitgesloten is.

Hiermee is het bewijs voltooid.

De voorgaande stelling brengt mee dat een vlak α, waarin een rechte a dubbel telt, nog een enkeltellende rechte b moet bevatten. Zij A het snijpunt van a en b. We bewijzen dat *langs de rechte a met uitzondering van het punt A, de sectoren van F^3 steeds van dezelfde zijde van α samenkomen*. Stel n.l. a draagt een punt P, zoodanig dat de takken die op a in P samenkomen aan weerszijden van α samenhangen. Er bestaat dan een vlak door P dat niet a bevat en waarin P dubbelpunt is. De redeneering gebruikt bij geval 2 (p. 729) geeft dan weer een contradictie. Elk punt van a ($\neq A$) is dus inwendig punt van een interval waarlangs de sectoren van dezelfde zijde van α samenkomen. Zie verder voetnoot vorige bladzijde.

Langs een in α drievoudig tellende rechte komen de sectoren natuurlijk steeds samen van verschillende zijden van α.

§ 2. Deze § dient tot eerste wijziging en aanvulling van med. 3 (p. 755—767).

p. 759. De redeneering voor geval II is onvolledig en te beginnen r. 12 v.o. te vervangen door het volgende: Laat men σ om c wentelend van weerszijden tot α convergeeren, dan trekt in beide gevallen de lus van de kromme in σ tot A samen, want convergeerden de lussen tot een eindig segment van a, dan zouden in elk der naderende vlakken 3 takken liggen, welke slechts een eindpunt (A) gemeen hebben en waarvan de breedte boven een zekere waarde blijft. Deze zouden convergeeren tot een enkel lijnsegment in het limietvlak, wat niet te rijmen is met de onderstelling dat F^3 een tweedimensionaal continuum is. Nadert σ dus om c draaiend tot α, zoo convergeeren uitsluitend de hoofdtakken der kromme in σ tot de rechte a.

Vatten we in het oog een bepaald vlak σ. Laten hierin naar de eene zijde van c uitgaan de takken AP, AQ en AR waarbij AQ ook werkelijk de middelste is. De beide halflijnen waarin A de rechte a verdeelt, hangen aan diezelfde zijde van α samen door een sector welke achtereenvolgens langs AP, AQ en AR het vlak σ passeert. Laat men nu σ van de eene zijde tot α naderen, dan convergeert de uiterste tak aan de zijde van AP tot a en bij tegengestelde draaiing de met AQ correspondeerende tak. In beide gevallen echter is dit een tak welke niet op de lus vertrekt, en daar

een der uiterste takken op de lus uitgaat, moet onderweg een overgang hebben plaatsgevonden, wat een degeneratie beteekent en dit is in strijd met de aanname dat door A geen tweede rechte van F^3 gaat.

p. 761 laatste regel staat: „Is A het eenige grenspunt, dan zouden deze contraheerende ovalen aan A het karakter geven van een punt van een tweedimensionaal continuum". Hierbij is over het hoofd gezien dat A niet behoort tot het contraheerende gebied, door de ovalen op F^3 bepaald, maar tot de ovalen zelf. Het beschreven geval moet dus verder beschouwd worden. In elk vlak door a ($\neq \varepsilon$) ligt nog een ovaal dat in A aan a raakt. Daar degeneratie niet voorkomt, kan de raking nooit van het eene halfvlak in het andere overgaan, tenzij men ε passeert. Laat het halfvlak waarin de raking plaatsvindt, eerst in den eenen en dan in den anderen zin wentelend, tot ε convergeeren. Trokken in beide gevallen de ovalen tot A samen, dan zou dit punt nu inderdaad door deze ovalen het karakter krijgen van punt van een tweedimensionaal continuum en een reeks van punten op a met A tot grenspunt zou niet meer te plaatsen zijn. In het oog houdende dat vlak ε slechts a met F^3 gemeen heeft, blijft slechts over de mogelijkheid dat bij de eene wenteling de ovalen uitsluitend tot A en bij de andere tot de geheele rechte a convergeeren (dit laatste van weerszijden door takken die via het oneindige samenhangen). Het punt A is dan keerpunt in elk vlak dat a niet bevat en elk ander punt van a is buigpunt in elk vlak dat a niet bevat, steeds met raaklijn in ε. In dit geval heeft A het karakter van *uniplanair kegelpunt*, terwijl de omgeving een tweedimensionaal continuum vormt. Volgens onze bepalingen is de rechte a in ε drievoudig te tellen. Blijkbaar bevat F^3 geen verdere rechten en daar a in alle van ε verschillende vlakken enkel telt, is het *totale aantal rechten op F^3 dus* 3. Daar het ons in de eerste plaats om de aantallen rechten te doen is, kan dit geval verder buiten beschouwing blijven.

In het voorgaande was degeneratie van het restovaal in vlakken door a ($\neq \varepsilon$) uitgesloten op grond van de aanname dat geen tweede rechte van F^3 de lijn a snijdt. Onderstelt men slechts dat geen tweede rechte door A gaat, dan kan zich het geval voordoen dat het restovaal degenereert in twee rechten waarvan de eene met a samenvalt en de andere niet door A gaat. Wanneer dan een vlak uit den beginstand ε om a draait, is het verloop als volgt: Aanvankelijk vertoonen de vlakken ovalen die in A aan a raken, deze

breiden zich uit en in een vlak π treedt degeneratie op in a en een niet door A gaande rechte. Bij verdere wenteling weer ovalen die in A aan a raken (nu van de andere zijde) en bij nadering van hun vlak tot ε weer tot A samentrekken. Men ziet licht in dat geen verdere degeneraties in vlakken door a kunnen optreden. A is een tweede soort *uniplanair kegelpunt* waarvan de omgeving een tweedimensionaal continuum vormt. In vlak π telt de lijn a dubbel. In vlak ε telt a enkel en is A als puntovaal op te vatten. Uit het voorgaande volgt direct dat F^3 geen verdere rechten bevat. De tweede rechte kan blijkbaar in geen enkel vlak dubbel tellen. Ook ziet men gemakkelijk in dat zij niet in meer dan één vlak drievoudig kan tellen. Of dit laatste in één vlak mogelijk is, laten we in het midden. Het *totale aantal rechten van F^3 is dus* 3 *of* 5 (waarbij we dus in het midden laten of het geval van 5 zich kan voordoen). Het optreden van een dergelijk uniplanair punt blijft verder weer uitgesloten.

p. 1275 r. 16 v. o. Med. 4 hebben we ons beroepen op zekere resultaten der derde Med. Deze waren afgeleid voor punten waardoor slechts 1 rechte van F^3 gaat en de toepassing op punten waardoor twee rechten gaan geeft onvolledigheid. Bovendien is de noot op p. 1276 niet geheel juist. Een en ander maakt dat Med. 4 aanvulling behoeft. Daarbij zal o.a. blijken dat de vroeger genoemde aantallen rechten 3, 7, 15, 27 moeten worden aangevuld tot 3, 5 [1]), 7, 9, 15, 27.

We beginnen met een uitvoerige bespreking (§§ 3 en 4) der punten waardoor 2 of meer rechten gaan. Dit zal ons in staat stellen verschillende singulariteiten apart te behandelen. Ten slotte (§ 5) zal worden besproken welke wijzigingen nog in de Med. 3 en 4 zijn aan te brengen.

§ 3. *Punten waardoor* 2 *verschillende rechten van F^3 gaan, maar niet* 3 *verschillende in één vlak gelegen rechten.*

Door A gaan in vlak α de rechten BD en CE (fig. 1). We onderscheiden 2 gevallen:

1. Geen dezer beide rechten telt dubbel in α.
2. Een dezer rechten telt dubbel in α.

In geval 1 bevat α een derde, niet door A gaande, rechte en blijkbaar komen langs elk der 4 takken die van A in α uitgaan de sectoren samen van weerszijden van α. Men ziet dan licht in dat elk der 4 takken met de beide omliggende samenhangt, beurtelings boven en beneden α. In geval 2 telt b.v. CE dubbel. Dan komen

[1]) Waarschijnlijk zal het aantal 5 nog wel door nader onderzoek worden uitgesloten.

langs AC de sectoren samen van de eene zijde van α en langs AE van de andere (via het oneindige is dit dezelfde zijde). Langs AB en AD komen overal de sectoren samen van weerszijden van α. Ook hier blijkt weer dat elk der 4 takken in α met de beide omliggende samenhangt, waarbij nu 2 opeenvolgende sectoren boven, en de andere 2 beneden α liggen.

Geval 1. Laat AB met AC en AD met AE boven α samenhangen resp. door I en III, en AC met AD en AE met AB beneden α door II resp. IV. Onderstellen we eerst *dat alle van A op F^4 uitgaande takken in dit punt aan α raken.* In elk vlak dat noch BD, noch CE bevat is A dan gewoon punt met raaklijn in α. We toonen aan dat in een vlak β ($\neq \alpha$) dat BD (of CE) bevat geen verdere takken van A uitgaan. Gaat in β nog een tak van A uit dan raakt in dat punt een ovaal aan BD, b.v. van boven. Noem de takken van dit ovaal AF en AH en laat AF op I uitgaan, dan ligt AH op III, daar de aanname dat beide op I liggen dadelijk een tegenstrijdigheid levert, als men de doorsnede beschouwt in een vlak ($\neq \alpha$) door RS (fig. 1). Laat nu β om BD wentelen, zóó dat het boven α gelegen deel naar AC gaat, dan blijft in alle standen vóór α bereikt wordt, steeds een tak van A op I uitgaan (verschillend van AB) en we houden dus steeds ovalen die aan BD raken. Hieruit volgt dat in al deze vlakken β, de lijnen door A die niet met BD samenvallen nog slechts 1 ander punt van F^4 dragen. Dit nu is onmogelijk want in elk vlak door A dat niet BD of CE bevat is A gewoon punt met raaklijn in α en laat men deze lijn in bedoeld vlak een weinig om A draaien dan krijgt men 3 verschillende snijpunten met F^4.

Een punt A als hier besproken noemen we *normaalsnijpunt van 2 rechten op F^4.*

We komen nu aan het alternatief, dat in een vlak door A een tak van dat punt uitgaat welke daar niet aan α raakt. Nemen we eerst aan dat door A nog een derde (niet in α gelegen) rechte van F^4 gaat. Laat deze naar boven op I en naar beneden op II vertrekken. Zij β het vlak door deze rechte en BD. Liggen nu binnen elke omgeving van A in β nog punten van $III + IV$ dan bestaat de doorsnede in β uit 3 rechten door A, welk geval later wordt behandeld. Resteert de mogelijkheid dat $III + AE + IV$ geheel aan één zijde van β ligt. Dan echter hangen van de 4 in β van A uitgaande takken 2 overstaande direct samen, wat onmogelijk is, zoowel wanneer een der rechten in β dubbel telt, als wanneer beide enkel tellen.

Laat een tak welke van A uitgaat en niet aan α raakt, vertrekken op I dan kan men door de lijn RS van α (fig. 1) vlakken aangeven, waarin minstens 2 takken van A op I uitgaan, maar in elk dezer vertrekt ook minstens 1 tak op II en IV elk, dus is A gewoon dubbelpunt en daar RS geen nadere raaklijn is, gaan ook op II en IV takken uit, die niet aan α raken. Hieruit volgt hetzelfde voor III. *Draait men dus α om een lijn door A in α ($\neq BD$ of CE) uit den oorspronkelijken stand, dan blijft A aanvankelijk dubbelpunt.*

Laat nu α om RS draaien, zóó dat het achterste deel naar boven gaat. We bewijzen dat er geen laatste stand is met dubbelpunt in

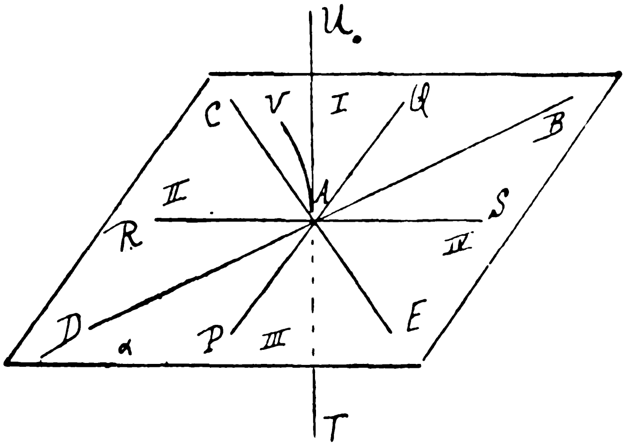


Fig. 1.

A en op I vertrekkende takken. Stel n.l. dat was het geval voor vlak β, waarin de takken AN en AM op I. Zij PQ een lijn door A in α binnen $\angle BAC$ (fig. 1) en γ een vlak voor PQ, zóó dat de takken AM en AN naar verschillende zijden uitgaan. In γ gaat dan van A een tak uit op I naar de voorzijde van β. Deze tak raakt aan de snijlijn van β en γ, daar anders β onmogelijk het laatste vlak kon zijn met dubbelpunt in A en takken op I. Daar in γ ook een tak op III uitgaat, is A dus dubbelpunt in γ, terwijl de snijlijn met β nadere raaklijn is. Uit het karakter der doorsnede in β blijkt echter dat deze lijn nog een van A verschillend punt met F^3 gemeen heeft, en hiermee is dus een contradicie bereikt [1])

Niet alle vlakken door RS vertoonen een dubbelpunt in A, want de verzamelingen van vlakken waarin 2 takken op I en van die waarin 2 op III vertrekken zouden gescheiden zijn door een vlak met 1 tak op I en III elk en dit zouden rechten wezen. In elk

[1]) Eenigszins analoge redeneeringen komen in med. 1 voor, waarnaar we echter niet steeds verwijzen, ter voorkoming van verwarring.

vlak door RS echter komen 2 takken van beneden naar A, dus is er een vlak β door RS waarin A is gewoon punt of keerpunt. Stel het eerste en laat β om RS wentelen, dan is, vóór α bereikt wordt A dubbelpunt geworden. De aanname dat geen vlak door RS een keerpunt in A vertoont leidt nu tot een onmogelijkheid want bij de genoemde wenteling van β kan er, volgens het voorgaande, geen eerste vlak zijn met dubbelpunt in A en dat er geen laatste stand kan zijn met gewoon punt in A blijkt uit de redeneering van p. 70, laatste alinea, med. 1.

Er is dus een vlak door RS met keerpunt in A. Zij dit β en de keerpuntsraaklijn TU.

In elk vlak ($\neq \alpha$) door PQ (fig. 1), dat niet TU bevat, komen 2 takken van beneden naar A op II of IV en ook 2 van boven, n.l. 1 op I en III elk, dus is A steeds dubbelpunt. Voor het vlak door PQ en TU blijft slechts over de mogelijkheid dat A hierin keerpunt is met TU als raaklijn. Hieruit volgt weer dat A dubbelpunt is in elk vlak door RS, behalve dat door TU. Dit alles is direct uit te breiden tot het volgende:

In elk vlak dat noch BD, noch CE bevat, is A dubbelpunt, behalve in de vlakken welke TU bevatten en hierin is A keerpunt met TU tot raaklijn. We merken op dat geen rechte door A nog 2 andere punten van F^3 draagt.

Resteeren te beschouwen de doorsneden in vlakken door BD of CE. Bevat zulk een vlak niet TU, dan vertoont het blijkbaar een niet gedegenereerd ovaal door A. Blijven over de vlakken door TU en een der beide rechten in α. We toonen aan dat in elk van deze de doorsnede geheel gelegen is op de snijlijn met α. Nemen we het vlak β door CE en TU. De restdoorsnede (d. i. de doorsnede afgezien van CE) bevat geen van CE verschillende rechte, daar TU alleen A met F^3 gemeen heeft en geen derde rechte door A gaat. Er kan echter ook geen ovaal zijn dat niet door A gaat, daar geen rechte door A nog twee andere punten van F^3 draagt. Stel nu er is een ovaal door A. TU is dan raaklijn in A. Laat de naar boven gaande tak AV van dit ovaal (fig. 1) uitgaan op I. Takken die van A op I uitgaan vertrekken alle achter het vlak door RS en TU. Dit is het geval voor elke lijn RS binnen $\angle BAE$, waaruit we besluiten dat geen tak, welke van A op I uitgaat een halfraaklijn in A heeft gelegen buiten 3-vlakshoek $AUCB$. De tak AV kan niet geïsoleerd zijn aan de voorzijde (d. i. de zijde waar D ligt) van vlak β (door CE en TU) en AV hangt dus aan die zijde van β met AC samen. Nemen we nu een vlak γ door BD, zóó dat AC en AU aan verschillende zijden liggen, dan ligt hierin een tak

welke van A uitgaat op den deelsector van I die AV met AC verbindt en de snijlijn van β en γ is raaklijn aan dezen tak (daar geen halfraaklijn uitgaat buiten 3-vlakshoek $AUCB$). Deze raaklijn zou dus slechts A met F^3 gemeen hebben, maar in β vertoont ze nog een tweede snijpunt met het ovaal, wat onmogelijk is.

Het vlak door CE en TU bevat dus geen punten van F^3 welke niet op CE liggen en het overeenkomstige geldt voor het vlak door BD en TU. Hieruit volgt dat alle raaklijnen in A gelegen zijn in de vlakken door TU en CE resp. BD, en omgekeerd ziet men licht in dat elke lijn door A in een dezer vlakken ook raaklijn is. *A is dus biplanair punt en in elk der raakvlakken is de doorsnede met F^3 geheel op een enkele rechte gelegen* [1]).

Op grond van het voorgaande bevat F^3 hier geen rechte welke niet in α ligt. Hieruit volgt dat geen der 3 rechten in α in eenig vlak dubbel telt. Telt ook geen dezer 3 ooit drievoudig dan is het *totale aantal rechten van F^3 dus* 3.

Laten H en K zijn de snijpunten der derde rechte in α met CE resp. BD. Voor elk dezer punten bestaan twee mogelijkheden, n.l. dat ze kunnen zijn normaalsnijpunt van 2 rechten of biplanair punt van hetzelfde type als A. Zijn beide normaalsnijpunt dan volgt uit het vroeger behandelde karakter van een dergelijk punt, dat geen der 3 rechten van α in eenig vlak drievoudig telt. Is echter H biplanair en K niet, dan telt de rechte AH ($= CE$) drievoudig in het vlak door TU, waarin dan ook zal liggen de keerpuntsraaklijn van het biplanaire punt H. Het *totale aantal rechten van F^3 is dan* 5 [2]). Is ten slotte ook K biplanair dan telt elk der 3 rechten van α drievoudig in een bepaald vlak en het *totale aantal rechten van F^3 wordt* 9.

Geval 2. In α telt CE dubbel. Laat boven α AB met AC door I en AC met AD door II samenhangen. Verder beneden α AD met AE en AE met AB door III resp. IV (fig. 2). Nemen we eerst aan dat elke van A uitgaande tak daar aan α raakt. In elk vlak dat niet BD of CE bevat, is A dan buigpunt. Beschouwen we een vlak ($\neq \alpha$) door CE. Vertrekt hierin nog een tak uit A, dan raakt in dat vlak een ovaal in A aan CE, b.v. van boven. Laat de tak die in de richting AE vertrekt, aanvankelijk op I liggen. Nemen we nu een vlak ($\neq \alpha$) door de lijn AL van α (fig. 2), dan vormen de hierin op II en IV uitgaande takken een buigpunt

[1]) Voor een duidelijke teekening van een dergelijk punt zie taf. II bij het artikel van KLEIN, Math. Ann. 6, p. 551.

[2]) We laten in het midden of dit geval zich kan voordoen.

in A, maar er gaan nog minstens 2 takken op I uit, waarmee een contradictie is bereikt.

Nemen we nu een vlak β door BD. Vertrekt hierin nog een tak uit A, dan raakt weer een ovaal in A aan BD, b.v. van boven. Gaan beide takken van dit ovaal op I uit, dan contradictie als boven. De eene tak AF zou dus op I en de andere AH op II moeten uitgaan. In β vertrekken dan uit A de takken AB en AD op de rechte en AF en AH op het ovaal dat aan de rechte raakt. Volgens vroegere resultaten [1]) hangt elke tak met de twee omliggende samen, beurtelings aan verschillende zijden van β. Nu hangen AB en AD samen aan de zijde van β waar E ligt, dus AF en AH ook, maar dan zouden I en II binnen elke omgeving van A samenhangen door een sector die niet AC of AE bevat, wat onmogelijk is. Er is dus aangetoond dat in geen enkel vlak ($\neq \alpha$) door BD of CE nog een tak van A uitgaat.

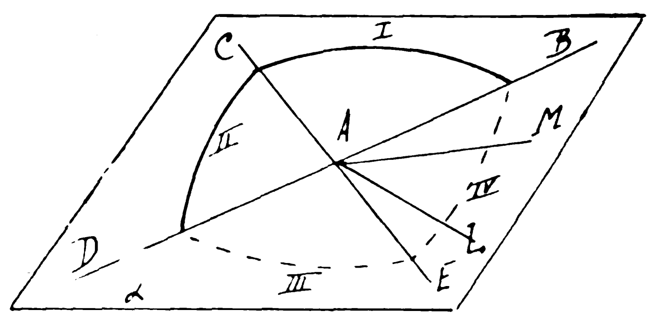


Fig. 2.

Beschouwen we nogmaals een vlak ($\neq \alpha$) door CE. Gaat hierin van een punt ($\neq A$) van CE nog een tak uit, dan raakt daar een ovaal aan CE, daar elk punt ($\neq A$) van CE aan de eene zijde van α geïsoleerd is. Men bewijst dan vrij gemakkelijk dat dit raakpunt is uniplanair kegelpunt der tweede, in het voorgaande beschreven, soort. Dergelijke punten sluiten we echter uit en concludeeren dus dat in geen enkel vlak ($\neq \alpha$) door CE nog een tak van een der punten van CE uitgaat.

Laten de vlakken $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots$ alle gaande door BD, tot α convergeeren, zóó dat de bovenste deelen naar AC gaan (fig. 2). Op den duur bevatten deze vlakken ovalen, die tot CE convergeeren. Deze ovalen zullen op den duur AB en AD snijden en in die snijpunten steeds de bolle zijde naar A keeren. Was dit laatste n.l. niet het geval, dan zouden genoemde ovalen punten gemeen hebben met elk vlak door CE en in een dergelijk vlak ging dus nog van een punt der lijn CE een tak uit.

[1]) Med. 3, p. 762 en 757.

Een punt A als boven geschetst, noemen we *normaalsnijpunt van een dubbeltellende en een enkeltellende rechte.*

We komen nu aan het geval dat een tak van A uitgaat, b.v. op I, welke niet aan α raakt. We onderscheiden 2 mogelijkheden:

1. Er gaat geen rechte van F^4 door A, niet gelegen in α.
2. Er gaat wel een dergelijke rechte door A.

1. Er zijn dan vlakken door de lijn AL van α (Fig. 2) aan te geven, zóó dat hierin twee takken op I uitgaan, maar ook een tak op II en IV elk, dus is A hierin dubbelpunt met AL tot nadere raaklijn. Dan vertrekt dus uit A een tak op I in de richting AL, waaruit volgt dat in elk vlak ($\neq \alpha$) door de lijn AM van α (fig. 2) 2 takken van A op I uitgaan. In al deze vlakken is A dubbelpunt en we besluiten dat geen rechte ($\neq CE$ of BD) door A nog 2 andere punten van F^4 draagt. Blijkbaar kan voor AM elke rechte binnen $\angle BAE$ genomen worden.

Elk punt ($\neq A$) van CE is aan de eene zijde van α geïsoleerd, dus BD is de eenige rechte van F^4 welke CE snijdt.

In een willekeurig vlak ($\neq \alpha$) door AM is A dubbelpunt met een nadere raaklijn in α. Beschouwen we het vlak β door de andere nadere raaklijn en CE. De restdoorsnede bevat geen van CE verschillende rechte, daar BD de eenige is die CE snijdt. Evenmin kan er een restovaal zijn dat niet door A gaat, daar geen rechte door A nog 2 andere punten van F^4 draagt. Een ovaal in β door A is echter ook onmogelijk, want genoemde nadere raaklijn zou ook dit ovaal raken, en dit ovaal zou dus CE nog snijden in een van A verschillend punt, wat strijdt tegen de wijze waarop de sectoren langs CE samenkomen. Vlak β bevat dus geen punten van F^4 welke niet op CE liggen. Hieruit volgt onmiddellijk dat ook β raakvlak in A is, dus is dit laatste *biplanair punt.*

Daar β geen punten van F^4 bevat, niet gelegen op CE, wordt BD door geen rechte, behalve CE gesneden. We zagen reeds dat CE door geen rechte, behalve BD wordt gesneden, dus zijn CE en BD de eenige rechten van F^4. Hieruit volgt dat geen van beide in eenig vlak ($\neq \alpha$) dubbel telt. Voor BD zoowel als CE bewijst men verder gemakkelijk dat zij ook in geen vlak drievoudig tellen. Het *totale aantal rechten van F^4 is dus* 3. Dit geval wordt verder weer uitgesloten, terwijl we in het midden laten of het zich inderdaad kan voordoen.

2. Door A gaat een rechte b van F^4, niet gelegen in α. Stel deze vertrekt naar boven op I, dan gaat ze naar beneden op IV

uit want vertrok ze op III, dan zijn direct oneindig veel vlakken door A aan te geven, waarin 6 takken vertrekken (2 op I en III elk en I op II en IV elk), wat oneindig veel degeneraties beteekent. Ook is nog evident, dat alle van A op II en III uitgaande takken, in dat punt aan α raken.

Beschouwen we het vlak β door b en CE. Een redeneering analoog aan die van pag. 734, laat dan zien dat hierin nog een derde rechte door A gaat, natuurlijk weer vertrekkende op I en IV. In β gaan dus 3 verschillende rechten door A, welk geval in § 4 wordt behandeld.

§ 4. *Punten waardoor 3 verschillende in één vlak gelegen rechten van F^3 gaan.*

Zij A een punt waardoor in vlak α drie rechten gaan. Uit A vertrekken 6 takken. Langs geen dezer komen de sectoren samen van dezelfde zijde van α, want dan zouden oneindig veel rechten van α en dus dat geheele vlak tot F^3 behooren. Ook kunnen 2 takken, welken door een enkelen gescheiden worden, niet direct samenhangen, want vond dit plaats *boven* α, dan was de sector die van den tusschenliggenden tak naar boven uitgaat, niet meer op een tweedimensionaal continuum te plaatsen. Op dit alles lettende blijkt dat aangaande den samenhang slechts 2 mogelijkheden bestaan:

1. Elke tak hangt met beide omliggende samen, beurtelings boven en beneden α.

2. Een representeerend geval hiervan is dat boven α AC met AF, AD met AE en AH met AB samenhangt en beneden α AD met AH, AE met AF en AB met AC (fig. 4).

1. Stel boven α hangt AB en AC samen door I, AD met AE door III en AF met AH door V, beneden α AC met AD door II, AE met AF door IV en AH met AB door VI (fig. 3). Stel van

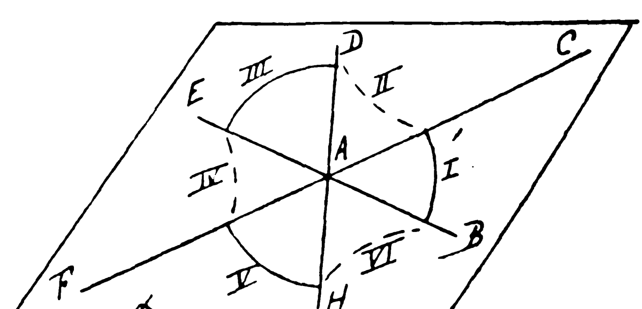


Fig. 3.

A vertrekt een tak, b.v. op I welke niet in A aan α raakt. Er is dan een vlak door A binnen $\angle DAC$ zóó te kiezen dat hierin 2

takken van A op I uitgaan. Verder op II en V elk 1. De op II uitgaande tak raakt dan niet aan α. Op deze wijze voortgaande bewijst men dat op III een tak uitgaat, welke niet aan α raakt en vervolgens hetzelfde voor IV. Dan echter zijn oneindig veel vlakken aan te geven waarin 2 takken op I en IV elk, en 1 op II en V elk uitgaan, zoodat in alle degeneratie optreedt.

Van A gaan dus slechts aan α rakende takken uit. Hieruit volgt dat A buigpunt is in elk vlak dat geen der 3 rechten van α bevat, steeds met raaklijn in α. We bewijzen nog dat in geen vlak door een der rechten van α verdere takken van A uitgaan. Stel in een vlak β door BE gaat nog een tak van A uit, b.v. naar boven. In β raakt dan een ovaal van boven aan BE, uit A vertrekkende op I en III. Laat men nu β om BE wentelen, zóó dat de bovenste helft naar C gaat (fig. 3), dan blijven steeds ovalen in A aan BE raken, vertrekkende op I en III. Elke lijn door A in een dezer vlakken heeft dus nog 1 ander punt met F^3 gemeen. Dit is echter in strijd met het boven verkregen resultaat dat A buigpunt is in elk vlak dat geen der rechten van α bevat, steeds met raaklijn in α. Draait men n.l. de raaklijn een weinig om A, dan krijgt men 0 of 2 van A verschillende snijpunten met F^3.

Een punt A als boven geschetst noemen we *normaalsnijpunt van* 3 *in* 1 *vlak gelegen rechten.*

2. Boven α hangen AC met AF (I), AD met AE (III) en AH met AB (V) samen en beneden α AD met AH (II), AE met AF (IV) en AB met AC (VI) (fig. 4). Op geen der sectoren III, IV,

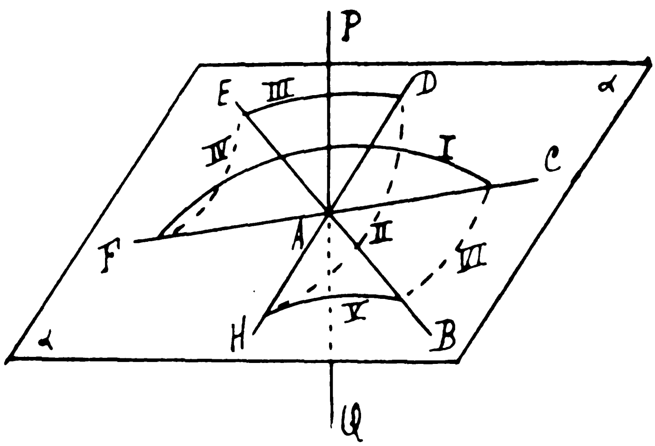


Fig. 4.

V en VI kan een tak uitgaan welke niet aan α raakt. Stel n.l. op

III ging een dergelijke tak uit, dan zijn direct oneindig veel vlakken door A aan te geven waarin 2 takken op III uitgaan en 1 op I, II, IV en VI elk. Totaal 6, dus degeneratie.

In elk vlak door A binnen een der hoeken FAE en EAD is dus de snijlijn met α een der twee nadere raaklijnen in het dubbelpunt A.

Beschouwen we een willekeurig vlak β door EB. Hierin vertrekt uit A een tak naar boven op I en een naar beneden op II, beide gelegen op het restovaal. Laat men β om BE wentelend tot α naderen, zóó dat de bovenste helft naar F gaat (fig. 4), dan convergeeren deze takken resp. tot AF en AD. Bij nadering van β tot α van de andere zijde convergeeren de takken resp. tot AC en AH. Er bestaat dus een tusschenstand van β, waarin het ovaal degenereert en er gaat dus een niet in α gelegen rechte PQ door A, vertrekkende op I (AP) en op II (AQ).

We merken nog op dat door A geen rechte gaat welke nog 2 andere punten van F^4 draagt zonder geheel tot dat oppervlak te behooren.

Zij γ een willekeurig vlak door PQ *binnen* $\angle FAH$. De doorsnede in γ, voorzoover deze niet ligt op PQ, kan bestaan uit:

1. Twee rechten door A.
2. Niets.
3. Een rechte door A (eventueel dubbeltellend).
4. Een ovaal dat in A aan α raakt.

We merken in de eerste plaats op dat geen 2 vlakken γ doorsneden kunnen vertoonen welke sub 1, 2 of 3 vallen, want er zijn dan oneindig veel vlakken door A binnen $\angle EAD$ aan te geven waarin 2 niet in γ gelegen rechten liggen welke slechts A met F^4 gemeen hebben (n.l. de snijlijnen met de 2 vlakken γ) en daar A in al deze vlakken dubbelpunt is en 1 der nadere raaklijnen in α ligt, levert dit een contradictie.

Het is dus voldoende 4 gevallen te onderscheiden. In de eerste drie vertoonen alle vlakken γ op 1 na een niet gedegenereerd restovaal, terwijl in het uitzonderingsvlak de doorsnede resp. sub 1, 2 en 3 valt. In het vierde geval ten slotte, valt in *elk* vlak γ de doorsnede sub 4.

Eerste geval. In vlak γ door PQ binnen $\angle FAH$ (fig. 4) bestaat de doorsnede uit 3 verschillende rechten door A. In het vlak door PQ en BE gaat geen derde rechte door A, want de sector I zou dan tweemaal door dit vlak gaan, terwijl hij van de eene zijde komt (AF) en aan de andere zijde eindigt (AC). Verder kan noch PQ noch BE in genoemd vlak dubbel tellen en de doorsnede bestaat dus uit 3 rechten, die een driehoek vormen. Vrijwel dezelfde rede-

neering geldt voor het vlak door PQ en DH [1]) en de sectoren I en II verwisselende, ook voor het vlak door PQ en CF. Verder is PQ nog te vervangen door elk der beide andere rechten in γ. Totaal zijn dus 15 rechten op F^3 te voorschijn gebracht, n.l. 6 door A en 9 andere. Uit het voorgaande volgt direct dat geen der 3 rechten van γ nog door andere dan de reeds genoemde, gesneden wordt. Ook bewijst men licht dat geen der 15 rechten in eenig vlak meervoudig telt. Het *totaal aantal is dus* 15.

We merken nog op dat elke lijn door A in α of γ raaklijn in dat punt is en omgekeerd ligt elke raaklijn in α of γ. *A is dus biplanair punt, waarbij elk der beide raakvlakken* 3 *verschillende rechten met F^3 gemeen heeft.* [2]) A bleek dubbelpunt te zijn in elk vlak dat niet bevat de snijlijn a van α en γ. In elk vlak ($\neq \alpha$ of γ), dat wel door a gaat, is A keerpunt, want a is daar de eenige lijn welke slechts A met F^3 gemeen heeft, terwijl elke andere nog een tweede (maar geen derde) punt van F^3 draagt.

Punten als hier beschreven blijven verder weer buiten beschouwing.

Tweede geval. Het vlak γ heeft geen punten met F^3 gemeen, welke niet op PQ liggen. De behandeling is bijna geheel analoog aan die van het *eerste geval* [3]). A is weer *biplanair punt* met α en γ tot raakvlakken. Er komen 7 rechten voor den dag n.l. de 3 in α, PQ en nog 3 gelegen in de vlakken door PQ en elk der eerste 3. Van al deze, behalve PQ, bewijst men licht dat ze in geen vlak meervoudig tellen. Voor PQ blijven 2 mogelijkheden n.l. enkele en drievoudige telling in γ. Het *totaal aantal rechten van F^3 wordt* 7 *resp.* 9. In het laatste geval draagt PQ nog een tweede biplanair punt van hetzelfde type als A. We laten echter weer onbeslist of dit laatste geval zich inderdaad kan voordoen.

Biplanaire punten als hier beschreven blijven verder weer uitgesloten. Ze zijn tusschenvormen van het direct voorafgaande type en die van p. 737. [4])

Derde geval. In γ bestaat de doorsnede uit 2 rechten door A,

[1]) DH kan niet dubbel tellen in het vlak door PQ, want sector II kon dan niet driemaal door vlak γ gaan en toch slechts eenmaal het vlak door PQ en DH passeeren.

[2]) Voor een duidelijke teekening zie taf. III bij het genoemde artikel van KLEIN.

[3]) Dat HD niet dubbel telt in het vlak door PQ blijkt als men in het oog houdt dat elk vlak ($\neq \gamma$) door PQ binnen $\angle FAH$ een ovaal vertoont dat in A aan α raakt. In de vlakken aan de eene zijde van γ vertrekken deze ovalen op I, en in die aan de andere zijde van γ op II, daar men anders in strijd komt met de conditie dat F^3 een tweedimensionaal continuum is.

[4]) Voor derdegraadsoppervlakken vgl. KLEIN, loc. cit. p. 557.

waarvan eendubbel telt. Volgens de resultaten van p. 739 en 740, gaat door die dubbeltellende nog een vlak waarin 3 verschillende rechten door A. Zooals we bij het *eerste geval* zagen, kan dit vlak niet bevatten een der rechten van α. Ook kan het niet liggen binnen een der hoeken DAE of EAF, want dan raken steeds takken aan α. Genoemd vlak zou dus binnen $\angle FAH$ liggen. Door de dubbeltellende rechte gaan dan echter 2 vlakken binnen $\angle FAH$, welke geen niet gedegenereerd restovaal vertoonen, wat onmogelijk is volgens p 742.

Vierde geval. Elk vlak γ vertoont een niet gedegenereerd restovaal, dat in A aan α raakt. Blijkbaar vertrekken deze ovalen òf alle op I òf alle op II. Stellen we het laatste, dan moeten deze ovalen bij nadering van γ tot het vlak door PQ en CF tot A contraheeren, want het alternatief brengt mee dat er punten van PQ zijn, welke buigpunt kunnen zijn met raaklijn in het limietvlak, wat onmogelijk wordt gemaakt door de rechte CF. Er bestaat dus een eindige omgeving van A, waarbinnen de naderende vlakken geen punten van I bevatten, welke niet op PQ liggen. Langs AF komen dus de sectoren I en IV samen van dezelfde zijde van het vlak door PQ en CF, m.a.w. CF telt dubbel in dat vlak. Hieruit volgt dat CF door geen rechte gesneden wordt, welke niet door A gaat. Op analoge wijze als in het voorgaande blijkt verder dat het *totale aantal rechten van* F^4 *zich hier op 7 stelt* (waarbij CF dubbel te tellen). A is *biplanair punt*, zoodanig dat de snijlijn der raakvlakken op het oppervlak ligt, terwijl een der raakvlakken tevens raakvlak langs deze geheele rechte is. Dit geval blijft verder weer uitgesloten, waarbij we overigens in het midden laten of het zich kan voordoen.

§ 5. *Over oppervlakken* F^4 *waarop niet voorkomen de boven besproken singulariteiten.*

Behalve punten waardoor geen of één rechte gaat, kan het oppervlak bevatten wat we noemden *normaalsnijpunten* van 2 of 3 rechten en van een dubbel- met een enkeltellende rechte.

In Med. 3, p. 755—762 is bewezen (*stelling* 1): *dat elk punt van een rechte van* F^4 *een raakvlak heeft, mits deze rechte door geen tweede gesneden wordt.* Hierboven (§ 2) gaven we reeds eenige aanvullingen, waarbij twee soorten uniplanaire kegelpunten te voorschijn kwamen. Overigens kan het bewijs met eenige kleine, zichzelf wijzende veranderingen [1]) worden gebruikt om de volgende stelling

[1]) Voorbeeld van een aan te brengen wijziging: p. 758, r. 13 v. o. Bestaat de restkromme uit 2 rechten, dan is B hiervan normaalsnijpunt. In β zou de kromme

aan te toonen: *Telt een rechte a van F^3 in geen vlak dubbel, dan heeft elk punt van a, waardoor geen tweede rechte gaat, een raakvlak.* Verder zijn de punten van a waardoor wel een tweede (en eventueel een derde) rechte gaat, normaalsnijpunten en deze hebben dus ook een raakvlak.

Stelling 2 van p. 762 (Med. 3) gaat, ook wat het bewijs betreft, onveranderd door, zoo we in onze beschouwingen opnemen de *normaalsnijpunten.*

Gaan we nu over tot med. 4 (p. 1274—81). Daar de behandelde singulariteiten zijn uitgesloten, geldt stelling 1 (p. 1274) en is zelfs uit te breiden tot de volgende: *De rechten van F^3, welke door een bepaald punt gaan, liggen in één vlak.*

Afgezien van het voorkomen van een vlak α dat F^3 snijdt volgens een dubbel- en een enkeltellende rechte, kan de rest van med. 4 onveranderd blijven (zie echter onder errata). In § 2 van med. 4 dringt zich hier en daar de vraag op of geen der rechten in eenig vlak meervoudig kan tellen. Nu wordt het geval van dubbeltellen eener rechte apart behandeld, terwijl voor een F^3 zonder de besproken singulariteiten, maar met een rechte welke in een vlak drievoudig telt, het totale aantal rechten steeds 3 is.

Behandelen we ten slotte het geval dat F^3 door geen vlak α gesneden wordt volgens een enkeltellende rechte a en een dubbeltellende rechte b. Het normaalsnijpunt A van a en b heeft α tot raakvlak. Draait α om a, dan komt volgens p. 738 uit b een niet gedegeneerd restovaal te voorschijn, waarvan de snijpunten met a naar weerszijden uit A komen en dat in die snijpunten aanvankelijk de bolle zijde naar A keert. Blijkbaar kan b niet gesneden worden door een niet in α gelegen rechte van F^3. Verdere rechten snijden dus alle a. Komen deze voor, dan is hun aantal minstens 4, waardoor het totaal op 7 komt. Zijn er nog meer, dan degenereert het restovaal in minstens 4 van α verschillende vlakken door a en de redeneering van p. 1279, tweede alinea (med. 4) laat zien dat F^3 dan nog rechten zou bevatten welke a kruisen, wat onmogelijk is. Voor een F^3 waarvan een rechte in een vlak dubbel telt, stelt het *totale aantal zich dus op* 3 of 7 (men bewijst n.l. licht dat deze aantallen niet door meervoudige telling verder zijn op te voeren.)

dus in B aan b raken, wat onmogelijk is, daar A keerpunt in β is. Is de restkromme een dubbeltellende rechte door B in $\varkappa$, dan kan men door een kleine draaiing van b om A in β, het punt B vervangen door 2 snijpunten, wat weer een contradictie geeft.

ERRATA.

In Med. 1, p. 59 r. 20 *staat*: „Rechte en geïsoleerd punt", *lees*: „Rechte en puntovaal".

In Med. 2, p. 325: de eerste niet cursief gedrukte alinea van § 6 kan wegblijven.

p. 327 r. 3 en 4: de letter C door D vervangen.

In Med. 3, p. 759 r. 16 *staat*: „een lijn c die niet raaklijn is aan het ovaal, en niet met a of b samenvalt"; *lees*: „een lijn c die niet met a of b samenvalt (b is raaklijn aan het ovaal)".

p. 761 r. 18 v. o. *staat*: „Hieruit volgt dat A keerpunt is in *elk* vlak behalve α"; *lees*: „Hieruit volgt dat A keerpunt is in *elk* vlak dat niet de rechte a bevat".

In Med. 4, p. 1279 r. 3 v. o. *staat*: „Nu kan geen dezer laatste 4 punten met een der eerste 4 samenvallen, want in dat geval zou een rechte van F^1 moeten gaan door dat punt en het snijpunt van b_1 en b'_1"; *lees*: „Nu kan geen dezer laatste 4 snijlijnen van c met een der eerste 4 samenvallen, want in dat geval zou een rechte van F^1 gaan door het snijpunt van b_1 en b'_1 zonder in het vlak dezer rechten te liggen".

p. 1281 r. 2 v. o. *staat*: „*kan zich niet voordoen*"; *lees*: „*kan zich slechts voordoen*".

Scheikunde. — De Heer ZEEMAN biedt, namens de Heeren A. SMITS en G. J. DE GRUIJTER, een mededeeling aan: „*Over het electromotorisch gedrag van Aluminium*" II. [1]).

(Aangeboden in de vergadering van Juni 1920).

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGERWERFF).

Om een beter inzicht te verkrijgen in het electromotorisch gedrag van aluminium en van zijn alliages met kwik, werd eerst de smeltfiguur bepaald. Hierbij werd gevonden, dat zooals uit onderstaande T X-Fig. 1 volgt, in het stelsel Hg-Al geen verbinding optreedt, en

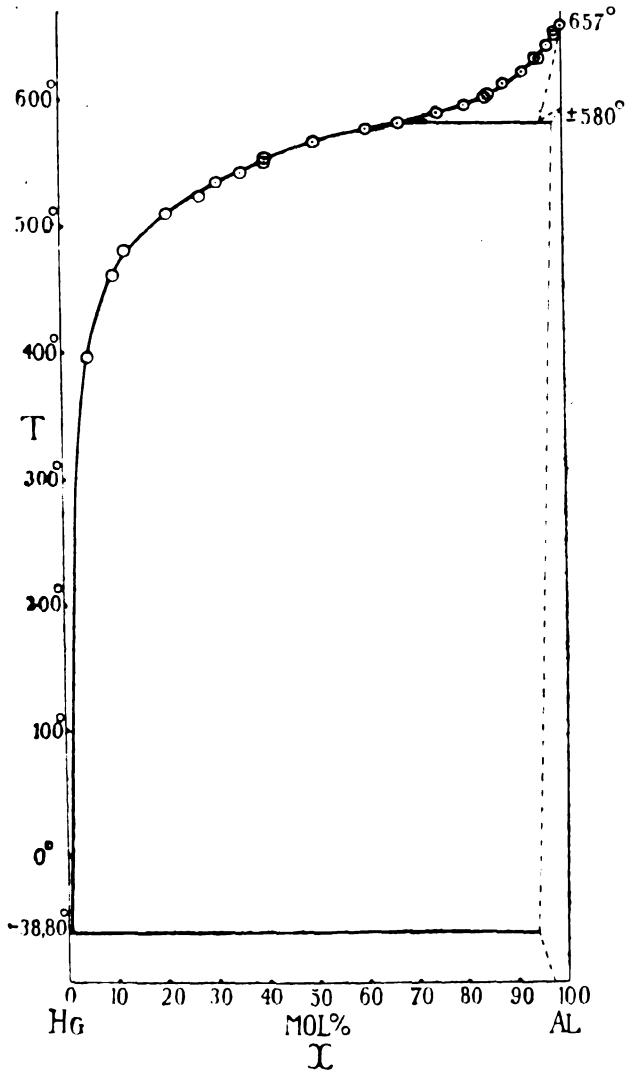
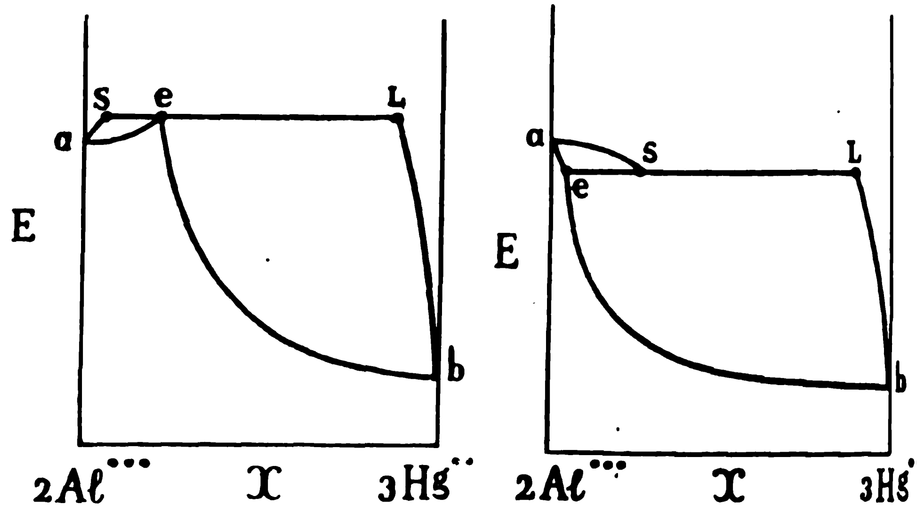


Fig. 1.

1) Eerste mededeeling, Versl. Kon. Akad. v. Wet., **28**, 930 (1920).

dat de smeltlijn van het aluminium uit twee takken bestaat, tengevolge van het optreden van een overgangspunt van Al, dat bij circa 585° gelegen is.

De. bepaling van de smeltfiguur diende ter orienteering en nu geen verbinding bleek te bestaan, was het zeker dat de EX-figuur overeenkomstig de gewone temperatuur tot het type I of II in Fig. 2 moest behooren.



Type 1. Fig. 2. Type 2.

Aannemende, dat zooals ook vroeger is geschied, het paradox van GIBBS ook van toepassing is op de in verdunden toestand aanwezige bestanddeelen van een mengkristalphase werd voor den exp. electrischen potentiaal gevonden de formule [1]):

$$E = -\frac{0.058}{\nu F} \log \frac{L_M}{(M_L^{\nu})} - 2,8.$$

Deze formule zegt reeds, dat, wanneer wij eerst den potentiaal bepalen van Aluminium, gedompeld in een niet waterige oplossing van een Al-zout en vervolgens in een aequivalente oplossing van een Al-zout + een Hg-zout, de richting van de potentiaal-verandering daarvan zal afhangen, welke grootheid sterker is afgenomen, L_M of (M_L^{ν}) [2]).

Is $(Al_L^{\cdot\cdot\cdot})$ het sterkst afgenomen dan zal de potentiaal negatiever zijn, is daarentegen (L_{Al}) het sterkst afgenomen, dan zal de potentiaal minder negatief geworden zijn.

Het spreekt wel van zelf, dat men ook omgekeerd te werk kan

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet., **27**, 311 (1918).

[2]) L_m is nu niet meer een constante grootheid, maar neemt af met grooter kwikgehalte.

gaan; men kan vooraf electroden maken met verschillende hoeveelheden kwik en deze dompelen in een niet-waterige oplossing van een aluminium zout, om de electrische potentiaal te bepalen.

Zonder hier op de wijze van proefneming in te gaan willen we thans reeds vermelden, dat de coexisteerende electrolyt steeds relatief rijker aan aluminium is dan het mengkristal, zoodat daaruit met zekerheid kon worden afgeleid, dat de E,X-figuur van het stelsel Al—Hg tot het tweede type behoort.

Maar het merkwaardige is nu, dat terwijl men dus op grond van de samenstelling der coexisteerende phasen moet verwachten, dat de potentiaal van het Aluminium in een Al-zout-oplossing bij toevoeging van een weinig van een kwikzout minder negatief wordt, juist het tegenovergestelde plaats grijpt en wel in buitengewoon sterke mate.

Dit uiterst merkwaardige verschijnsel zegt ons, zooals reeds vroeger werd ondersteld, dat het in aluminium opgeloste kwik, een katalysator voor de innerlijke omzettingen in het aluminium is. Het metaal magnesium, dat door den Heer BECK wordt onderzocht gedraagt zich op analoge wijze, doch de effecten zijn daar kleiner.

In een volgende mededeeling zal dieper op het hier vermelde interessante verschijnsel worden ingegaan.

Laboratorium voor algemeene en anorganische chemie der Universiteit.

Amsterdam, 25 Juni 1920.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer BALTH. VAN DER POL Jr.: „*Discontinuïteiten bij het Magnetiseeren.*" II.

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS).

In een vorige mededeeling onder denzelfden titel[1]) werden eenige voorloopige onderzoekingen meegedeeld aangaande de discontinuïteiten in de magnetische inductie die onder omstandigheden bij ferromagnetische lichamen optreden, wanneer de magnetiseerende kracht geheel continu wordt veranderd. De eenvoudigste wijze om deze discontinuïteiten waar te nemen bestaat hierin, dat men een spoeltje dat de te onderzoeken ferromagnetische stof omgeeft, aansluit (met of zelfs zonder triode versterker) aan een telephoon, waarin dan de stooten in de inductie waarneembaar worden, wanneer men een permanenten magneet langzaam nader brengt bij het klosje. In onze vorige mededeeling werd er reeds op gewezen dat ook galvanometrisch deze discontinuïteiten kunnen worden gevolgd, en tevens dat het verschijnsel zich bijzonder duidelijk voordoet bij nikkelstaal.

Eenige verdere onderzoekingen over deze discontinuïteiten vormen den inhoud van deze mededeeling.

Ter bepaling in welk gebied van een magnetiseeringsproces de stooten zich voordoen, werden eerst eenige hysteresiskrommen opgenomen met een geïmproviseerden magnetometer. Figuur 1 heeft

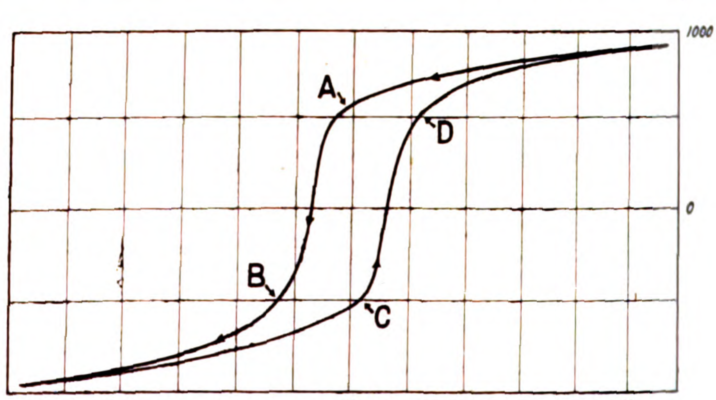


Fig. 1.

[1]) Versl. Kon. Ak. v. Wetensch. 26 Juni 1920. Deel XXIX.

betrekking op het meergenoemde nikkelstaal; dit laatste heeft een thermischen uitzettingscoëfficient gelijk aan dien van glas. De gebruikte cylindrische staaf heeft een diameter van 1,98 m.m. en is lang 343 m.m. Figuur 2 geeft de hysteresiskromme van een weekijzeren staaf (diameter 1,82 m.m., lang 349 m.m.).

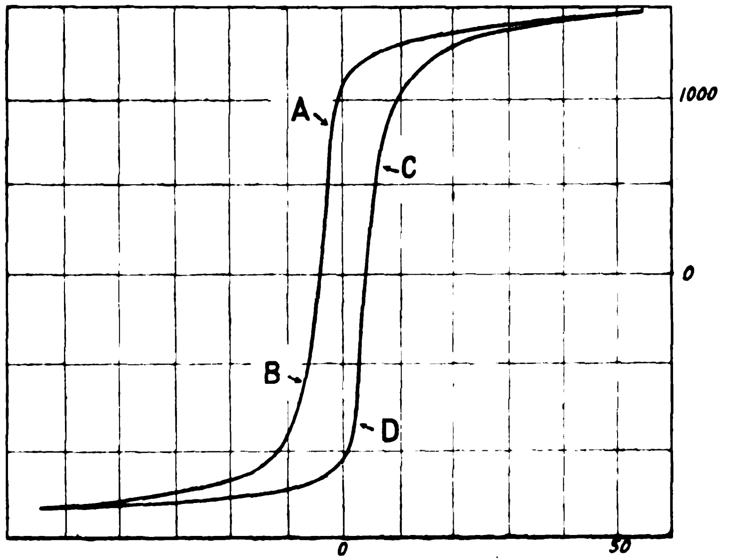


Fig. 2.

Om nu, ter bepaling van het discontinue gebied, een zeer geleidelijk aanwassen van den magnetiseerenden stroom te verkrijgen, werden twee koperen platen in de keten van de magnetiseerings-solenoïde naast elkaar in een glazen vat geplaatst. Met een hevelinrichting werd dit vat geleidelijk gevuld met een kopersulfaat-oplossing waardoor de weerstand afnam en de stroomsterkte vrij continu steeg. Nadat de *Ni Fe* of de *Fe* staaf met een daaromheen sluitend inductiespoeltje in de magnetiseerings-solenoïde was geplaatst, werd met behulp van een telephoon, door een drievoudigen triode-versterker aan het inductiespoeltje verbonden, het punt op de magnetisatiekromme bepaald waar de stooten voor het eerst optreden en het punt waar deze weer verdwijnen.

Het bleek dat de stooten in de magnetische inductie zich slechts voordoen op de steile gedeelten der magnetisatiekrommen en wel in fig. 1 en 2 op de gedeelten $A - B$ en $C - D$. Het gebied van verzadiging tot waar $H = 0$ is geworden, en dus het remanent magnetisme overblijft, verloopt, althans voorzoover waarneembaar, geheel continu, terwijl, zoodra de H daarop van teeken verandert en deze dus de bestaande magnetisatie tegenwerkt, de discontinuïten zich

beginnen voor te doen. Zij blijven bestaan over een zeker gebied dat echter niet tot de verzadiging reikt. Het geruisch in de telephonen is, zoodra het voor het eerst hoorbaar wordt bij *A* en *C*, op die plaatsen nog zwak, neemt vervolgens aan intensiteit toe om bij *B* en *D* weer geleidelijk te verdwijnen

Voor galvanometrische waarnemingen was de beschreven electrolytische stroomregeling niet voldoende continu. Met de volgende kunstgreep echter kon een zeer continue stroomverandering worden verkregen, al was ook de totale grootte van die verandering beperkt.

De magnetiseeringsspoel *M* [fig. 3] ligt in serie met een precisie-

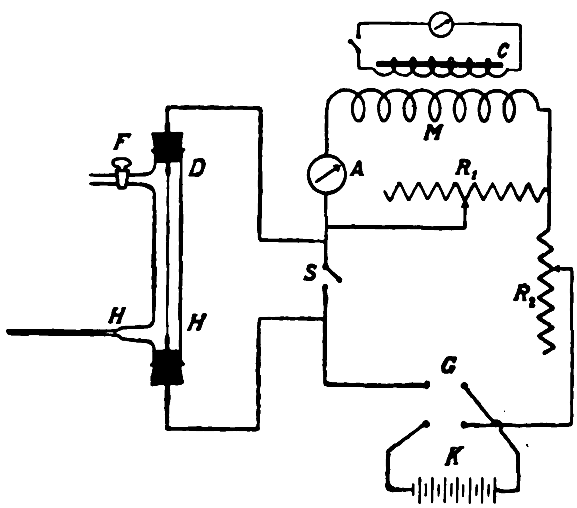


Fig. 3.

ampèremeter *A*, rheostaat R_2, sleutel *S*, commutator *G* en batterij *K*. *M* is bovendien geshunt door den veranderlijken weerstand R_1, terwijl aan *S* parallel ligt een platinadraad *DH*, die zich in een glazen buis bevindt. Deze buis heeft twee aansluitingen, die bij *D* voert door de kraan *F* naar een Gaedepomp, die bij *H* naar een lang uitgetrokken glascapillair. Nadat *S* eerst gesloten is, kan door varieeren van R_1 en R_2 en door omlegging van *G* de te onderzoeken ferromagnetische staaf *C* [die hier voor duidelijkheid buiten *M* is geteekend] eenige malen aan een magnetiseeringscyclus worden onderworpen. De stroom door *M* wordt daarop tot nul teruggebracht en sleutel *S* geopend, nadat eenigen tijd de pomp gewerkt heeft. Door bijregeling van de weerstanden wordt de platinadraad *DH* tot roodgloeihitte gebracht en de magnetiseeringsstroom op een waarde ingesteld die het ferromagneticum op een steil gedeelte der magnetisatiekromme brengt. Na het sluiten daarop van de kraan *F* loopt de gasdrukking in *DH* door de toestroomende lucht door de capil

lair langzaam op, de draad wordt afgekoeld en de magnetiseerende stroom door M neemt zeer continu toe. Met deze opstelling kon men den magnetisatiestroom bijv. van 0.200 Amp. in één minuut zeer geleidelijk laten aanwassen tot 0.230 Amp.

De discontinuïteiten die zich in de magnetische inductie van het gebruikte $NiFe$ voordoen bij een aldus verkregen geheel continue verandering van het magnetisch veld zijn weergegeven in fig. 4. Dit zijn twee fotografische opnamen op dezelfde plaat van den uitslag van een SIEMENS en HALSKE draaispoel-galvanometer die direkt (zonder serie weerstand of triodeversterker) aangesloten was aan een lange secundaire spoel van 16500 windingen (566 ohm) die het $NiFe$ over de geheele lengte nauw omsloot. Het veld wies aan in 6 sec. van 6.0 tot 6.2 Gauss, en te voren was het veld naar beide richtingen eenige malen opgevoerd tot 36 Gauss. Daar de galvanometer sterk gedempt was, kunnen de beschreven krommen van fig. 4 beschouwd worden ten naastenbij een klein stuk van de magnetisatiekromme voor te stellen (zie aanhangsel). De discontinuïteiten in de inductie zijn goed zichtbaar, bijv. vertoont de bovenste kromme 6 plotselinge toenamen der B.

Met een draaispoel-galvanometer worden slechts de grootste stooten geregistreerd. Het verschijnsel kan echter veel meer in details worden gevolgd wanneer een snaargalvanometer van EINTHOVEN gebruikt wordt. Verschillende fotogrammen werden met dezen galvanometer opgenomen direkt op bromidepapier, dat op een draaiende trommel bevestigd was, waarvan elk punt een schroeflijn met gang van 1 c.m. beschreef.

Fig. 5 en 6 zijn gedeelten uit grootere opnamen en wel is fig. 5 verkregen met de meermalen genoemde nikkelstalen staaf terwijl fig. 6 verkregen werd met de vroeger reeds gebruikte weekijzeren staaf. De 566 ohm inductie-solenoïde omringde in beide gevallen het ferromagneticum over de geheele lengte, en de gevoeligheid van den galvanometer was in beide gevallen dezelfde. Deze was zoodanig, dat een uitslag van 1.0 c.m. [dat is de afstand tusschen de opvolgende banen] aan 0.18×10^{-6} Amp. beantwoordt. De breedte van elk fotogram komt overeen met 1 secunde. De foto's werden opgenomen nadat (in beide gevallen) het materiaal op het steile gedeelte van de magnetisatiekromme was gebracht, daar waar de discontinuïteiten het talrijkst zijn. De continue toename van het veld werd verkregen met de thermische stroomregeling van fig. 3 en wel zóó, dat het veld bij het nikkelstaal in 37 seconden toenam van 6.0 tot 6.7 Gauss en bij het ijzer in 60 seconden van 4.8 tot 5.5 Gauss. De tijd verloopt in de fotogrammen van links naar rechts

en de onderste baan werd het eerst beschreven. De snelheid, waarmede de snaar zijn nieuwen evenwichtsstand bereikte na het sluiten en verbreken van een constanten stroom, is aangegeven onderaan in de fotogrammen.

Het aanmerkelijke verschil tusschen de ijzer- en nikkelstaal-stooten wordt door de fotogrammen goed weergegeven. De stooten bij het nikkelstaal zijn veel sterker: de fotogrammen bevestigen dus de te voren met versterker en telephoon gedane waarnemingen. Behalve dat zij de grootte geven, stellen de fotogrammen ook in staat bij benadering het aantal stooten te bepalen. Zoo werd gevonden voor het nikkelstaal bij een veldverandering van 6.0 tot 6.7 Gauss 1554 en voor ijzer voor een veldverandering van 4.8 tot 5.5 Gauss 1546 stooten. Daar voorts de plaats op de magnetisatiekromme, waar de discontinuïteiten zich voordoen, (zie fig. 1 en 2) bekend is, evenals het feit dat het aantal stooten bij A en C in die figuren niet dadelijk zijn volle waarde bereikt, kan bij benadering het aantal stooten dat optreedt bij een komplete ommagnetisatie geschat worden voor

Nikkelstalen staaf [diameter 1,98 m.m., lengte 343 m.m.] 5000 stooten.
Weekijzeren staaf [diameter 1,82 m.m., lengte 349 m.m.] 6500 stooten.

De afhankelijkheid van het aantal discontinuïteiten van doorsnede en lengte van de staaf is niet nader onderzocht. Aan de eene zijde zou men geneigd zijn te verwachten dat het aantal evenredig is aan het volume, of, wanneer lange ijzervezels als één geheel ommagnetiseeren, aan de doorsnede, aan den anderen kant zullen, wanneer een ijzerkristal in het inwendige van de staaf plotseling omgemagnetiseerd wordt, in de buitenste lagen Foucault-stroomen optreden, die het plotselinge van de stroomen in de inductiespoel en daarmede het geruisch in een telephoon kunnen verzwakken. Deze Foucault-stroomen zijn wellicht de oorzaak dat, ofschoon misschien één bepaalde grootte van magnetisch moment van de kristallen overweegt, op de fotogrammen stooten van de meest uiteenloopende grootte worden verkregen.

Ten slotte werd het vermoeden, dat onder omstandigheden het magnetisch moment van *langgerekte* vezels plotseling in zijn geheel omslaat, (zie l.c.) bevestigd gevonden door de volgende proef.

De nikkelstalen staaf werd in de magnetiseeringssolenoïde gebracht en de stroom op de beschreven manier thermisch geregeld. De nikkelstalen kern was daarbij gestoken door twee kleine platte spoeltjes van 3 m.m. aslengte, op elk waarvan 2600 windingen geëmailleerd koperdraad van 0,05 m.m. dikte waren gewonden, (inw. diam. spoeltje 3,4 m.m., uitw. diam. 13,0 m.m.). De onder-

linge afstand van de beide spoeltjes kon naar willekeur geregeld worden. Elk der spoeltjes was bevestigd aan een van twee geheel gelijke draaispoelgalvanometers en de stooten in de uitslagen van deze galvanometers werden waargenomen door beider lichtbeeldjes op éénzelfde schaal te projecteeren. Elk van deze beeldjes bestond uit een onder 45° hellend lichtstreepje. Wanneer nu de spoeltjes onmiddellijk naast elkaar zich bevonden, waren de stooten in de galvanometer-uitslagen synchroon en het gemeenschappelijk gevormde lichtbeeld in den vorm van een X bewoog zich als één geheel. Bij afstanden tusschen de spoeltjes grooter dan 10 c.m. waren de gemiddelde uitslagen van de galvanometers wel gelijk, doch de stooten in de uitslagen geheel incoherent. De grootere stooten echter waren, met een spoelafstand tot 7 c.m. soms nog geheel synchroon, wat er op wijst dat in het onderhavige nikkelstaal kristallen voorkomen, of althans kristalgroepen, die als een magnetische eenheid moeten worden opgevat, van zelfs 7 c.m. lengte. Mogelijk houdt de vorming van deze lange kristallen verband met het trekproces waaraan de draad bij de vervaardiging onderworpen wordt. Een poging om ook uitgegloeid ijzer of electrolytisch ijzer aan deze proef te onderwerpen slaagde niet, daar de kleinheid van de stooten bij ijzer met een draaispoelgalvanometer [een tweesnarige snaargalvanometer stond niet ter beschikking] nauwkeurige waarnemingen belet.

Aanhangsel. Interpretatie der galvanometer-krommen.

Laat in de galvanometerketen met totalen weerstand r werken een geïnduceerde E.M.K. $\frac{dN}{dt}$ (tengevolge van de verandering van de flux N door het inductieklosje), dan gelden de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} ir + L\frac{di}{dt} + K\frac{d\theta}{dt} &= \frac{dN}{dt} \\ m\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} + \mu\,\theta &= Ki \end{aligned}\right|$$

waarin zijn: θ de uitwijking van het systeem (draaispoel of snaar) μ de terugwerkende kracht, f een wrijvingsconstante, m systeemmassa en $K\frac{d\theta}{dt}$ de geïnduceerde E. M. K. voor een uitwijkingsverandering $\frac{d\theta}{dt}$.

Met verwaarloozing der zelfinductie L levert de eliminatie van i de volgende vergelijking voor de uitwijking

$$m\ddot{\theta} + \left(f + \frac{K^2}{r}\right)\dot{\theta} + \mu\theta = \frac{K}{r}\frac{dN}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De term $\frac{K^2}{r}$ geeft op de bekende wijze de elektromagnetische demping van den galvanometer weer.

Schrijft men (1) als

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\,\dot{\theta} + \omega^2\,\theta = \frac{dN'}{dt}$$

waarin

$$N' = \frac{K}{mr} N$$

$$2\alpha = \frac{f + \frac{K^2}{r}}{m}$$

$$\omega^2 = \frac{\mu}{m}$$

dan vindt men met de methode van de variatie der constanten en met de aanvangsvoorwaarden (voor $t = 0$ is $\theta = 0$ en $\dot{\theta} = 0$)

$$\theta = \frac{1}{(x_1 - x_2)}\left[e^{x_1 t}\int_0^t e^{-x_1 t}\frac{dN'}{dt}dt - e^{x_2 t}\int_0^t e^{-x_2 t}\frac{dN'}{dt}dt\right] \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin x_1 en x_2 de (negatieve) wortels zijn van

$$x^2 + 2\alpha x + \omega^2 = 0.$$

Nu is, als wij aannemen dat op den tijd $t = 0$, $N = 0$ is:

$$e^{x_1 t}\int_0^t e^{-x_1 t}\frac{dN'}{dt}dt = N_t' + x_1 e^{x_1 t}\int_0^t N' e^{-x_1 t}dt$$

en hiermede wordt (2) tot

$$\theta = \frac{1}{(x_1 - x_2)}\left[x_1 e^{x_1 t}\int_0^t N' e^{-x_1 t}dt - x_2 e^{x_2 t}\int_0^t N' e^{-x_2 t}\right]$$

Laat nu de flux N' met sprongen toenemen en wel zoo, dat de discontinue toename op het tijdstip 0 is $\Delta_0 N'$, op het tijdstip t_1 is $\Delta_1 N'$, enz. terwijl N' constant wordt geacht gedurende de tijden tusschen de sprongen. Men kan de integralen dan op de volgende wijze tot sommen uiteenleggen

$$x_1 e^{x_1 t}\int_0^t N' e^{-x_1 t}dt =$$

$$-\Delta_0 N'(1 - e^{x_1 t}) - \Delta_1 N'(1 - e^{x_1(t-t_1)}) - \Delta_2 N'(1 - e^{x_1(t-t_2)}) \ldots .$$

De uitwijking θ kan nu geschreven worden

$$\theta = \frac{1}{(x_1 - x_2)} \sum_n \Delta_n N' \left\{ e^{x_1(t-t_n)} - e^{x_2(t-t_n)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

echter met dien verstande, dat voor het tijdsverloop tot t_k slechts de eerste k termen in de reeks worden genomen. Bij elken stoot krijgt de reeksuitdrukking voor θ dus één term meer.

Voor de snelheid $\dot{\theta}$ vindt men

$$\dot{\theta} = \frac{1}{(x_1 - x_2)} \sum_n \Delta_n N' \left\{ x_1 e^{x_1(t-t_n)} - x_2 e^{x_2(t-t_n)} \right\}$$

Vlak na het moment t_k is dus de snelheid $\dot{\theta}$

$$\frac{1}{(x_1 - x_2)} \Delta_k N' (x_1 - x_2) = \Delta_k N'$$

grooter dan onmiddellijk daarvoor,

De k^{de} stoot heeft dus tot effect dat de, vlak vóór het moment van den stoot bestaande, *snelheid* met een bedrag

$$\Delta_k N' = \frac{K}{rm} \Delta_k N$$

wordt vergroot.

Elke discontinuïteit in de magnetische inductie openbaart zich derhalve in een daaraan evenredige vergrooting der snelheid van het systeem.

Beschouwen we ten slotte, hoe de uitwijking θ wordt wanneer, zooals bij den draaispoel-galvanometer het geval was, de galvanometer zeer gedempt is, en dus

$$\frac{\omega^2}{a^2} \ll 1.$$

Een eenmaal verkregen uitslag wordt in dit geval maar zeer langzaam kleiner (als bij den Grassot-fluxmeter),

De wortels x_1 en x_2 zijn hier bij benadering

$$x_{1,2} = -a \pm a \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{a^2}} \doteq -a \pm a \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{a^2}\right)$$

dus

$$x_1 \doteq -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{a}$$

$$x_2 \doteq -2a$$

De momenteele uitslag wordt nu

$$\theta \doteq \frac{1}{2a} \sum_n \Delta_n N' \left\{ e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{a}(t-t_n)} - e^{-2a(t-t_n)} \right\}$$

Duurt de proef nu niet te lang, dan is bij benadering voor alle in aanmerking komende tijden

$$e^{-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\alpha}(t-t_n)} \doteq 1.$$

De andere termen

$$-e^{-2\alpha(t-t_n)}$$

verdwijnen steeds zeer spoedig na elken stoot en geven een kleine afronding telkens aan den bovenkant van de sprongen, zooals bij die bijv. van fig. 4. *Hoe meer de galvanometer gedempt is,* hoe grooter dus α, hoe kleiner deze afronding wordt en, *hoe sneller de galvanometer de flux-veranderingen volgen kan.*

Ziet men van deze kleine afrondingen af, dan wordt de uitslag van den zeer gedempten galvanometer eenvoudig

$$\theta = \frac{1}{2\alpha} \Sigma L_n N' = \frac{N'}{2\alpha}$$

en de galvanometer-uitslagen zijn ieder moment evenredig aan de door de inductiespoel gaande flux [1]). Bij een wassen van H evenredig met den tijd beschrijft dus slechts de uitslag van een zeer gedempten galvanometer met groote nauwkeurigheid een magnetisatiekromme. Dit extreme geval kan beter worden benaderd met den draaispoel-galvanometer dan met het snaarinstrument. De kromme door het beeld van den snaargalvanometer beschreven die de oplossing van (1) vertegenwoordigt, waaruit dus de functie N zou moeten worden teruggevonden, leidt niet tot een dergelijke eenvoudige interpretatie.

Natuurkundig Laboratorium, TEYLER's *Stichting.*

Haarlem.

[1]) Direkt vindt men deze betrekking, wanneer de eerste en derde term van het linkerlid van (1) worden verwaarloosd.

BALTH. VAN DER POL Jr.: „Discontinuïteiten bij het Magnetiseeren." II.

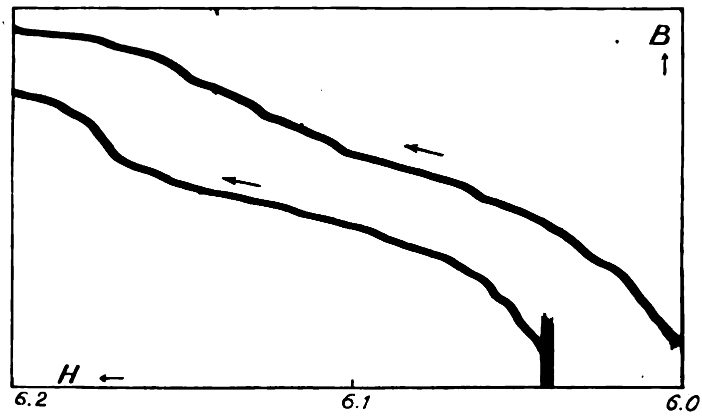


Fig. 4.

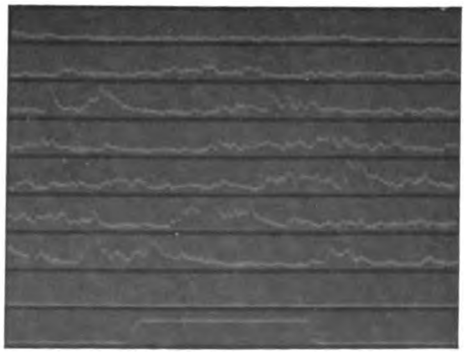


Fig. 5.

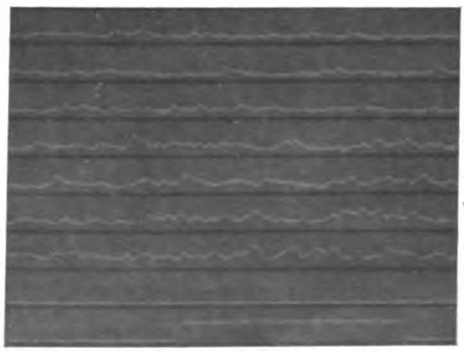


Fig. 6.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van Prof. F. BERNSTEIN te Göttingen: „*Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion.* Zweite Note: *Allgemeine Lösung*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

In den ersten Note über diesen Gegenstand, die in den Berichten der Berliner Akademie [1]) erschienen ist, wurde gezeigt, dass die Thetanullfunktion [2])

$$\vartheta_3(0\,|\,i\pi t) = \vartheta_3(i\pi t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2 t}$$

der Integralgleichung von VOLTERRASchem Typus

$$\vartheta * \vartheta - 2\,t\,\vartheta + \vartheta * 1 - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

genügt, wobei die „Faltung" $\xi * \eta$ definiert ist durch

$$\xi(t) * \eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)\,\eta(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \xi(t-\tau)\,\eta(\tau)\,d\tau.$$

Die im vorliegenden Fall uneigentlichen Integrale sind durch

$\lim\limits_{\epsilon=0} \int_\epsilon^{t-\epsilon}$ bei reellem $\epsilon > 0$ zu definieren, und der Integrationsweg muss im Existenzstreifen des Integranden $0 < R\tau < Rt$ verlaufen.

Durch die Substitution $e^{-\pi^2 t} = h$ geht die Integralgleichung (1) über in folgende:

$$\int_h^1 f(k)\,f\!\left(\frac{h}{k}\right)\frac{dk}{k} - 2\,f(h)\int_h^1 \frac{dk}{k} + \int_h^1 f(k)\,\frac{dk}{k} - \pi^2 = 0. \quad . \quad . \quad (2)$$

In Bezug auf diese wurde folgender Satz bewiesen:

THEOREM 1. *Die einzige im Inneren des Einheitskreises reguläre Lösung von* (2) *ist die Funktion* $f(h) = 1 + 2\sum_1^\infty h^{n^2}$.

Hieraus ergibt sich für die Gleichung (1) das

THEOREM 1*a*. *Die einzige Lösung von* (1), *die in der Halbebene*

[1]) Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften XL. 21. Okt. 1920, S. 735—747.

[2]) Wir folgen der Bezeichnungsweise von WEIERSTRASS-H. A. SCHWARZ, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. 2. Ausgabe, Berlin 1893.

$Rt > 0$ regulär, in jeder Halbebene $Rt \geqq \sigma_0 > 0$ beschränkt ist und die Periode $\frac{2}{\pi} i$ besitzt, ist die Thetanullfunktion $\vartheta_3(i\pi t)$.

Bevor wir ein allgemeineres Theorem über die Gleichung (1) formulieren, schicken wir folgende Verallgemeinerung der bekannten LAPLACEschen *Transformation* für den Fall uneigentlicher Integrabilität beim Nullpunkt voraus.

Es sei $\varphi(u)$ eine für $u > 0$ definierte reelle oder komplexe Funktion, die in jedem endlichen Intervall $0 < \alpha < u \leqq \beta$ eigentlich integrabel im RIEMANNschen Sinne ist. Ferner existiere für $0 < u_0$

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \varphi(u)\, du \qquad (\varepsilon > 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

und

$$\lim_{\omega = \infty} \int_{u_0}^{\omega} e^{-su} \varphi(u)\, du \text{ für } Rs = \sigma > \sigma_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

sodass also

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \varphi(u)\, du = \lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ \omega = \infty}} \int_{\varepsilon}^{\omega} e^{-su} \varphi(u)\, du$$

für $\sigma > \sigma_0$ existiert und absolut konvergiert. Dann nennen wir $f(s)$ die LAPLACEsche *Transformierte* von $\varphi(u)$ und bezeichnen sie kurz mit $L(\varphi)$; $\varphi(u)$ selbst heisse die *determinierende Funktion*[1]. $f(s)$ ist für $\sigma > \sigma_0$ regulär und beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzierbar, insbesondere ist

$$-f'(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} u\, \varphi(u)\, du,$$

also

$$L(u\varphi) = -L'(\varphi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

wobei rechts Differentiation nach s gemeint ist.

Sind $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ zwei Funktionen, deren LAPLACEsche Transformierte im obigen Sinne existieren, so ist, wenn in dem Faltungsintegral der Integrationsweg reell ist:

$$L(\varphi).\ L(\psi) = L(\varphi * \psi)\ ^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

---

[1]) Vgl. N. H. ABEL, Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes. Œuvres complètes, t. II, pp. 67—81.

[2]) Wegen der oben gemachten Voraussetzung (a), dass $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ in den Nullpunkt hineinintegriert werden können, existiert die Faltungsfunktion $\varphi * \psi$, da an jedem Ende des Integrationsintervalls eine der beiden Funktionen beschränkt bleibt.

Beweis: Wegen der absoluten Konvergenz der Integrale ist

$$L(\varphi)\cdot L(\psi)=\int_0^\infty e^{-su}\varphi(u)\,du.\int_0^\infty e^{-sv}\psi(v)\,dv=\iint e^{-s(u+v)}\varphi(u)\,\psi(v)\,du\,dv,$$

wo das Doppelintegral über den Bereich $u\geq 0$, $v\geq 0$ zu erstrecken ist. Wir setzen

$$u = w - t,$$
$$v = \phantom{w-{}} t$$

und haben nun das Integral

$$\iint e^{-sw}\varphi(w-t)\,\psi(t)\,dw\,dt$$

über den Winkelraum $0\leq t\leq w$ zu erstrecken. Man kann es folgendermassen durch ein iteriertes Integral darstellen:

$$\int_0^\infty e^{-sw}\,dw\int_0^w \varphi(w-t)\,\psi(t)\,dt,$$

da das Integral nach w existiert und absolut konvergiert. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Offenbar gilt:

$$L(1)=\frac{1}{s}\quad\ldots\ldots\ldots\quad (III)$$

Wir formulieren nun folgenden Satz:

Theorem 2. *Sämtliche Lösungen der mit reellem Integrationsweg gebildeten Integralgleichung* (1), *die eine* Laplacesche *Transformierte besitzen*[1]), *sind in der Form*

$$U(c/t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{t}-2nic}\right\}$$

enthalten, wo c *jeden komplexen Wert bedeuten kann, und sind somit für* $Rt>0$ *reguläre Funktionen von* t.

Speziell für $c=0$ *und* $c=\frac{\pi}{2}$ *erhält man* $\vartheta_3(0/i\pi t)$ *und* $\vartheta_4(0/i\pi t)$.

$U(c/t)$ *ist eine ganze transcendente Funktion von* c *mit der Periode* π. *Der in der Variablen* c *gerade Bestandteil von* $U(c/t)$ *ist gleich*

$$e^{-c^2 t}\,\vartheta_3(ict/i\pi t).$$

Beweis: Bezeichnen wir die Laplacesche Transformierte der Lösungsfunktion mit $y=y(s)$ und wenden auf (1) die Laplacesche

[1]) D. h. die Bedingungen *a*) und *b*) erfüllen. Damit wird nur über das Verhalten der unbekannten Lösung längs der Achse des Reellen eine Voraussetzung gemacht.

Transformation zu, so erhalten wir unter Benutzung der Rechenregeln (I) bis (III) die Differentialgleichung:

$$y^2 + 2y' + \frac{y}{s} - \frac{1}{s} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Setzt man

$$s = -t^2 \quad \text{und} \quad y(-t^2) = \eta(t),$$

also

$$y' = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = -\frac{\eta'}{2t},$$

so geht (3) über in

$$\eta^2 - \frac{\eta'}{t} - \frac{\eta}{t^2} + \frac{1}{t^2} = 0$$

oder

$$(t\eta)^2 - t\eta' - \eta + 1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Durch die Substitution

$$t\eta = \zeta \quad , \quad \text{also} \quad t\eta' = \zeta' - \frac{\zeta}{t}$$

erhalten wir:

$$\zeta^2 - \zeta' + 1 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung von (5) lautet:

$$t = \operatorname{arc\,tg} \zeta + c'$$

oder

$$\zeta = \operatorname{tg}(t - c') = -\operatorname{ctg}(t - c).$$

Folglich hat die Differentialgleichung (3) die allgemeine Lösung

$$y = -\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{-s} - c)}{\sqrt{-s}},$$

wo c eine beliebige komplexe Konstante ist.

Jeder Lösung y der Differentialgleichung (3), die so beschaffen ist, dass sie eine determinierende Funktion besitzt, entspricht eine und nur eine Lösung der Integralgleichung (1); denn die determinierende Funktion ist, wenn sie überhaupt existiert, eindeutig bestimmt bis auf eine Nullfunktion [1]). Aus der Integralgleichung (1) aber geht

[1]) Dieser Satz ist von Lerch (Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel; Acta Math. 27, pp. 339–351 [pp. 345–347]) für beim Nullpunkt *eigentlich* integrable $\varphi(u)$ bewiesen worden. Der Beweis gilt aber auch bei uneigentlicher Integrabilität, da auch in diesem Falle die durch (verallgemeinerte) partielle Integration gewonnene Umformung $f(s) = (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)u} F(u)\,du$, wo s_0 einen Wert

hervor, dass zwei Lösungen, die sich durch eine Nullfunktion unterscheiden, identisch sind.

Wir können nun sogleich zeigen, dass *jedem* y eine determinierende Funktion zugeordnet ist, indem wir dieselbe angeben. Es ist

$$y = -\frac{i}{\sqrt{-s}} \frac{e^{i(\sqrt{-s}-c)} + e^{-i(\sqrt{-s}-c)}}{e^{i(\sqrt{-s}-c)} - e^{-i(\sqrt{-s}-c)}} = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1+e^{-2(\sqrt{s}+ci)}}{1-e^{-2(\sqrt{s}+ci)}},$$

also für

$$\left| e^{-2(\sqrt{s}+ci)} \right| < 1 \quad , \quad \text{d.h.} \quad R\sqrt{s} > Ic$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1 + e^{-2(\sqrt{s}+ci)}\right)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(\sqrt{s}+ci)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}\left\{\sum_0^{\infty} e^{-2n(\sqrt{s}+ci)} + \sum_0^{\infty} e^{-2(n+1)(\sqrt{s}+ci)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}\left\{1 + 2\sum_1^{\infty} e^{-2n(\sqrt{s}+ci)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}} + 2\sum_1^{\infty} e^{-2nci} \frac{e^{-n\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

Zu der als Summenglied vorkommenden Funktion $\frac{e^{-2n\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ können wir die determinierende Funktion angeben; es ist nämlich

$$\frac{e^{-2n\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} = L\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{n^2}{t}}\right) \text{für } n \geqq 0,$$

wo für positive s und t die Wurzeln positiv zu nehmen sind. Der Beweis ergibt sich aus der Formel [1])

$$\frac{1}{\sqrt{\pi u}} e^{-\frac{n^2}{u}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u a^2} \cos 2na\, da.$$

Mit ihr erhalten wir nämlich:

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{n^2}{t}}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-us}\, du \int_0^{\infty} e^{-u a^2} \cos 2na\, da.$$

Für $Rs > 0$ ist dieses Integral absolut konvergent, die Integrationsfolge also vertauschbar.

---

bedeutet, für den das LAPLACE-integral existiert, und $F(u) = \int_0^u e^{-s_0 v} \varphi(v)\, dv$ ist, legitim und $F(u)$ — was bei dem LERCHschen Beweise den Ausschlag gibt — stetig ist.

[1]) Vgl. RIEMANN-WEBER. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, I, 4. Aufl. § 61, Formel (7).

$$L = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos 2\,na\,da \int_0^\infty e^{-u(s+a^2)}\,du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos 2\,na}{s+a^2}\,da.$$

Nach einer bekannten Formel[1]) ist dies gleich $\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-2n\sqrt{s}}$ für $n \geqq 0$.

In Bezug auf die oben für y erhaltene Summe behaupten wir nun: Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nci}\frac{e^{-2n\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \qquad L\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nci}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{n^2}{t}}\right).$$

In der Tat ist

$$L = \int_0^\infty e^{-us}\sum_1^\infty e^{-2nci}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-\frac{n^2}{u}}\,du$$

$$= \int_0^a + \int_a^\infty,$$

wo $a > 0$ ist. Ersetzen wir in den beiden uneigentlichen Integralen den Integranden durch seinen *absoluten* Betrag und vertauschen das Integral mit der Summe, so ist das Ergebnis eine für $\sqrt{Rs} > Ic$ konvergente Reihe; denn

$$\sum_1^\infty e^{2nIc}\int_\alpha^\beta e^{-uRs}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-\frac{n^2}{u}}\,du \leqq \sum_1^\infty e^{2nIc}\int_0^\infty e^{-uRs}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-\frac{n^2}{u}}\,du =$$

$$= \sum_1^\infty e^{2nIc}\frac{e^{-2n\sqrt{Rs}}}{\sqrt{Rs}}.$$

Ferner ist die im Integranden stehende Reihe $\sum_1^\infty e^{-2nci}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}e^{-\frac{n^2}{u}}$ in jedem Teilintervall $0 < \varepsilon \leqq u \leqq a$, bzw. $a \leqq u \leqq w < \infty$ *gleichmässig* konvergent. Die Reihenfolge von Summation und Integration ist also wenigstens für $\sqrt{Rs} > Ic$ vertauschbar[2]), womit sich die Behaup-

[1]) Vgl. Riemann-Weber, l. c. § 19, Formel (3).

[2]) Vgl. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series. London, 1908, p. 453. Der dort gegebene Satz lautet: „Wenn $\Sigma f_n(x)$ in jedem festen

tung auch für den Konvergenzbereich $R\,s > k$ ergibt. Folglich ist

$$y(s) = L\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2nci - \frac{n^2}{t}}\right).$$

Alle Lösungen der Integralgleichung (1), die eine LAPLACEsche Transformierte besitzen, sind also in der Gestalt enthalten:

$$U(c/t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left\{1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-2nci - \frac{n^2}{u}}\right\}.$$

Für $c = 0$, bzw. $c = \frac{\pi}{2}$ erhält man die Funktionen $\vartheta_3(0/i\pi t)$, bzw. $\vartheta_2(0/i\pi t)$ in der auf $\frac{1}{t}$ transformierten Gestalt [1]).

Der in c *gerade Bestandteil* von $U(c/t)$ ist

$$U_g(c/t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\left\{1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{t}} \cos 2nc\right\}.$$

Nach der Transformationsformel der Thetafunktion [1])

$$\vartheta_3(v/\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\, e^{-\pi i \frac{v^2}{\tau}}\, \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\Big/ -\frac{1}{\tau}\right)$$

ist

$$U_g(c\,t) = e^{-c^2 t}\, \vartheta_3(ict/i\pi t),$$

womit Theorem 2 vollständig bewiesen ist.

Intervall $a \leq x \leq b$, wo b beliebig ist, gleichmässig konvergiert und $\psi(x)$ für alle endlichen Werte von x stetig ist, so ist

$$\int_0^\infty \psi(x) \sum f_n(x)\, dx = \sum \int_0^\infty \psi(x) f_n(x)\, dx,$$

vorausgesetzt, dass entweder das Integral $\int_a^\infty \psi(x) \sum f_n(x)\, dx$ oder die Reihe $\sum \int_a^\infty \psi(x) f_n(x)\, dx$ konvergiert". Das Entsprechende gilt bei uneigentlichem Integral mit endlichem Integrationsintervall.

[1]) Vgl. WEIERSTRASS-SCHWARZ, l. c. p. 46.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over de toestandsvergelijking voor willekeurige temperaturen en volumina. Analogie met de formule van* PLANCK." II.

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

§ 7. Eenige Aanteekeningen bij § 1—6.

Het is welhaast twee jaren geleden dat ik het eerste gedeelte van deze Verhandeling op schrift stelde [1]; studien van verschillenden aard verhinderden de verdere uitwerking, en eerst thans kom ik op het onderwerp terug.

Voor ik evenwel overga tot de afleiding der toestandsvergelijking op grond van de gevonden algemeene uitdrukking (6) op p. 1005 l.c. voor de *tijds*middelwaarde van het snelheidskwadraat u_t^2, uitgedrukt in u_0^2 (waar u_0 de snelheid voorstelt, waarmede het beschouwde molecuul bij zijn heen en weer gaande beweging tusschen twee naburige moleculen het neutrale punt passeert), wil ik nog enkele opmerkingen maken ter verduidelijking en aanvulling van het reeds behandelde.

1. In de eerste plaats nog iets over den overgang van enkele „lineaire" grootheden tot de overeenkomstige „ruimtelijke" grootheden.

Wij kunnen nl. al onze snelheden bij het lineair gedachte probleem als de *normaal* gerichte componenten der *relatieve* snelheden beschouwen, aangezien wij ons steeds een molecuul rechtlijnig heen en weer bewegend denken tusschen twee *stilstaande*. Nu weten wij dat $\overline{u_r^2} = 2\overline{u^2}$, en dat de middelwaarde van den normaal gerichten component van $\overline{u_r^2}$ op hare beurt het derde gedeelte daarvan is, zoodat wij hebben (zie ook p. 1006 l.c.):

$$\overline{(u_r^2)}_n = \frac{2}{3}\,\overline{u^2}.$$

Derhalve kan geschreven worden:

$$\frac{1}{2}\,Nm\,\overline{(u_r^2)}_n = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\,Nm\,\overline{u^2},$$

[1] Deze Verslagen van 25 Jan. 1919 (verschenen 28 Mei), Deel XXVII, p. 995—1010.

of ook, door den index t de *tijds*middelwaarde aanduidend:

$$\frac{1}{2} Nm \{\overline{(\overline{u_r^2})_n}\}_t = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} Nm\, (\overline{u^2})_t.$$

Hierin is $\frac{1}{2} Nm\, (\overline{u^2})_t$ ($= \frac{3}{2} pv$ bij ideale gassen) $= \frac{3}{2} RT$, zoodat wij voortaan altijd kunnen schrijven:

$$\frac{1}{2} Nm \{\overline{(\overline{u_r^2})_n}\}_t = RT,$$

waarmede de bedoelde overgang is tot stand gebracht. In het vervolg zal evenwel steeds in plaats van $(\overline{u_r^2})_n$ eenvoudig worden geschreven u^2, met weglating der indices r en n en der gewone middelwaarde-streep (de tijdsmiddelwaarde wordt dan door u_t^2 aangeduid), terwijl het *werkelijke* gemiddelde snelheidskwadraat u^2, indien dit mocht voorkomen, door (u^2) zal worden aangeduid. Wij hebben derhalve:

$$\frac{1}{2} Nm\, u_t^2 = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Uitgaande van de betrekking (vergel. (a) op p. 1000 l.c.)

$$\frac{1}{2} Nm\, u_\tau^2 = \frac{1}{2} Nm\, u_0^2 + N f (l-\sigma)^2,$$

waarin σ *dien* afstand voorstelt van het middelpunt van het bewegende molecuul tot dat van het stilstaand gedachte, waarnaar het zich toe beweegt, waarop de arbeid der aantrekkende krachten haar *maximale* waarde bereikt (en waar dus de aantrekking in een afstooting overgaat) — zal men, na vermenigvuldiging met $\frac{3}{2}$, voor de *werkelijke* gemiddelde snelheidskwadraten vinden:

$$\frac{1}{2} Nm\, (u_\tau^2) = \frac{1}{2} Nm\, (u_0^2) + \frac{3}{2} N f (l-\sigma)^2.$$

Hierin stelt $\frac{1}{2} Nm\, (u_\tau^2) = E$ de *totale* Energie voor van het systeem (de atoom-energiën binnen het molecuul buiten beschouwing gelaten). Verder is $\frac{1}{2} Nm\, (u_0^2) = L_0$ de gemiddelde kinetische Energie in het neutrale punt midden tusschen de twee stilstaande moleculen (waar de aantrekkende krachten elkaar opheffen), terwijl $\frac{3}{2} N f (l-\sigma)^2 = \Delta$ den maximalen Arbeid der aantrekkende krachten voorstelt. Wij hebben deze laatste grootheid in ons eerste stuk door E_0 voorgesteld, maar aangezien deze schrijfwijze gemakkelijk tot misverstand kan aanleiding geven, zoo zullen wij in het vervolg E_0 door Δ vervangen. Wij hebben dus:

$$E = L_0 + \Delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

waarin derhalve $E = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} Nmu_\tau^2$, $L_0 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} Nmu_0^2$ is. In de gezamentlijke neutrale punten is dus $E = L_0 +$ de totale poten-

tieele energie der aantrekkende krachten, terwijl wij in de gezamentlijke punten σ in de onmiddellijke nabijheid der moleculen, waartegen het bewegende molecuul zal aanbotsen, zullen hebben $E = L_0 +$ de totale aanwas der kinetische energie tengevolge der aantrekkende krachten.

De grootheid Δ stelt dus de vaste, onveranderlijke (potentieele of kinetische) energie voor der aantrekkende krachten, waaraan temperatuursverhooging of -verlaging niets kan toe- of afdoen. Temperatuursverandering is alleen in staat L_0 te wijzigen, en daardoor ook E. Voor L_0 kan nu in het vervolg steeds $E - \Delta$ geschreven worden.

Wat de arbeid der afstootende krachten betreft, welke in werking komen nadat de aantrekkende krachten in het boven aangeduide punt σ hebben opgehouden te werken, deze is in het bovenstaande buiten beschouwing gelaten, aangezien Δ daardoor geheel ongewijzigd blijft. Immers de verminderende kinetische energie wordt eenvoudig omgezet in een overeenkomstige vermeerdering der potentieele energie — thans der afstootende krachten — welke haar hoogte punt bereikt, wanneer $u = 0$ geworden is (hoogtepunt der botsing). Wij hebben dus slechts te maken met den *maximalen* arbeid der aantrekkende krachten.

2. Wij hebben in het eerste stuk gezien dat de berekening van het *tijds*gemiddelde u_t^2 voert tot de betrekking (vergel. (6) op p. 1005)

$$u_t^2 = \frac{1}{2} u_0^2 \frac{\left\{ \varphi \sqrt{1+\varphi^2} + \log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) \right\} \sqrt{\frac{m}{2f}} + \frac{1}{2}\pi(1+\varphi^2)\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}{\log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\sqrt{\frac{m}{2f}} + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}.$$

Dit wordt, na deeling van teller en noemer door

$$\log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\sqrt{\frac{m}{2f}}:$$

$$u_t^2 = \frac{1}{2} u_0^2 \frac{\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}}{\log.}\right) + \frac{{}^1/_2\pi(1+\varphi^2)}{\log.}\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}}{1 + \frac{{}^1/_2\pi}{\log.}\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}}, \quad . \quad (c)$$

waarin (l.c.) $\varphi = \frac{l-\sigma}{u_0}\sqrt{\frac{2f}{m}}$ is. Wat den afstand $\sigma - s'$ betreft, gedurende welken de afstootende krachten zullen werken, zoo volgt deze uit

$$u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-\sigma)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(\sigma - s')^2 = 0, \quad \text{of} \quad u_0^2(1+\varphi^2) = \frac{2\varepsilon}{m}(\sigma - s')^2$$

op het hoogtepunt der botsing. Wij hebben dus voor $l-\sigma$ en $\sigma-s'$:

$$\underline{l-\sigma = u_0 \varphi \sqrt{\frac{m}{2f}}}\ ; \quad \underline{\sigma - s' = u_0 \sqrt{1+\varphi^2} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}\ ; \quad \underline{\frac{\sigma-s'}{l-\sigma} = \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}}\ , \quad (d)$$

terwijl voor de tijden t_1 en t_2 gevonden wordt:

$$\underline{t_1 = log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) \sqrt{\frac{m}{2f}}}\ ; \quad \underline{t_2 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}\ ; \quad \underline{\frac{t_2}{t_1} = \frac{{}^1/_2 \pi}{log} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}} \quad . \ . \ (e)$$

a. Bij *hooge temperaturen*, waar φ tengevolge der betrekking $\varphi = \frac{l-\sigma}{u_0} \sqrt{\frac{2f}{m}}$ *klein* wordt, wanneer u_0 groot wordt (ondersteld dat $l-\sigma$ steeds betrekkelijk klein blijft, hetgeen hier vervuld is, omdat wij steeds vaste (hoogstens vloeibare) systemen beschouwen), gaan (c), (d) en (e) met $log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) = log(\varphi + 1) = \varphi$ over in

$$u_t^2 = \frac{1}{2} u_0^2 \frac{2 + \frac{{}^1/_2\pi}{\varphi} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}}{1 + \frac{{}^1/_2\pi}{\varphi} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}}\ ; \quad \frac{\sigma - s'}{l-\sigma} = \frac{1}{\varphi} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}\ ; \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{{}^1/_2\pi}{\varphi} \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}} \ \left(\textit{hooge temp.}\right), \quad (c_1)$$

zoodat bij *zachte* botsingen (waarbij ε, de konstante der afstootende krachten, niet *zeer* veel grooter is dan f, de konstante der aantrekkende krachten), tengevolge van φ in de noemers der tweede termen in teller en noemer van bovenstaande breuk voor u_t^2, deze laatste termen zullen overheerschen, en derhalve u_t^2 tot ${}^1/_2\, u_0^2$ $(c_v = 6)$ zal naderen. Terwijl bij *harde* botsingen, wanneer ε *zeer groot* wordt ondersteld t. o. v. f, of wel wanneer φ gaandeweg iets grooter wordt bij *temperatuursverlaging*, de eerste termen de overhand bekomen, zoodat u_t^2 alsdan meer en meer tot u_0^2 $(c_v = 3)$ zal naderen.

De verhoudingen $(\sigma - s') : (l - \sigma)$ en $t_2 : t_1$ zullen *groot* uitvallen bij φ klein en $f : \varepsilon$ niet zeer veel kleiner dan 1; *kleiner* daarentegen bij iets grootere φ, en ε veel grooter dan f.

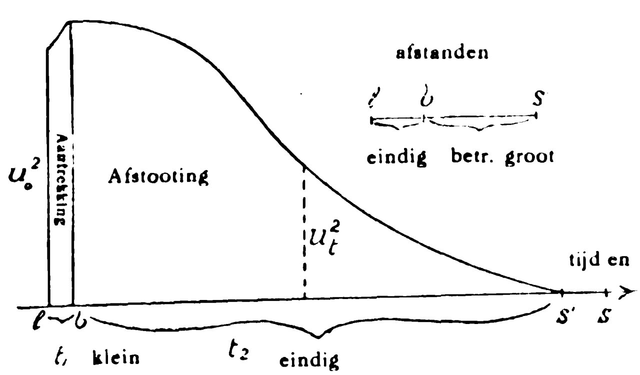
Wat $l-\sigma$ en $\sigma-s'$ zelf betreffen, zoo zij opgemerkt dat volgens onderstelling $l-\sigma$ altijd *eindig* blijft, zoodat $\sigma - s' = u_0 \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$ groot kan worden bij toenemende temperatuur en eindige ε. Maar dit grooter worden is ten eerste hierdoor beperkt, dat u_0 nooit *te* groot kan worden, wijl alsdan onze onderstellingen (vaste toestand met kleine waarden van $l-\sigma$) niet meer vervuld zouden zijn; en ten tweede daardoor dat bij betrekkelijk groote waarden van u_0, waardoor $\sigma - s'$ te groot zou worden, ε gaandeweg sterk zal toe-

nemen, zoodat de moleculen elkaar nooit dichter dan tot een zekeren minimalen afstand zullen kunnen naderen. Alleen bij zeer harde botsingen (ε zeer groot t. o. v. f) kan $\sigma - s'$ bij niet al te groote waarden van u_0 tot 0 naderen

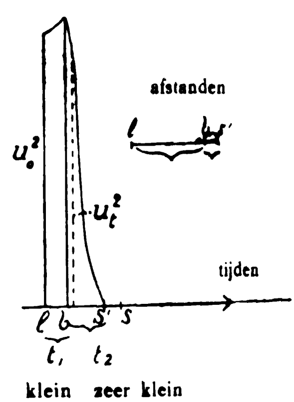
Voor t_1 en t_2 zelf geldt dat $t_1 = \varphi \sqrt{\frac{m}{2f}}$ bij hooge temperatuur altijd tot 0 zal naderen, terwijl $t_2 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$ eindig blijft — tenzij ε zeer groot is, als wanneer t_2 zelfs veel kleiner dan t_1 kan worden.

Al deze verhoudingen worden gratisch door Fig. 1*a* en Fig. 1*b* voorgesteld, waarin de waarden van u in functie van den *tijd* worden aangegeven.

Hooge temperaturen (u_0 groot, φ klein).



Zachte botsingen.
(ε/f niet zeer groot; $u_t^2 = \frac{1}{2} u_0^2$; $c_t = 6$).
Fig. 1*a*.



Harde botsingen.
(ε/f zeer groot, of T iets lager; $u_t^2 = u_0^2$; $c_t = 3$).
Fig. 1*b*.

Bij de z.g. „zachte" botsingen zal de snelheid van het botsende molecuul *niet plotseling*, maar gaandeweg verminderen. Dit wordt o.a. vervuld, wanneer wordt aangenomen dat de aantrekkende kracht reeds in een afstootende overgaat vóór de moleculen tegen elkaar aanbotsen. Men kan dan verder aannemen dat de afstootende kracht eerst bij de aanraking zelf oneindig wordt, zoodat in het algemeen — tenzij de snelheid oneindig groot is — de beide moleculen elkaar nimmer *absoluut* zullen aanraken. Er is dus altijd tusschen σ en een waarde s' iets grooter dan s (de afstand der middelpunten bij aanraking) een zekere ruimte, waarin de snelheidsvermindering tengevolge der afstootende krachten zich kan afspelen; en er blijft — zelfs bij $T = 0$ — steeds eenige afstand, hoe gering ook, tusschen de moleculen, aangezien l natuurlijk niet kleiner dan σ kan worden.

Het spreekt van zelf dat deze eenigszins gewijzigde beschouwingswijze slechts van formeelen aard is. Theoretisch verandert er niets, wanneer men s naar σ verplaatst, en s' van een punt binnen s naar een punt daarbuiten; wij behoeven echter thans bij de zachte botsingen het molecuul niet sterk ingedrukt te denken, zooals bij de vroegere beschouwingswijze.

De beide bovenstaande figuren geven ook duidelijk te kennen, waarom in het geval van Fig $1a$ u_t^2 tot $^1/_2\, u_0^2$ nadert, en in het geval van Fig. $1b$ tot u_0^2. Immers daar bv. in het eerste geval de tijd, gedurende welken de afstootende krachten werken, zoo veel grooter is dan die onder den invloed der aantrekkende krachten, zoo zal het *tijdsgemiddelde* in de nabijheid van $^1/_2\, u_0^2$ komen te liggen. In Fig. $1b$ daarentegen zal de „*werking*" (energie $\times$ tijd) der afstootende krachten zeer veel kleiner zijn dan die der aantrekkende krachten, met dat gevolg dat thans het tijdsgemiddelde slechts weinig beneden u_0^2 daalt.

Bij afnemende waarden van u_0 (lagere temperaturen) zullen — doordat q grooter en grooter wordt — de verhoudingen van Fig. $1a$ hoe langer hoe meer in de richting van Fig. $1b$ verschuiven, zoodat c_v vanaf de grenswaarde 6 reeds tot een geringere waarde zal dalen, alvorens de temperatuur tot zoo lage waarde is gedaald dat u_t^2 in omgekeerd logarithmische afhankelijkheid tot u_0^2 komt te staan (zie hieronder) — m. a. w. *alvorens men het eigenlijke „quantengebied" is binnengetreden.*

b. Bij *lage temperaturen* zal q groot uitvallen; altijd ondersteld dat in $q = \frac{l-\sigma}{u_0}\sqrt{\frac{2f}{m}}$ de grootheid $l-\sigma$ *niet* in dezelfde mate als u_0 tot 0 nadert, maar veel langzamer, zoodat $(l-\sigma):u_0$ tot ∞ zal naderen. Het is zelfs waarschijnlijk dat $l-\sigma$ zelfs bij $T=0$ niet $=0$ wordt, maar tot een zekere, geringe, grenswaarde nadert. Dit in overeenstemming met de gestadige afname der uitzetbaarheid bij zeer lage temperaturen, en met het overblijven van een zekere *eindige* nulpuntsenergie $L = {}^1/_2\, Nf(l-\sigma)^2$ bij $T=0$.

Onze vergelijking (c) gaat nu over in

$$u_t^2 = \frac{1}{2}u_0^2\, \frac{\dfrac{q^2(1+{}^1/_2\pi\sqrt{f/\varepsilon})}{\log(2q+{}^1/_2 q)}}{1+\dfrac{{}^1/_2\pi}{\log 2q}\sqrt{\dfrac{f}{\varepsilon}}} = u_0^2\,\frac{q^2}{\log(4q^2+2)}\cdot\frac{1+\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{\dfrac{f}{\varepsilon}}}{1+\dfrac{{}^1/_2\pi}{\log 2q}\sqrt{\dfrac{f}{\varepsilon}}}\quad \text{(lage temp.)}, \qquad (c_2)$$

hetgeen bij *zeer lage* temperaturen, als wanneer q tot 0 nadert, hoe langer hoe meer tot

$$u_t^2 = u_0^2 \frac{q^2}{\log(2q^2+1)} \times \left(1 + \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}\right) \quad (zeer\ lage\ temp.) \quad . \quad . \quad (c_1')$$

zal naderen, aangezien alsdan ook in $\log(4q^2+2) = \log(2q^2+1) - \log 2$ de eindige term $\log 2$ naast $\log(2q^2+1)$ kan worden weggelaten. Maar de factor $1 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}$ zal slechts dàn komen te vervallen, wanneer ε zeer groot is t. o. v. f (harde botsingen), hetgeen evenwel met het oog op het bij hooge temperaturen gevondene minder waarschijnlijk is — tenzij bij hooge temperaturen q zóó klein is, dat niettegenstaande ε zeer veel grooter is dan f, de grootheid $\frac{^1/_2\pi}{q}\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}$ toch betrekkelijk groot zou blijven.

Maar in elk geval zal in het geval (c_2) of (c_2') u^2 (evenredig met de temperatuur) zeer veel grooter zijn dan u_0^2 (evenredig met $L_0 = E - \Delta$). Beide — temperatuur en kinetische energie in het neutrale punt — naderen tot 0, maar de energie *zeer veel sneller* tot Δ (de konstante tenslotte overblijvende nulpuntsenergie der aantrekkende krachten) dan de temperatuur tot 0.

De betrekkingen (d) en (e) gaan thans over in

$$\frac{\sigma - s'}{l - \sigma} = \sqrt{\frac{f}{\varepsilon}} \quad ; \quad t_1 = \log 2q \cdot \sqrt{\frac{m}{2f}} \quad ; \quad \frac{t_2}{t_1} = \frac{^1/_2\pi}{\log 2q}\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}},$$

zoodat, bij eindig blijvende waarde van $l - \sigma$, de afstand $\sigma - s'$ niet *veel* kleiner zal wezen dan $l - \sigma$, tenzij alweer ε zeer veel grooter is dan f. De tijd t_1 nadert (logarithmisch) tot ∞, terwijl bij eindige t_2 $\left(= \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}\right)$ de verhouding $t_2 : t_1$ logarithmisch tot 0 zal naderen. Deze verhoudingen worden door onderstaande figuur voorgesteld.

Lage temperaturen (u_0 klein, φ groot).

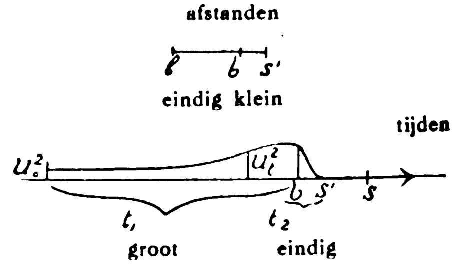


Fig. 2.

Zoowel u_t^2 als u_0^2 naderen als reeds gezegd tot 0, en de reden dat u_t^2 (d.w.z. de temperatuur) bij $u_0^2 = 0$ niet eindig blijft — daar er toch een *eindige* vermeerdering van het snelheidskwadraat (oor-

spronkelijk $= 0$) tengevolge der aantrekkende krachten bij komt — doch *eveneens* tot 0 nadert, is daarin gelegen dat de *tijd*, gedurende welken die aangroeiing plaats vindt, tot ∞ (al is het logarithmisch) nadert. In het neutrale punt is de aantrekking $= 0$, en slechts *zeer langzaam* zal er dus, wanneer het bewegende punt zich iets buiten het neutrale punt heeft verplaatst, van eenige krachtswerking (welke dan verder lineair met de uitwijking x toeneemt, zie p. 999 l. c.) en derhalve versnelling kunnen sprake wezen.

3. Gaan wij nu van u_t^2 over tot T, en van u_0^2 tot $L_0 = E-\Delta$, dan hebben wij dus in het geval van *hooge* temperaturen uit $u_t^2 = {}^1/_2 u_0^2$:

$$\frac{1}{2} N m u_t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} N m u_0^2,$$

d. w. z. (zie **Aanteekening 1**)

$$RT = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} L_0 = \frac{1}{3} L_0 = \frac{1}{3} (E-\Delta).$$

Derhalve ook

$$E = \Delta + 3\,RT, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f)$$

of

$$c_v = \left(\frac{dE}{dT}\right) = 3R = 6 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (f')$$

Ware $u_t^2 = u_0^2$ in pl. v. $= {}^1/_2\, u_0^2$ (harde botsingen, vergel. Fig. 1*b*), dan zoude $E = \Delta + {}^3/_2 RT$, $c_v = {}^3/_2\, R = 3$ geworden zijn.

Dit alles geldt voor éénatomige stoffen. Bij meer-atomige (n-atomige) stoffen moet naast de energie der aantrekkende krachten Δ ook de atoomenergie Δ' binnen het molecuul in aanmerking worden genomen, zoodat $E = L_0 + \Delta + \Delta'$ wordt. Nu is $L_0 = 3RT$, terwijl $\Delta' = 3(n-1)RT$ kan worden gesteld, wanneer $3(n-1)$ het aantal supplementaire vrijheidsgraden voorstelt. Voor E vinden wij dan $E = \Delta + 3nRT$, d. w. z. $c_v = 3nR = 6n$ (wet van NEUMANN) [1].

---

[1]) Wij herinneren er aan dat bij gassen $E = \Delta + {}^1/_2 R\,(3 + \mu)\,T$ kan worden geschreven, waarbij μ eveneens het aantal supplementaire vrijheidsgraden voorstelt (zie o. a. BOLTZMANN, Gastheorie II, p. 124—125 en 128). Maar hier is μ voor meeratomige moleculen eenvoudig $= n$, zóódat voor 1-atomige moleculen n nog $=0$ is, voor 2-atomige echter $n = 2$, voor 3-atomige $n = 3$, etc. Bij gassen wordt alzoo, met verwaarloozing van den tot 0 naderenden term ε, en evenzoo van een door BOLTZMANN ingevoerde grootheid ε, betrekking hebbende op de potentiek energie der intramoleculaire bewegingen, $E = {}^1/_2 RT\,(3 + n)$, voerende tot $c_v = {}^1/_2 R\,(3 + n)$, derhalve (met $c_p - c_v = R$) tot $\frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{3 + n}$. (Bij BOLTZMANN komt dan naast $3 + n$ nog de bovengenoemde correctiegrootheid ε).

Bij *lage* temperatuur wordt volgens (c_2), wanneer wij den factor $\left(1+\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}\right):\left(1+\frac{\frac{1}{2}\pi}{\log 2\varphi}\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}\right)$ door θ aanduiden:

$$\frac{1}{2}Nm\,u_t^2=\frac{\frac{1}{2}Nm\,u_0^2\,\varphi^2\,.\,\theta}{\log(4\,\varphi^2+2)},$$

derhalve, omdat $u_0^2\varphi^2=(l-\sigma)^2\,\frac{2f}{m}$ is, en alzoo $\frac{1}{2}Nmu_0^2\varphi^2=$ $=Nf(l-\sigma)^2=\frac{1}{2}\Delta$:

$$RT=\frac{\frac{1}{2}\theta\,\Delta}{\log\left(4\,\frac{\Delta}{E-\Delta}+2\right)},$$

wijl $\varphi^2=\frac{(l-\sigma)^2\,\frac{2f}{m}}{u_0^2}=\frac{Nf\,(l-\sigma)^2}{\frac{1}{2}Nm\,u_0^2}=\frac{\frac{1}{2}\Delta}{\frac{1}{2}L_0}=\frac{\Delta}{L_0}$ is.

Keert men de voor RT gevonden betrekking om, daarbij $\log 2$ weglatende tegenover den zooveel grooteren term $\log\left(\frac{2\Delta}{E-\Delta}+1\right)$, waar $E-\Delta=L_0$ klein is tegenover Δ, en ook $\theta=1$ stellend (hetgeen bij groote waarden van $\varepsilon:f$ vervuld is), dan verkrijgen wij:

$$E=\Delta+\frac{2\,\Delta}{e^{\frac{\frac{1}{2}\Delta}{RT}}-1}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(g)$$

Zooals wij in ons eerste stuk reeds hebben opgemerkt, is het wel uiterst opmerkelijk, dat hier (op een paar getallenfactoren na) *geheel dezelfde* betrekking tusschen E en T te voorschijn komt als door PLANCK is afgeleid op grond der door hem opgestelde „quanten"-hypothese. Daartoe was slechts noodig in de gewone dynamische betrekkingen de *tijdsgemiddelden* in aanmerking te nemen, waardoor er vooral bij lage temperaturen een *aanmerkelijk onderscheid* aan den dag treedt tusschen u_t^2 (het tijdsgemiddelde van de onder den invloed der aantrekkende krachten sterk verhoogde waarde van u_0^2) en u_0^2, terwijl beide zeer gering zijn en tegelijkertijd tot 0 naderen.

Uit (9) volgt met $\frac{1}{2}\Delta:R=\alpha$:

$$E=\frac{3}{2}R\alpha+\frac{3\,R\alpha}{e^{\alpha/T}-1}\quad;\quad c=\left(\frac{dE}{dT}\right)_v=3R\,\frac{(\alpha/T)^2\,e^{\alpha/T}}{(e^{\alpha/T}-1)^2}\,,\ .\ (g')$$

hetgeen exponentieel tot 0 nadert $\left(\text{nl. tot } 3R\,\frac{\alpha^2}{T^2}\,e^{-\alpha/T}\right)$, wanneer T tot 0 nadert.

Er is echter één groot verschil met de formule van PLANCK. Af-

gezien daarvan, dat bij PLANCK in de plaats van $^1/_2\Delta = Nf\,(l-\sigma)^2$ de bekende grootheid $Nh\nu$ optreedt, zoodat $h\nu = f\,(l-\sigma)^2$ zou moeten zijn [1]) — is bij ons formule (g) *alleen* geldig voor zeer lage temperaturen, en (f) *alleen* voor hooge temperaturen. Dit vloeit natuurlijk daaruit voort dat (c_1) slechts volgt uit de algemeene formule (c), wanneer φ klein wordt ondersteld, terwijl bij groote waarden van φ de betrekking (c_2) daaruit voortvloeit. Men mag dus bij ons (g) niet toepassen bij hooge temperaturen, hetgeen wèl bij de formule van PLANCK het geval is: de laatste geldt (bij kleine volumina) zoowel voor lage als voor hooge temperaturen.

Het is evenwel opmerkelijk dat *indien* (g) voor hooge temperaturen geldig ware (hetgeen bij ons echter niet het geval is), men behoorlijk als limietwaarde voor E verkrijgt $E = \Delta + 3RT$, identiek met (f). Onze formule, waaruit (f) voor hooge temperaturen en (g) voor lage voortvloeit, schijnt algemeener te zijn, terwijl de nadering tot (f) bij ons op eenigzins andere wijze plaats vindt dan bij de formule van PLANCK.

In elk geval zal men moeten aannemen — zal inderdaad φ klein zijn bij hooge temperatuur, en groot bij lage temperatuur, en zal Δ niet $= 0$ worden bij $T = 0$ — dat bij gecondenseerde (vaste) systemen $(l-\sigma)^2$ slechts betrekkelijk weinig verandert; en wel in de zelfde mate als de frequentie ν. De grootheid h van PLANCK zou dan op bepaalde wijze in verband staan met de konstante der aantrekkende krachten f (op hare beurt in betrekking staande tot e^2, wanneer e het electrische elementairquantum voorstelt), en daardoor ook met $^{a_0}/_{v_0}$ bij het absolute nulpunt. Er zijn hiervoor zeer sterke aanwijzingen: in het bijzonder het ontwijfelbare verband tusschen de z.g. *chemische* konstante en ook de *dampdruk*-konstante eenerzijds en de grootheid $^{a_0}/_{v_0^2}$ anderzijds, zooals ik nog onlangs heb aangetoond in een Verhandeling in het Recueil des Tr. Ch. van Maart en Mei 1920 — terwijl men weet dat die chemische konstante op hare beurt wederom met h samenhangt.

Op dit speciale onderwerp hoop ik later terug te komen.

4. Wij willen thans nog iets zeggen aangaande den aard en de werkingswijze der door ons aangenomen krachten tusschen de moleculen.

In verband met het reeds boven opgemerkte, zouden wij kunnen aannemen dat de aantrekkende werking, van M_1 b.v., op zekeren kleinen afstand van M_1 snel afneemt, om op een bepaalden zeer

[1]) Vergelijk hetgeen aangaande $l-\sigma$ onder b) van Aant. 2 is opgemerkt.

kleinen afstand σ te verdwijnen, en plaats te maken voor een snel toenemende afstooting die voor $x = s$, als wanneer het bewegende molecuul P het molecuul M_1 zou aanraken, oneindig groot zou worden. (Zie verder hetgeen hierover reeds onder a) van Aant. 2 is gezegd).

Zoodoende heeft men geen twee afzonderlijke krachten noodig, en ook geen twee afzonderlijke Viriaal-gedeelten — een Aantrekkings-Viriaal en een Afstootings-Viriaal — maar slechts één enkel; welk standpunt door mij reeds een twintigtal jaren geleden is uitgewerkt [1]. Het verschil met de aanname in het eerste deel dezer Verhandeling is dus hoofdzakelijk hierin gelegen, dat toen de aan-

Totale kracht F.

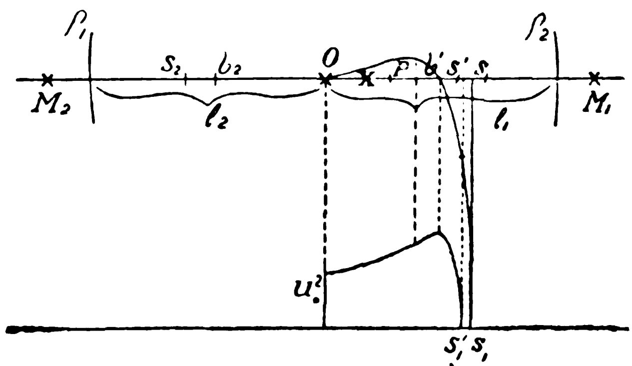


Fig. 3.

trekkende kracht toenemende bleef tot σ toe, om dan plotseling (*discontinu* derhalve) in een afstootende kracht over te gaan, met een andere intensiteitskonstante ϵ dan die der aantrekkende kracht f; terwijl wij thans een *continuen* krachtsovergang bij σ onderstellen, met één enkele constante f.

Analytisch kan men dit — wat bv. de krachtswerking, op P door M_1 uitgeoefend, betreft — uitdrukken door een vorm van de gedaante

$$F_1 = f(\varrho_1 - l_1 + x)\frac{l_1 - \sigma_1 - x}{l_1 - s_1 - x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

waarin $x = OP$, terwijl de indices 1 alle betrekking hebben op afstanden vanaf M_1, naar links gemeten; en dit in pl. v. eenvoudig $F_1 = f(\varrho_1 - (l_1 - x_1))$, zooals wij vroeger (l. c. p. 999 e. v.) stelden, d. w. z. de aantrekkende kracht evenredig met den afstand van het bewegende punt P tot den rand van de attractiesfeer ϱ_1 (van M_1), zoodat $F_1 = 0$ is, wanneer P *op* den rand van deze sfeer of daarbuiten is gelegen. Daardoor wordt thans de aantrekking, na een maximum bereikt te hebben, bij σ_1 (x dus $= l_1 - \sigma_1$) opnieuw $= 0$,

[1]) Zie Arch. Teyler (2) T. VII, 3ième Partie. p. 1—34 (1901): „Sur l'influence des corrections etc." (vooral p. 28 e. v.).

keert van teeken om, en gaat over in een afstooting, welke bij s_1 ($x = l_1 - s_1$) oneindig zou worden. Van het andere molecuul M_2 ondergaat P een aantrekking

$$F_2 = f(\varrho_2 - l_2 - x)\,\frac{l_2 - \sigma_2 + x}{l_2 - s_2 + x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

waarin x wederom $= OP$ is, en de indices 2 nu betrekking hebben op afstanden vanaf M_2, naar rechts gemeten.

Voor de *totale* actie, op P naar rechts uitgeoefend (zie Fig. 3), vindt men dus (met weglating der indices, daar $l_1 = l_2 = l$, etc.) na eenige herleidingen:

$$F = F_1 - F_2 = f\,.\,2x\left[1 - \frac{(\varrho - s)(\sigma - s)}{(l-s)^2 - x^2}\right], \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

inplaats van eenvoudig $F = F_1 - F_2 = f\,.\,2x$, zooals vroeger (p. 999).

Het spreekt vanzelf, dat de *totale* aantrekkende kracht iets vroeger $= 0$ zal worden, wanneer P zich naar M_1 beweegt, dan bij σ_1 (wanneer F_1 *alleen* werkt) — en wel bij σ'_1 of eenvoudig σ' — aangezien de aantrekkende kracht van M_2 in tegengestelden zin werkzaam is. Inderdaad wordt bovenstaande $= 0$, wanneer

$$x_{\sigma'} = \sqrt{(l-s)^2 - (\varrho - s)(\sigma - s)} = \sqrt{(l-\sigma)^2 - (\varrho + \sigma - 2l)(\sigma - s)} = l - \sigma'.$$

Daar in het door ons beschouwde geval het molecuul P zich steeds binnen de attractiesferen der beide moleculen M_1 en M_2 zal bevinden, zoo is (verg. p. 998 l.c.) steeds $2l < \varrho + s$, derhalve à fortiori $2l < \varrho + \sigma$. De waarde van $x_{\sigma'}$ is dus $< l - \sigma$, d. w. z. F wordt $= 0$ in σ', links van σ_1 [1]).

Evenwel — al dergelijke functies hebben het nadeel dat de verdere integraties door gesloten vormen onuitvoerbaar worden; want zoowel bij hooge als bij lage temperaturen (u_0 groot of klein) kan in $\sqrt{u_0^2 + \frac{2}{m}\int_0^x F dx}$ de arbeidsterm ${}^2/_m \int$ nooit als doorloopend klein beschouwd werden t. o. v. u_0^2 tusschen de grenzen $x = 0$ en $x = s'$. Immers ten slotte (op het hoogtepunt der botsing) wordt in beide gevallen (hooge en lage temperatuur) de grootheid onder het wortelteeken $= 0$, derhalve de genoemde arbeidsterm van dezelfde grootte-orde als u_0^2. En bij lage temperaturen, wat voor onze beschouwingen

[1]) Wanneer de afstand l der moleculen *te* klein wordt, dan zal F niet meer eerst positief worden rechts van O, om in $\sigma' = 0$ te worden. en eerst dáárna negatief — maar dadelijk negatief, d.w.z. er heeft dan reeds onmiddellijk rechts van O afstooting plaats. Hetzelfde geldt natuurlijk voor links. Wij komen op al deze verschillende gevallen in ons volgend stuk bij de berekening van het Viriaal nog terug.

juist het belangrijkste geval is, is die term bijna overal van de grootte-orde u_0^2 — behalve in de nabijheid der punten O en ergens tusschen σ' en s', waar die term $=0$ wordt. (Zie fig. 3).

Daarom zijn wij in ons eerste stuk genoodzaakt geweest de aantrekking en de afstooting *afzonderlijk* te beschouwen, en in pl. v. het in Fig. 3 geteekende verloop van F, een kracht aan te nemen welke tot σ_1 toe evenredig met x blijft toenemen, om dan plotseling in een afstootende kracht over te gaan, welke eveneens lineair toeneemt met den afstand van P tot σ_1 (P nu rechts van σ_1 gedacht). Hierdoor worden de integraties, zooals wij hebben gezien, gemakkelijk uitvoerbaar, terwijl het wezen der zaak onaangetast blijft.

Wil men het invoeren van een z.g. „attractiesfeer" vermijden — waardoor men tevens het voordeel bereikt dat het aannemen van een overgangsgeval (zie p. 997 l.c.) onnoodig wordt (nl. het geval waarin het bewegende molecuul wèl altijd binnen de attractiesfeer van M_1 zich bevindt, maar niet altijd binnen dien van M_2), dan moet men in de uitdrukkingen voor F_1 en F_2 ϱ_1-l_1+x en ϱ_2-l_2-x vervangen door een plausibele attractiewet, zoodat wij bv. hebben:

$$F_1=\frac{f}{(l-x)^n}\frac{l-\sigma-x}{l-s-x} \quad ; \quad F_2=\frac{f}{(l+x)^n}\frac{l-\sigma+x}{l-s+x},$$

waardoor bij *kleine* waarden van x verkregen wordt:

$$=\frac{f}{l^n}\left(1+n\frac{x}{l}\right)\frac{l-\sigma}{l-s}\left(1-\frac{\sigma-s}{(l-\sigma)(l-s)}x\right)-$$

$$-\frac{f}{l^n}\left(1-n\frac{l}{x}\right)\frac{l-\sigma}{l-s}\left(1+\frac{\sigma-s}{(l-\sigma)(l-s)}x\right),$$

d.w.z.

$$F=\frac{f}{l^n}\frac{l-\sigma}{l-s}\left[\frac{n}{l}-\frac{\sigma-s}{(l-\sigma)(l-s)}\right]2x=\frac{f}{l^{n+1}}\frac{l-\sigma}{l-s}\left[n-\frac{l(\sigma-s)}{(l-\sigma)(l-s)}\right]2x,$$

d. w. z. wederom evenredig met x. Deze aanvankelijke evenredigheid, en de daarmede gepaard gaande kwadratische vorm van den arbeidsterm $\int F dx$ blijft bestaan, *welke* vorm men ook aan de uitdrukkingen voor de krachtswerking geeft.

Volgens DEBYE[1]) zou de exponent n de waarde 9 hebben (bij anomale „Dipol"-gassen zou daarentegen $n=7$ zijn; zie de Noot op p. 183 l.c.).

Maar ook bovenstaande vormen voor F_1 en F_2 lijden in nog sterkere mate aan het euvel, dat zij bij de verdere berekeningen tot onuitvoerbare integraties leiden.

[1]) DEBYE, Die v. D. WAALS'schen Kohäsionskräfte, Physik. Zeitschr. **21**, p. 178—187 (1920).

5. Intusschen zou men — zonder zijn toevlucht te nemen tot de door ons om praktische redenen gekozen dualistische krachtswet: een voor de aantrekking en een ander voor de afstooting — ter berekening van

$$t = \int_0^{l-s'} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \omega_x}} \quad ; \quad u_t^2 = \frac{1}{t} \int_0^{l-s'} \sqrt{u_0^2 + \omega_x}\, dx, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarin $\omega_x = \frac{2}{m_0} \int_0^x F dx$, ook kunnen gebruik maken van (2); mits men bij de logarithmische uitdrukking, welke men alsdan voor ω_x verkrijgt, zich met een zekere benadering vergenoegt. Men vindt nl.

$$\omega_x = \frac{2f}{m} \left[x^2 + (\varrho - s)(\sigma - s) \log \frac{(l-s)^2 - x^2}{(l-s)^2} \right], \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin x bij de bovenstaande integraties van 0 tot $l-s'$ gaat. En daar s' steeds $> s$ is (alleen bij een oneindig groote waarde van u_0 zou op het hoogtepunt der botsing s bereikt kunnen worden), zoo is $l-s'$ steeds $< l-s$. Vooral bij lagere temperaturen, waarbij s' betrekkelijk ver van s verwijderd blijft, zal $(l-s') : (l-s)$ zelfs bij de uiterste waarde van x belangrijk kleiner dan 1 kunnen blijven. (Is b.v. $l = 1{,}2\, s$, $s' = 1{,}1\, s$, dan wordt deze verhouding reeds $^1/_2$). Wij kunnen dus voor den logarithmischen term benaderd schrijven:

$$\log \left(1 - \frac{x^2}{(l-s)^2} \right) = - \frac{x^2}{(l-s)^2} - \frac{x^4}{2\,(l-s)^4},$$

zoodat met

$$\frac{(\varrho - s)(\sigma - s)}{(l-s)^2} = \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

voor ω_x verkregen wordt:

$$\omega_x = \frac{2f}{m} (l-s)^2 \left[(1-\alpha) \frac{x^2}{(l-s)^2} - \frac{\alpha}{2} \frac{x^4}{(l-s)^4} \right]. \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

Voor den vorm onder het wortelteeken kan dus worden geschreven:

$$u_0^2 \left[1 + \frac{2f}{m} \frac{(l-s)^2}{u_0^2} \left\{ (1-\alpha)\, y^2 - {}^1/_2\, \alpha\, y^4 \right\} \right] = u_0^2 \left[1 + q^2 \{(1-\alpha) y^2 - {}^1/_2 \alpha y^4\} \right],$$

wanneer wij wederom, evenals in het eerste stuk, $\frac{l-s}{u_0} \sqrt{\frac{2f}{m}} = q$ stellen, en verder $\frac{x}{l-s}$ door y vervangen. Alsdan wordt:

$$t = \frac{l-s}{u_0} \int_0^{\frac{l-s'}{l-s}} \frac{dy}{\sqrt{1 + q^2 \{(1-\alpha) y^2 - {}^1/_2\, \alpha y^4\}}} \quad ; \quad u_t^2 = (l-s) \frac{u_0}{t} \int_0^{\frac{l-s'}{l-s}} \sqrt{\text{ibid}}\, .\, dy$$

Hierin kan men voor den vorm onder het wortelteeken schrijven $(1-w_1 y^2)(1+w_2 y^2)$, wanneer

$$w_2 - w_1 = \varphi^2 (1-a) \quad ; \quad w_1 w_2 = {}^1/_2\, \varphi^2 a$$

is, zoodat die vorm met $y\sqrt{w_1} = z$ overgaat in $(1-z^2)\left(1+\frac{w_2}{w_1}z^2\right)$, hetgeen met $z = \cos\psi$ wordt:

$$\sin^2\psi\left(1+\frac{w_2}{w_1}(1-\sin^2\psi)\right) = \frac{w_1+w_2}{w_1}\sin^2\psi\left(1-\frac{w_2}{w_1+w_2}\sin^2\psi\right).$$

Voor $dy =$ heeft men verder $\frac{dz}{\sqrt{w_1}} = -\frac{1}{\sqrt{w_1}}\sin\psi\, d\psi$, zoodat bovenstaande integralen overgaan in

$$t = -\frac{l-s}{u_0\sqrt{w_1}}\sqrt{\frac{w_1}{w_1+w_2}}\int_{1/2\pi}^{0}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}};$$

$$u_t^2 = -\frac{l-s}{\sqrt{w_1}}\sqrt{\frac{w_1}{w_1+w_2}}\,\frac{u_0}{t}\int_{1/2\pi}^{0}\sin^2\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$

wanneer $\frac{w_2}{w_1+w_2} = k^2$ wordt gesteld (k^2 is dus altijd < 1). Wat de grenzen der integralen betreft, zoo is blijkbaar voor $y = 0$ ook $z = 0$, dus $\psi = {}^1/_2\pi$. En daar bij de bovenste grens $u_0^2 + \omega_z = 0$ wordt (hoogtepunt der botsing), zoo is ook $(1-z^2)\left(1+\frac{w_2}{w_1}z^2\right) = 0$, derhalve $z = 1$, $\psi = 0$. Wij hebben alzoo, na omkeering der grenzen, waardoor de minusteekens vervallen:

$$t = \frac{l-s}{u_0}\frac{1}{\sqrt{w_1+w_2}}\int_0^{1/2\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}\;; \qquad u_t^2 = u_0^2\,\frac{w_1+w_2}{w_1}\,\frac{\int_0^{1/2\pi}\sin^2\psi\,\Delta\psi\,.\,d\psi}{\int_0^{1/2\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}},$$

wanneer in de uitdrukking voor u_t^2 voor t hare waarde wordt gesubstitueerd. De volledige elliptische integraal van de 1e soort, nl. $\int_0^{1/2\pi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}$, met Legendre door F_1 of eenvoudig F aanduidend, zoo heeft men dus ook:

$$t = \frac{\varphi}{\sqrt{(w_1+w_2)}}\sqrt{\frac{m}{2f}}\,.\,F\;; \qquad u_t^2 = \frac{w_1+w_2}{w_1}\,\frac{u_0^2}{F}\int_0^{1/2\pi}\sin^2\psi\,\Delta\psi . d\psi,$$

wanneer $\frac{l-s}{u_0}$ door $\varphi \sqrt{\frac{m}{2f}}$ wordt vervangen (zie boven). Voor den modulus k hebben wij:

$$k^2 = \frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{{}^1/_2\, \varphi \left[\varphi (1-\alpha) + \sqrt{\varphi^2 (1-\alpha)^2 + 2\alpha} \right]}{\varphi \sqrt{\varphi^2 (1-\alpha)^2 + 2\alpha}},$$

wanneer men uit bovenstaande uitdrukkingen voor $w_2 - w_1$ en $w_1 w_2$ de grootheden w_2 en $w_1 + w_2$ berekent. Wij kunnen dus schrijven:

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{2\alpha}{\varphi^2 (1-\alpha)^2}}}\right], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zoodat (mits $\alpha < 1$, als wanneer het $+$ teeken geldt) bij lage temperaturen (groote waarden van φ) k^2 steeds dicht bij 1 is.

Wij moeten thans de laatste elliptische integraal (die met $sin^2 \psi$) nog tot die der 1e en 2e soort herleiden. Volgens bekende reductie-formules [1]) is

$$\int_0^\psi sin^2 \psi \, \Delta \psi \, . \, d\psi = \frac{1}{3}\left[\frac{1-k^2}{k^2}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \frac{2\,k^2 - 1}{k^2}\int_0^\psi \Delta\psi . d\psi - sin\,\psi \,cos\,\psi \Delta\psi\right],$$

derhalve

$$\int_0^{{}^1/_2 \pi} sin^2 \psi \, \Delta \psi . d\psi = \frac{1}{3}\left[\frac{1-k^2}{k^2} F + \frac{2\,k^2-1}{k^2} E\right],$$

wanneer de volledige elliptische integraal van de tweede soort, nl. $\int_0^{{}^1/_2 \pi} \Delta\psi . d\psi$ door E wordt voorgesteld. Wij vinden derhalve ten slotte:

---

[1]) Zie o. a. DURÈGE, Th. der ellipt. Funct., p. 65, formule (29), nl. (met $\mu = 0, m = 0$)

$$sin\,\psi\, cos\,\psi\, \Delta\,\psi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\Delta\psi} - 2\,(1-k^2)\int_0^\psi \frac{sin^2\,\psi\, d\psi}{\Delta\,\psi} + 3\,k^2 \int_0^\psi \frac{sin^4\,\psi\, d\psi}{\Delta\,\psi},$$

waaruit de integraal met $sin^4\psi$ in de beide anderen kan worden uitgedrukt, terwijl die met $sin^2\psi$ in F_ψ en E_ψ wordt uitgedrukt door de formule (zie p. 69)

$$k^2 \int_0^\psi \frac{sin^2\,\psi\, d\psi}{\Delta\,\psi} = F_\psi = E_\psi,$$

zooals ook gemakkelijk door differentiatie kan gecontroleerd worden, nadat overal $\Delta\psi = \sqrt{1-k^2\, sin^2\psi}$ in den noemer is gezet. (De door ons te herleiden integraal wordt dan $\int_0^\psi \frac{sin^2\,\psi\, - k^2\, sin^4\,\psi}{\Delta\,\psi} d\psi$).

$$t = \sqrt{\frac{2k^2-1}{1-\alpha}}\sqrt{\frac{m}{2f}}\,F \quad ; \qquad u_t^2 = \frac{u_0^2}{3k^2}\left[1+\frac{2k^2-1}{1-k^2}\frac{E}{F}\right], \quad . \quad (7)$$

omdat

$$\frac{\varphi}{\sqrt{w_1+w_2}} = \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\varphi^2(1-\alpha)^2+2\alpha}} = \sqrt{\frac{2k^2-1}{1-\alpha}} \text{ is, en } \frac{w_1}{w_1+w_2} = 1-k^2.$$

Wij willen thans de gevonden formules (7) met de vroeger gevondene vergelijken, en wel wederom in de beide grensgevallen: hooge en lage temperaturen.

Bij *hooge* temperaturen (φ klein) nadert k^2 tot $^1/_2$ (indien $\alpha<1$), zoodat (7) alsdan overgaat in

$$t = 0 \quad ; \quad u_t^2 = {}^2/_3\, u_0^2 \; (\textit{hooge temp.}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7^a)$$

in plaats van $u_t^2 = {}^1/_2 u_0^2$ (zachte botsingen), zooals wij vroeger vonden. De snelheidsval tijdens de werking der afstootende kracht — uitgedrukt als functie van den tijd — is thans nl. minder sterk dan in Fig. 1^a, zoodat de dalende tak veel horizontaler zal loopen. Daardoor komt vanzelf het tijdsgemiddelde dichter bij u_0^2 te liggen. (c_0 zou nu $= {}^2/_3 \times {}^3/_2$, $R = 4^1/_2$ worden in pl. v. 6). Evenwel — bovenstaande berekening is bij hooge temperaturen zeker bedenkelijk, aangezien dan $log\left(1-\frac{x^2}{(l-s)^2}\right)$ zeker niet in een reeks mag worden ontwikkeld, daar op het hoogtepunt der botsing $x=l-s$ zou worden ($s'=s$). De door ons gebruikte reeksontwikkeling tot aan x^4 geeft een te groote waarde voor ω_x, derhalve ook een te groote waarde voor u_t^2. De demping van die uiterst groote snelheid zou, in plaats van vrij plotseling, gedurende een veel te lang traject plaats vinden — zóó groot zelfs dat s' ver binnen s zou vallen, hetgeen natuurlijk onmogelijk is.

Bij *lage* temperaturen (φ groot) zal daarentegen de reeksontwikkeling tot aan x^4 met volle gerustheid kunnen worden aangewend, aangezien de snelheid dan zóó klein is, dat deze reeds binnen een zeer kort traject tot 0 zal zijn gereduceerd. De modulus k nadert nu tot 1 en daardoor E tot $\int_0^{1/2\pi} cos\,\psi\, d\psi = (sin\,\psi)_0^{1/2\pi}$, derhalve eveneens tot 1; maar F zal tot $\int_0^{1/2\pi}\frac{d\psi}{cos\,\psi} = log\,tg\,(45+\tfrac{1}{2}\psi)_0^{1/2\pi} = log\,\infty - log\,1$, d. w. z. tot $log\,\infty$ naderen. Daar evenwel tegelijkertijd $1-k^2$ tot 0 nadert, zoo moeten wij onderzoeken welke waarde $(1-k^2)F$ in (7) aanneemt, wanneer k^2 dicht bij 1 is.

Volgens een bekend theorema [1]) nadert F in dit geval tot $\log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}}$.
Wij verkrijgen dus voor t en u_t^2, wanneer k tot 1 nadert, uit (7):

---

[1]) Zie o. a. LAMB, Treatise on Hydrodynamics, p. 170; CAYLEY, Ellipt. funct., Art. 72; MAXWELL, Elect. and Magn. II, p. 311—316; DURÈGE, p. 190 e. v., speciaal p. 213; KIRCHHOFF, Vorl. p. 270; etc. Beter dan de afleiding van DURÈGE, welke op de LANDEN'sche transformatie berust, is de fraaie afleiding van KIRCHHOFF. Deze laatste berust op de splitsing van den integraal in twee deelen, nl.

$\int_0^{1/2\pi} = \int_0^{1/2\pi-\vartheta} + \int_{1/2\pi-\vartheta}^{1/2\pi}$, waarbij ϑ een kleine grootheid is, maar toch groot wordt ondersteld t. o. v. $\sqrt{1-k^2}$. Maar bij beide afleidingen komt men slechts tot de *grenswaarde* van F.

Een betere methode is m. i. om uit te gaan van de JACOBI'sche betrekking $F = -\frac{\log q'}{\pi} F'$, waarin F' betrekking heeft op den integraal met den complementairen modulus $k' = \sqrt{1-k^2}$, en q' een der door JACOBI ingevoerde hulpgrootheden q en q' is. Nu volgt uit de betrekking $\sqrt{k'} = \frac{2\sqrt[4]{q'}(1+q'^2+q'^6+etc.)}{1+2q'+2q'^4+2q'^9+etc.}$ vooreerst $\frac{1}{16}k'^2 = q'\left(\frac{1+q'^2+q'^6+\ldots}{1+2q'+2q'^4+\ldots}\right)^4$, waaruit

$q' = \frac{1}{16}k'^2\left(1+\frac{1}{2}k'^2+\frac{21}{64}k'^4+\ldots\right)$. En hieruit volgt:

$$-\frac{1}{2}\log q' = \log\frac{4}{k'} - \left(\frac{1}{4}k'^2 + \frac{13}{128}k'^4 + \ldots\right).$$

Verder leidt men gemakkelijk voor $F' = \int_0^{1/2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2\psi}}$ door reeksontwikkeling af $F' = \frac{1}{2}\pi\left(1+\frac{1}{4}k'^2+\frac{9}{64}k'^4+\ldots\right)$, zoodat uit $F = \frac{F'}{1/2\pi}\left(-\frac{1}{2}\log q'\right)$ ten slotte voortvloeit $F = \left(1+\frac{1}{4}k'^2+\frac{9}{64}k'^4\right)\left[\log\frac{4}{k'} - \left(\frac{1}{4}k'^2+\frac{13}{128}k'^4+.\right)\right]$, of benaderd $F = \left(1+\frac{1}{4}k'^2\right)\left(\log\frac{4}{k'}-\frac{1}{4}k'^2\right)$. waarvan de limietwaarde blijkbaar $\log\frac{4}{k'}$ is.

Wij merken nog op dat de hulpgrootheid q steeds zeer klein blijft. Voor $k'=0$ is $q'=0$, maar voor $k' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is q' nog slechts 0,043. (Id. voor k en q). Op dit feit berust dan ook de enorm sterke convergentie der JACOBI'sche reeksen voor de elliptische functies.

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{\frac{m}{2f}} \quad ; \quad u_t^2 = \frac{u_0^2}{3(1-k^2) \log 4/\sqrt{1-k^2}},$$

daar E tot 1 nadert, en 1 tegen $\frac{2k^2-1}{1-k^2}\frac{E}{F} = \frac{1}{(1-k^2)F}$ kan worden weggelaten. Nu volgt uit (6) voor groote waarden van φ ($\alpha < 1$):

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{\varphi^2(1-\alpha)^2}\right)\right] = 1 - \frac{{}^1/_2\,\alpha}{\varphi^2(1-\alpha)^2},$$

zoodat wij verkrijgen met $\log \frac{4}{\sqrt{1-k^2}} = \frac{1}{2} \log \frac{16}{1-k^2}$:

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{1}{2\sqrt{(1-\alpha)}} \log\left(\frac{32(1-\alpha)^2}{\alpha}\varphi^2\right)\sqrt{\frac{m}{2f}} \\ u_t^2 &= \frac{\frac{4}{3}\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\varphi^2}{\log\left(\frac{32(1-\alpha)^2}{\alpha}\varphi^2\right)} u_0^2 \end{aligned}\right\} \text{(lage temp.)} \quad . \quad . \quad (7^b)$$

Wederom nadert t logarithmisch tot ∞ en u_t^2 tot $\frac{A\varphi^2}{\log B\varphi^2} u_0^2$, evenals in ($c_2$), in § 3 afgeleid met twee afzonderlijke krachten.

Teneinde een vergelijking mogelijk te maken, moeten wij ook thans den maximum-arbeid Δ invoeren, door de aantrekkende krachten verricht. Uit (4^a), nl.

$$\omega_x = \frac{2f}{m}(l-s)^2\left[(1-\alpha)\frac{x^2}{(l-s)^2} - \frac{\alpha}{2}\frac{x^4}{(l-s)^4}\right],$$

volgt, dat dit maximum zal zijn, wanneer $\frac{x^2}{(l-s)^2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ is, zoodat

$$(\omega_x)_{max} = \frac{2f}{m}(l-s)^2\frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha}$$

wordt. Vermenigvuldigd met $^1/_2\,Nm$, hebben wij derhalve (Zie Aant. I)

$$Nf(l-s)^2\frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha} = \frac{2}{3}\Delta.$$

Aangezien verder $\varphi^2 = \frac{(l-s)^2}{u_0^2}\frac{2f}{m}$ is, zoo wordt

$$^1/_2\,Nm \,.\, \frac{32(1-\alpha)^2}{\alpha}\varphi^2 u_0^2 = Nf(l-\;)^2 \,.\, \frac{32(1-\alpha)^2}{\alpha} = 64 \times \frac{2}{3}\Delta.$$

Wij vinden alzoo voor $^1/_3\,Nm\,u_t^2 = RT$, daar $^1/_2\,Nm\,u_0^2 = {}^2/_3\,L_0 = {}^2/_3\,(E-\Delta)$ is:

$$RT = \frac{{}^1/_{24} \cdot 64 \times {}^2/_3\,\Delta}{\log \frac{64 \times {}^2/_3\,\Delta}{{}^2/_3\,L_0}} = \frac{{}^{16}/_9\,\Delta}{\log \frac{64\,\Delta}{E-\Delta}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

tegen $RT = \frac{{}^{1}/_{3}\,\theta\Delta}{\log \frac{4\Delta}{E-\Delta}}$ bij de vroegere aanname van twee afzonderlijke krachten (zie Aant. 3). De coëfficienten zijn anders, maar de logarithmische betrekking is *geheel dezelfde* gebleven.

Aangezien echter onze vroegere aanname tot betere coëfficienten voert dan de door ons in het bovenstaande uitgewerkte aanname (2) van Aant. **4**, en dit zoowel bij hooge als bij lage temperaturen, zoo kunnen wij in het vervolg naast den laatsten aanzet ook de voor de *berekeningen eenvoudiger* onderstelling doorvoeren van *twee afzonderlijke* krachten, waarbij de afstootende kracht in werking treedt bij $x = l - \sigma$, nadat de aantrekkende kracht haar hoogtepunt heeft bereikt.

Met de voorgaande Aanteekeningen hoop ik enkele moeilijkheden, die zich bij de lezing van mijn eerste stuk mochten hebben voorgedaan, nader te hebben toegelicht. [1]) Thans gaan wij er toe over de ons opgelegde taak te vervolgen en na te gaan wat er wordt van het aantrekkings- en afstootings-Viriaal, ter opstelling van de toestandsvergelijking bij geringe volumina, speciaal bij **zeer lage** temperaturen.

La Tour près Vevry, Najaar **1920**. (*Slot volgt*).

Gaarne vermeld ik weder dankbaar, dat de uitvoering van dezen arbeid mij vergemakkelijkt is geworden door het VAN 'T HOFF-fonds.

---

[1]) Niet *alle* bezwaren, welke Prof. LORENTZ zoo welwillend was mij indertijd schriftelijk te doen toekomen, mogen hiermede zijn weggenomen, maar naar ik hoop toch enkele. Niemand meer dan schrijver dezes is zich bewust van de groote moeilijkheden welke hier te overwinnen zijn.

Met Prof. EHRENFEST — aan wien wij de zoo belangrijke theorie der *Adiabatische Invarianten* te danken hebben (1916), welke theorie later door BURGERS (1917) en KRUTKOW (1919–1920) op zoo gelukkige wijze is voortgezet — had ik het genoegen in het najaar van 1919 een samenspreking over den inhoud van mijn eerste stuk te hebben. Hij opperde o.a. het bezwaar dat niet *alle* moleculen bij de nadering tot andere moleculen tot botsing zouden komen en zich daarna weer daarvan zouden verwijderen, maar dat sommige in de nabijheid daarvan zouden blijven rondwaren. Volkomen juist, maar dan zou men - als het *gassen* gold — met *associatie* te doen hebben, een geval dat door mij met opzet als een onnoodige complicatie buiten beschouwing is gelaten. Doch waar het hier geen gassen geldt, maar hoofdzakelijk *vaste* lichamen, waar de moleculen slechts tusschen de naburige heen en weer gaan, is *deze* complicatie wel geheel buitengesloten. Trouwens reeds lang verzetten alle nieuwere structuurtheoriën zich bij den vasten, gekristalliseerden toestand *tegen* het begrip associatie, zoodat wij dit dan ook wel geheel ter zijde kunnen stellen.

Maar er zijn m. i. grootere moeilijkheden, van geheel anderen aard. waarop ik later hoop terug te komen.

Paleontologie. — De Heer EUG. DUBOIS biedt een mededeeling aan over: *„De beteekenis der groote schedelcapaciteit van Homo Neandertalensis".*

Scheikunde. — De Heeren ERNST COHEN en H. R. BRUINS bieden een mededeeling aan over: *„Het diffusieprobleem en de nauwkeurige bepaling van diffusiecoëfficienten".*

(Deze mededeelingen zullen in het volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

Ter uitgave in de **Werken der Akademie** wordt aangeboden:

1. door den Heer C. E. A. WICHMANN het manuscript van zijne verhandeling: *„Die Erdbeben des Indischen Archipels von* 1858 *bis* 1877".

2. door den Heer G. A. F. MOLENGRAAFF, namens den Heer N. WING EASTON het manuscript van diens verhandeling: *„De Billitonieten".*

De Voorzitter stelt dit manuscript in handen van de Heeren K. MARTIN en G. A. F. MOLENGRAAFF met verzoek om rapport, uit te brengen in een volgende vergadering.

Voor de boekerij biedt de Heer R. MAGNUS ten geschenke aan een exemplaar der dissertatie van Mej. A. H. M. J. G. SLUYTERS, getiteld: *„De standaardisatie van digitalis benevens een onderzoek aangaande een geschikt Nederlandsch digitalispreparaat."*

Daar dit jaar de 1e Kerstdag valt op den laatsten Zaterdag der maand December, wordt besloten de volgende vergadering der Afdeeling vast te stellen op **Zaterdag 18 December a.s.**

De vergadering wordt gesloten.

---

4 Februari 1921.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG

VAN DE

GEWONE VERGADERING

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 27 November 1920.

DEEL XXIX.

N°. 5.

4 Februari 1921.

Wanneer <u>na</u> de aanbieding van eene mededeeling mocht blijken dat deze met inbegrip van tekstfiguren en tabellen, meer dan 16 blz. druks bedraagt, heeft de Secretaris het recht dit stuk <u>niet</u> op te nemen en zal het aan den Schrijver teruggezonden worden ter bekorting.

Deze terugzending zal niet geschieden wanneer de Schrijver zich bereid verklaart, de meerdere kosten dan die van één vel druks, voor zijne rekening te nemen.

In dit geval kunnen ook platen aan de mededeeling worden toegevoegd.

Van de in deze aflevering voorkomende mededeelingen zijn de navolgende afzonderlijk verkrijgbaar:

W. DE SITTER: „Over de mogelijkheid van statistisch evenwicht van het heelal". *f* 0.30.

W. STORM VAN LEEUWEN en F. VERZÁR: „Over de gevoeligheid voor vergiften bij dieren, lijdende aan avitaminosen". *f* 0.30.

H. A. BROUWER: „Samenstelling en insluitsels van de lavaprop van den Galoenggoeng (West-Java)". (Met één plaat). *f* 0.45.

Mej. A. F. C. VAN DISHOECK: „Gevoeligheid voor licht van + en — stammen van Phycomyces nitens". *f* 0.30.

I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „Het mechanisme van den automatischen stroomonderbreker". *f* 0.30.

G. A. F. MOLENGRAAFF: „Mangaanknollen in mesozoïsche diepzee-afzettingen van Nederlandsch-Timor", met een voorloopige mededeeling van den Heer L. F. DE BEAUFORT over: „Fossielen van cretaceïschen ouderdom in die afzettingen". (Met twee platen). *f* 0.90.

G. KRUTKOW: „Over de bepaling van quanta-voorwaarden met behulp van adiabatische invarianten". *f* 0.60.

J. F. VAN BEMMELEN: „De kleurenteekening der mimetische vlinders". *f* 0.60.

W. H. KEESOM: „De quadrupoolmomenten der Zuurstof- en der Stikstofmoleculen". *f* 0.30.

W. H. KEESOM: „Over de Cohaesiekrachten volgens VAN DER WAALS". *f* 0.30.

B. P. HAALMEIJER: „Over elementairoppervlakken der derde orde". (5e mededeeling). *f* 0.90.

A. SMITS en G. J. DE GRUIJTER: „Over het electromotorisch gedrag van Aluminium", II. *f* 0.30.

BALTH. VAN DER POL JR.: „Discontinuïteiten bij het Magnetiseeren". II. (Met één plaat). *f* 0.45.

F. BERNSTEIN (Göttingen): „Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion. (Zweite Note). Allgemeine Lösung". *f* 0.30.

J. J. VAN LAAR: „Over de toestandsvergelijking voor willekeurige temperaturen en volumina. Analogie met de formule van PLANCK". II. *f* 0.90.

DRUKKERIJ HOLLAND N.Z. VOORBURGWAL 55-60 AMSTERDAM